**B. Kömekow, A. Orazgulyýew, G. Gurbangulyýew,
O. Aşyrow, A. Kaşaňow, H. Geldiýew, A. Öwezow**

TÄSIN MATEMATIKANYŇ SYRLARY

Orta, orta hünär we ýokary okuw mekdepleri
üçin okuw gollanmasy

*Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi*

**Aşgabat
Türkmen döwlet neşirýat gullugy
2010**

UOK 51+377
K 74

B. Kömekow we başg.
K74 **Täsin matematikanyň syrlary.** Orta, orta hühär we ýokary okuw mekdepleri üçin okuw gollanmasy. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2010.

TDKP №66, 2010 KBK 22.1ýa72+ýa73

© B. Kömekow we başg., 2010.

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

GIRIŞ

Türkmenistanyň Prezidenti
Gurbanguly Berdimuhamedow:

Gadyrly ýaşlar, siziň oňat okamagyňyz, tüýs Watan ogul-gyzlary bolup ýetişmegiňiz üçin döwletimiz ähli şertler döredýär.

Tejribäniň görkezişi ýaly, matematika okuwçylaryň köpüsi üçin iň kyn, gyzyksyz ders hasaplanylýar. Matematika dersine bolan gyzyklanmany döretmek matematika mugallymlarynyň öňünde duran iň wajyp we gaýragoýulmasyz wezipeleriň biridir. Tejribeli mugallymlar matematikanyň özbolušly aýratynlygyny, özüne çekijiligini örän ýerlikli peýdalanmak bilen okuwçylarda matematika dersine bolan höwes, ýykgynlyk döredýärler. Okuwçylarda matematika dersine bolan söýgini döretmekde meseleleriň mümkinçiligi örän uludyr. Göräýmäge çözülişi ýönekeýje ýaly bolup görünýän, emma ýeterlik derejede çylşyrymly meseleler okuwçylarda uly gyzyklanma döredýär. Şu gollanmada hödürlenilýän meseleleri okuwçylara sapakda (sapagyň soňunda okuwçylar ýadan mahallary), synpdan daşary işlerde özleşdirmek bolar. Bu gollanmadan alnan mesele-mysallary 4–10-njy synplaryň okuwçylaryna hödürläp bolar. Bu meseleleriň köpüsiniň hasaplama işleri ýönekeý bolup, ýöne meseleleriň çözülişini tapmak welin

dogry, esasly we yzygiderli pikir ýöretmegi talap edýär. Şeýle meseleler okuwçylarda matematika dersine höwes döretmäge ýardam etmek bilen çäklenmän, eýsem, okuwçylaryň logiki pikirlenmek başarnyklaryny hem ösdürýär. Bu bolsa matematikany höwesli öwrenmegiň başlangyjydyr. Logiki pikirlenmek başarnyklary çaga doglanda oňa taýýar görnüşinde berilmeýär. Logiki pikirlenmek ukyby we başarnyklary matematika dersi döredijilikli öwredilende ösdürilýär we berkidilýär. Bu başarnyklar bolsa okuwçylaryň matematikany üstünlikli özleşdirmekleriniň esasy bolup durýar.

Dogry ýaly, emma logika ters gelýän pikire sofizm diýilýär. Sofizmler hem okuwçylarda uly gyzyklanma döredip, matematikany inçelik bilen örän çuňňur öwrenmäge ýardam edýär.

I BAP

DEGIŞME WE LOGIKI HASIÝETLI MESELELER

1. 5 sany şem ýanyp dur. Olaryň ikisini öçürdiler. Näçe şem galar?

2. Uzynlygy 5 metr bolan agaç bar. Ony 1 metrden kesmeli.

Eger agajy kesmek üçin bir minut gerek bolsa, onda agajy näçe minutda 1 metrlik böleklere bölmek bolar?

3. Guşlaryň sürüsi uçup gelýär. Şeýlelikde, bir guş öňden, ikisi yzdan, biri yzdan ikisi öňden, biri ikisiniň arasynda, üçüsi bir hatarda uçýar. Ähli guşlaryň sany näçe?

4. Gapda 4 alma bar. 4 adamyň her birine bir alma ýeter ýaly we bir alma bolsa gapda galar ýaly edip olary nädip bölmeli?

5. Aman we Meret mugallymlarynyň Milli bahar baýramyny gutlamak üçin birnäçe gül aldylar. Ýolda Aman şeýle diýdi: «Eger sen gülleriňden 4 sanysyny maňa berseň, meniň güllerimiň sany seniňkiden iki esse köp bolar». Meret Amana ýüzlenip: «Eger sen maňa 4 gül berseň biziň güllerimiz deňleşer» – diýdi. Olaryň hersinde näçe gül bar?

6. Aman, Meret, Arslan, mekdebe barýarkalar üç sany aşyk tapdylar. Eger Amanyň bir özi mekdebe barýan bolsa, ol näçe aşyk tapardy?

7. Bir ýumurtgany bişirmek üçin 4 minut gaýnadýarlar. Dört ýumurtgany bişirmek üçin olary näçe minutlap gaýnatmaly?

8. Oglanjyk mekdepden gelýärkä bazara sowlup alma satyn aldy. Satyjy oňa iki dürli, ýagny 20 teňňeden uly, 10 teňňeden bolsa kiçi almalary almagy teklip etdi. Oglanjyk 10 teňňe berip, kiçi almany satyn aldy. Ol öýlerine gelip almany iýjek wagty şeýle pikir etdi: «Men satyja öň 10 teňňe berdim, bu almanyň bahasam 10 teňňe. Eger men bu almany satyja yzyna gaýtaryp bersem, onda meniň oňa 20 teňňe töledigim bolar. Diýmek, men ondan 20 teňňelik uly almany hem satyn alyp bilerin». Oglanjyk kiçi almasyny alyp bazara tarap ylgap gitdi. Ol özüniň kiçi almasyny uly alma çalyşmak arzuwyna ýetip bilermi?

9. Üç dogan bir otagda ýaşaýardy. Olaryň her haýsysynyň öz asma gulpy we şol gulpy açýan ýeke-täk açary bardy. Doganlaryň her biri diňe öz açaryny we gulpuny ulanyp, otaga girip biler ýaly gapyny nädip gulplamaly?

10. Aman we Meret mekdebiň mejlisler zalynda oturgyçlary tertipleşdirip goýýardylar. Aman Merede: «Sen şu 12 oturgyjy her hatarda 5 oturgyç bolar ýaly 3 hatara ýerleşdirip bilersiňmi?» diýdi. Meret birnäçe şowsuz synanyşykdan soň oturgyçlary talap edilişi ýaly goýdy. Soňra Meret Amana: «Sen şu 12 oturgyjy her hatarda 4 oturgyç bolar ýaly 4 hatara ýerleşdirip bilersiňmi?» diýdi. Aman hem köp pikirlenip otur-

gyçlary talap edilişi ýaly goýdy. Meret oturgyçlary nähili goýdy? Aman oturgyçlary nähili goýdy?

11. Arasyndaky uzaklyk 21 *m* bolan arça agajyndan tut agajyna tarap tomzak, onuň garşysyna tut agajyndan arça agajyna tarap bolsa çekirtge barýar. Tomzak 1*dm* geçýänçä, çekirtge 2 *m* geçýär. Olar arça agajyndan näçe uzaklykda duşuşarlar?

12. Begenç irden oýananda diwar sagadyň işlemeýändigini gördi. Ol sagada täze batareýa goýup dogry wagty goýjak bolanda başga işleýän sagadyň ýoklugy belli boldy. Sagadyň näçe bolandygyny bilmek üçin ol beýleki köçede ýaşaýan dosty Amanlara gitdi. Ol Amanlara gelen dessine, sagada seretdi. Begenç Aman bilen birsalym oturandan soň sagadyň näçe bolandygyny bilip öýlerine gitdi. Ol öýlerine gelip, diwar sagatda hakyky wagty goýmagy başardy. Begenç bu işi nähili ýerine ýetirdi.

13. Her gün Fransiýanyň Gawr şäherinden Nýu-Ýork şäherine tarap ýolagçy parahody ugraýar. Nýu-Ýorkdan hem her gün Gawra tarap şol bir wagtda ýolagçy parahody ugraýar. Bu aralygy geçmek üçin parahodlara 7 gije-gündiz gerek bolýar. Maý aýynyň 8-ine Gawrdan Nýu-Ýorka tarap ýola düşen parahod öz ýolunda Nýu-Ýorkdan Gawra barýan näçe parahoda duşar?

14. Aman we Meret eşekli ota gidýärdiler. Şonda olar, köplenç, öz eşeklerini ýarysdyrýardylar. Bir gezek Amanyň eşegi birinji bolsa, beýleki gezek Merediň eşegi birinjiligi alýardy. Olar bu ýaryşlardan ýadap bir gezek: «Kimiň eşegi birinji bolup däl-de, eýsem, ikinji bolup pellehana gelse şol hem ýeňiji bolsun» diýip

şertleşdiler. Hemmeleriň bu özbolušly ýaryşy synlaslary gelýärdi. Emma Amanam Meredem eşekleriniň jylawlaryny çekip, olara bir ädim hem ätdirmän oturdylar. Tomaşaçylar: «Bu jedeliň manysy ýokdur, ikisi hem eşekleriniň jylawyny çeker oturarlar» diýişdiler. Şonda Çary aga: «Men häzir bularyň gulagyna bir jadyly söz aýdaryn welin eşeklerini aýagaldygyna çapdyryp ugrarlar» diýdi. Bu hakykatdan-da şeýle boldy. Çary aga olaryň gulagyna çawuş çakdy welin, olar eşekden böküp düşüp, gaýtadan eşege münüp çapyp başladylar. Olar bir-birinden ozjak bolup eşekleri gamçylaýardylar. Ýaryşyň ahyrynda eşegi ikinji bolup pellehana gelen ýeňiji diýip yglan edildi. Çary aga oglanlara näme diýdikä?

15. Bazardan Aman uly gawunlary, Myrat bolsa kiçi gawunlary satyn aldylar. Uly gawunlar kiçilere garanyňda iki esse gymmatdy. Eger Myrat Amandan 3 esse köp gawun satyn alan bolsa, olaryň haýsysy köp pul toledi?

16. Oýna başlamankalar Amanyň Myratdan 5 aşygy köpdi. Myrat Amanyň 4 aşygyny utup aldy. Indi kimiň aşygy köp we näçe aşygy köp?

17. Aman stoluň üstünde her 3 santimetrden bir daşjagaz goýdy. Ol 15 *sm* aralykda näçe daşjagazy goýdy?

18. Aman ýoluň gyrasynda her 5 *m*-den bir arça agajyny oturtdy. Eger ol 5 arça agajyny oturdan bolsa, onda 1-nji agaçdan 5-nji agaja çenli uzaklyk näçe metr?

19. Aman jigisi Sapa bilen kömelek ýygmaga gitdiler. Aman Sapadan 12 kömelek köp tapdy. Öýe gaýdyp barýarkalar Sapa: «Kömeleklerimiziň sany deň bolar ýaly maňa birnäçe kömelek beräýdä» diýip ýal-

bardy. Aman jigisiniň bu haýyşyny ýerine ýetirdi. Ol Sapa näçe kömelek berdi?

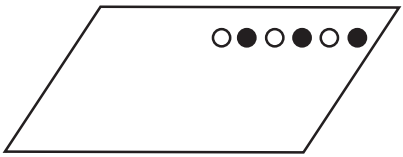
20. Mergen dükandan futbol we woleýbol pökgisini satyn almakçy boldy. Ol puluny sananda pökgüleriň ikisini almak üçin 3 manadynyň ýetmeýändigini anyklady. Şonuň üçin ol diňe futbol pökgisini almaly boldy. Şondan soňra onda 12 manat 60 teňňe puly galdy. Woleýbol pökgisiniň bahasy näçe?

21. Iki oglan 4 sagatlap küşt oýnadylar. Olaryň her biri näçe sagat küşt oýnadylar?

22. 7 doganyň her biriniň bir aýal dogany bar. Maşgalada näçe çaga bar?

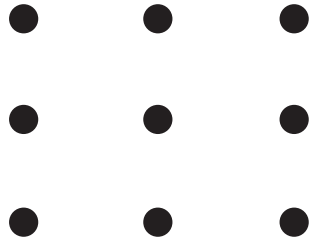
23. 5 oglan doganlaryň her biriniň 1 gyz doganlary bar. Maşgalada näçe çaga bar?

24. Stoluň üstünde 3 sany ak reňkli we 3 sany gara reňkli tegelek kagyz bölekleri gezekleşdirilip, ýagny ak kagyz gara kagyz, soňra ýene-de ak kagyz gara kagyz we ş.m. bolar ýaly (surata seret) setir edilip goýlupdyr. Olary çep tarapda diňe gara kagyzlar, yz ýany bilen bolsa, diňe ak kagyzlar bolar ýaly edip süýşürmeli. Şeýlelikde, iki kagyzy bilelikde, ýagny olaryň tertibini üýtgetmezden süýşürmeli. Kagyzlary süýşürmek üçin stoluň çep böleginde ýer bar. Bu işi amal etmek üçin üç süýşürmäni amala aşyrmak ýeterlikdir. Meseläniň çözülişini görkeziň.



25. Birnäçe syýahatçy derýanyň çep kenaryna geldiler. Olar sag kenara geçmek isleýärdiler. Emma golaýda kiçijik gaýykda gezelenç edýän iki sany oglanjykdan başga gaýykly adam ýokdy. Bu gaýyk diňe bir syýahatçyny ýa-da oglanjyklaryň ikisini göterip biljekdi. Syýahatçylaryň ählisi şu gaýykda derýanyň sag kenaryna geçip bildiler. Olar bu işi nähili amal etdiler?

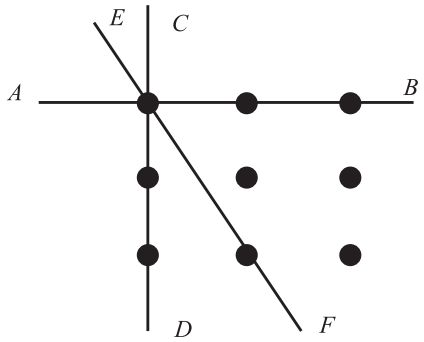
26. 9 sany nokat suratdaky ýaly edilip ýerleşdirilipdir. Galamy kagyzdan aýyrman bu nokatlaryň üstünden göni çyzyklary çyzmaly. 4 sany göni çyzygyň kömegi bilen bu işi amal edip bolarmy?



27. Ýük maşyny Marydan Aşgabada çenli 60 *km/sag* tizlik bilen ýeňil maşyn bolsa, Aşgabatdan Mara çenli 90 *km/sag* tizlik bilen ugrady. Duşuşmazyndan 1 sagat öň bu maşynlar biri-birinden näçe kilometr daşlykda bolarlar?

28. 9 nokat suratdaky ýaly ýerleşdirilipdir. Suratdan görnüşi ýaly *AB* we *CD* göni çyzyklar degişlilikde, üç nokadyň, *EF* göni çyzyk bolsa iki nokadyň üstünden geçýär.

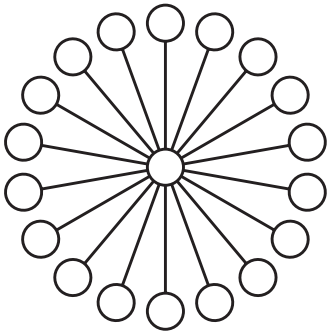
Suratdaky nokatlaryň üçüsiniň üstünden geçýän we ikisiniň üstünden geçýän göni çyzyklaryň sanyny kesgitläň. Nokatlaryň üçüsini aýryň we galan 6 noka-



dy her bir göni çyzygyň üstünde üç nokatdan ýerleşer ýaly üç göni çyzygyň üstünde ýerleşdiriň.

29. Amanyň oglan dogany ýene 2 ýyldan soň mundan iki ýyl öňdäki ýaşyndan 2 esse köp ýaşar. Amanyň aýal dogany ýene 3 ýyldan soň mundan üç ýyl öňdäki ýaşyndan 3 esse köp ýaşar. Amanyň aýal dogany ulumy ýa-da erkek dogany? Olar häzir näçe ýaşynda?

30. On dokuz sany tegelegiň içine (*aşakdaky sur.*) 1-den 19-a çenli bitin sanlary ýazyp çykmaly, özem islendik bir göni çyzygyň üstünde ýatan üç tegelegiň içinde ýazylan sanlaryň jemi 30-a deň bolmaly.



31. Günortan Aşgabatdan Mara tarap ýük maşyny ugraýar. Bir sagat soňra Marydan Aşgabada tarap şol bir ýol bilen ýeňil maşyn ugraýar. Ýeňil maşynyň tizligi

ýük maşynyň tizliginden uly. Ýük maşyny bilen ýeňil maşyn ýolda duşuşanda olaryň haýsysy Aşgabatdan uzakda bolar?

32. Dostuňyza 20 teňňelik we 10 teňňelik iki teňňe beriň. Goý, ol size görkezmän teňňeleriň birini sag we beýlekisini çep eline alsyn. Goý, ol sag elindäki teňňäni 3-e we çep elindäki teňňäni bolsa 2-ä köpeltsin. Alnan netijeleri goşup jemini size aýtsyn. Eger alnan netije 80 teňňe bolsa, onda onuň sag elinde 20-lik, çep elinde bolsa 10-lyk teňňe bar. Eger alnan netije 70 teňňe bolsa, onda onuň sag elinde 10-lyk, çep elinde bolsa 20-lik teňňe bar. Näme üçin şeýle bolýanlygyny düşündiriň.

33. Sürüji öz maşynynyň spidometrine seredende ol 15951 sany görkezýärdi. Sürüji maşynyň geçen kilometrleriniň mukdarynyň simmetrik sandygyna üns berdi. Bu san çepden saga okanyňda-da, tersine, sagdan çepe okanyňda-da şol bir sany görkezýärdi. Sürüji indi bu golaýda spidometr beýle simmetrik sany görkezmez diýip pikir etdi. Emma iki sagat geçenden soň spidometr ýene-de iki tarapyndan hem deň okalýan simmetrik sany görkezýärdi. Spidometriň görkezýän sanyny we bu iki sagatda sürüjiniň ýük maşynyny nähili tizlik bilen sürendigini tapyň.

34. Mergen, Geldi we Begenç bişen tut agajynyň aşagyna mata ýazdylar we tudana ýygmaga başladylar. Onuň üçin olar tut agajynyň şahalaryny silkýärdiler. Olar sähel salymda bir üýşmek tudana ýygnadylar. Olar üç bolup ýygan tudanalaryny paýlaşjak bolanlarynda ölçär ýaly terezinin ýa-da gabyň ýokdugyny anykladylar. Mergen oglanlaryň ulusy bolansoň tudanalary üç üýşmek edip paýlady welin beýleki iki oglanyň mun-

dan göwni suw içmedi. Olar jedelleşip köp durdular. Şonda Mergen: «Eger biz diňe Geldi ikimiz bolsak, men paýlamanyň aňsat ýoluny salgy bererdim. Men tudanalary özümçe deň ikä bölüp, Geldä: «Islän üýşmegiňi al. Maňa galany bolýar» diýerdim. Emma biz üçdä» diýdi. Soňra az wagt geçmänkä Begenç oglanlar razy bolar ýaly usuly teklip etdi. Oglanlar razy bolup tudanalary paýlaşdylar. Olaryň her biri tudanalaryň üçden bir böleginden az bolmadygyny alandygyna ynanýardy. Begenç tudanalary paýlamagyň nähili usulyny teklip etdi?

35. Gadym zamanlarda bir adamyň 4 sany ogly bar eken. Ol ölmezinden öň öz sygyrlarynyň üçden birini uly ogluna, dörtden birini ikinji ogluna, bäşden birini üçünji ogluna we altydan birini bolsa iň körpe ogluna bermegi wesýet edipdir. Kakalary dünýeden ötensoň ogullary kakalarynyň wesýetini berjaý etjek bolupdyrlar we ony başarmandyrlar. Sebäbi kakasynyň jemi 59 sany sygry bolup, ol ne üçe, ne dörde, ne bäşe ne-de, alta bölünýärdi. Olar kömek sorap goňşularyna ýüz tutdular. Ol öz bir sygryny bularyň sygyrlarynyň üstüne goşdy. Soňra ol 60 sygryň üçden birini, ýagny 20 sygry doganlaryň ulusyna, dörtden birini, ýagny 15 sygry doganlaryň ikinjisine, bäşden birini, ýagny 12 sygry doganlaryň üçünjisine we altydan birini, ýagny 10 sygry doganlaryň kiçisine berdi. Galan (60 – 20– – 15 – 12 – 10 = 3) 3 sygry bolsa öýlerine alyp gitdi. Ol 1 sygyr getirip, 3 sygry bolsa alyp gidipdi. Doganlar pikire çümdüler. «Bu nähili beýle bolýar? Men 59 sygryň üçden birini alsam, ol 19 sygyr we ýene bir sygryň üçden iki bölegi bolmaly. Men bolsa 20 sygyr alyp, öz paýymdan köp aldym» diýip doganlaryň ulusy aýtdy. Onda doganlaryň beýlekileri hem özlerine ýetýänden

köp paý alandyklaryny aýtdylar. Sygyr paýlanyşygy nähili gutarýar?

36. Üç ogully garry ogullaryna 17 sany düýesini aşakdaky görnüşde paýlamagy wesýet edip, şeýle diýen: «Uly oglum düýeleriň ýarysyny, ortanjy oglum üçden birini, körpe oglum bolsa dokuzdan birini alsyn». Kakalary dünýeden ötensoň ogullary düýeleri paýlaşmaga başlapdyrlar. Emma olar kynçylyga sezewar bolupdyrlar. 17-san 2-äde, 3-ede, 9-ada bölünmeýärdi. Oglanlar name etjeklerini bilmän, obanyň kazysyna ýüz tutupdyrlar. Ol öz düýesini münüp gelip, düýeleri wesýeti berjaý edip paýlapdyr. Ol öz düýesini hem goşup, 18 düýäniň ýarysyny, ýagny 9-syny garrynyň uly ogluna, üçden birini, ýagny düýeleriň 6-syny ortanjy ogluna we dokuzdan birini, ýagny düýeleriň 2-sini kiçi ogluna beripdir. Özi bolsa düýesini alyp gidipdir. Düýe paýlanyşygy nähili çözülýär?

37. Aman we Meret küşt oýnunyň muşdaklary. Olar küşt oýnamagy halaýarlar we bu oýny gowy oýnaýarlar. Men olar bilen küşt oýnap, olaryň ikisinden hem utuldym. Şol wagt Çary gelip, Aman we Meret bilen bir wagtda küşt oýnap olaryň birini utjakdygyny ýa-da bolmasa olaryň ikisi bilen deň oýnajakdygyny aýtdy. Bu bizi haýran galdyrdy. Sebäbi Çary küşdüň diňe göçümlerini bilýärdi. Aman we Meret Çarynyň aýdyşy ýaly onuň bilen bir wagtda küşt oýnamaga oturdylar. Çary olaryň biri bilen ak, beýlekisi bilen bolsa gara çöplerde oýnady. Az salym geçmänkä, Çary aýdyşy ýaly, oglanlaryň birini utup, beýlekisinden bolsa utuldy. Bu oňa nähili başartdy?

38. Iki garynja telegraf sütüniniň depesinden aşaklygyna ýere çenli düşdüler we soňra ýene-de telegraf

sütüniniň depesine çykdylar. Şeýlelikde, garynjalaryň birinjisi şol bir tizlikde hereket etdi. Ikinji garynja bolsa sütünden düşende birinji garynjadan iki esse çalt, sütüne çykanda bolsa iki esse haýal tizlik bilen hereket etdi. Garynjalaryň haýsysy yzyna telegraf sütüniniň depesine çalt çykar?

39. Çary jigisi Maýa «Eger seniň puluň üstüne meniň pulumyň ýarysyny goşsak, onda iki şokolad satyn alyp bilerdik» – diýdi. Onda Maýa: «Eger, seniň puluň üstüne meniň pulumyň ýarysyny goşsak, onda näçe şokolad alyp bileris» diýip sorady?» Oňa Çary «Bir şokolad» diýip jogap berdi. Çarynyň näçe manat puly bar?

40. Patyşa 2 weziriniň haýsysynyň iň akyllydygyny kesgitlemek üçin olary çagyryp şeýle diýipdir:

– Ine, siziň öňüňizde biri gara, ikisi ak reňkli üç telpek ýatyr. Siziň her biriňize telpek geýdirerler. Siziň haýsyňyz öz kelläňizde nähili reňkli telpegiň bardygyny çalt bilip bilersiňiz?

Wezirleri garaňky jaýa salyp, olaryň ikisine-de ak telpek geýdiripdirler we soňra patyşanyň ýanyna getiripdirler. Wezirler uzak wagtlap bir-birine seredipdirler. Ahyr olaryň biri «Meniň kellämde ak telpek bar» diýip jogap berýär? Weziriň kellesine haýsy pikir geler?

41. Matematiki agşamynda deň utuş gazanan üç okuwçynyň haýsysynyň has ýitiligini bilmek üçin olara 3 ak we 2 sany gara telpegi görkezdiler. Soňra olaryň gözlerini daňyp, olaryň üçüsine-de ak telpekleri geýdirdiler. Gara telpekleri bolsa olar görmez ýaly ýygnadylar. Soňra olaryň gözlerini açyp öz kellelerine geýdirilen telpegiň reňkiniň haýsydygyny soradylar.

Olaryň biri birneme ýoldaşlaryna seredip oturandan soň öz kellesine geýdirilen telpegiň reňkiniň akdygyny aýtdy. Okuwçy ak telpegini nähili bildi?

42. Iki sany *A* we *B* obalar biri-birine golaý ýerleşipdir. Bu obalaryň ýaşaýjylary ýygy-ýygydan biri-biriniňkide myhmançylykda bolýarlar. *A* obanyň ýaşaýjylarynyň mydama dogry sözleýändikleri, *B* obanyň ýaşaýjylarynyň bolsa mydama ýalan sözleýändikleri belli. Geçip barýan ýolagçy bu obalaryň birine baryp, onuň haýsy obadygyny bilmek isleýär. Ol nähili soragyň üsti bilen bu obanyň *A* ýa-da *B* obadygyny anyklap biler?

43. Aman tigirli Meret bolsa maşynly bir wagtyň özünde obadan şähere tarap ugradylar. Merediň tizligi Amanyň tizliginden 5 esse köpdi. Ýoluň ýarysyny geçenden soň maşyn döwlüp ýatdy. Meret ýoluň galan ýarysyny Amanyň tigirli tizliginden iki esse az tizlik bilen pyýada geçmeli boldy. Şähere olaryň haýsysy çalt barypdyr?

44. Iki syýahatçy bir wagtyň özünde *A*-dan *B* tarap çykyp ugradylar. Birinji syýahatçy bu aralygy geçmek üçin sarp eden wagtynyň deň ýarysyny 5 *km/sag*, ikinji ýarysyny bolsa 4 *km/sag* tizlik bilen ýöredi. Ikinji syýahatçy bolsa ýoluň ýarysyny 4 *km/sag*, beýleki ýarysyny bolsa 5 *km/sag* tizlik bilen ýöredi. Olaryň haýsysy B tarapa çalt gelipdir?

45. Aman hem-de Meret ogullaryny ýanlaryna alyp, balyk tutmaga gitdiler. Aman ogly Sähet bilen deň möçberde balyk tutdy. Meret bolsa öz oglunyň tutan balygyndan üç esse köp balyk tutdy. Olaryň ählisi bilelikde 35 balyk tutdular. Merediň oglunyň ady kim? Olaryň her haýsy näçe balyk tutupdyr?

46. Synpda 31 okuwçy bar. Olaryň 18-i küşt, 10-usy şaşka, 3-üsi bolsa küşt hem şaşka oýnap bilýärler. Synpda okuwçylaryň näçesi bu oýunlaryň ikisini-de oýnap bilmeýärler.

47. Synpdaky 30 okuwçynyň 6-sy tans hem-de, aýdym gurnagyna gatnaşmaýarlar. 18 okuwçy tans gurnagyna, 16 okuwçy bolsa aýdym gurnagyna gatnaşýar. Näçe okuwçy bu gurnaklaryň ikisine-de gatnaşýar?

48. Mülkdar 100 maşgalanyň 30-y sogan, 28-i käşir, 42-si hyýar, 8-i sogan we käşir, 10-usy käşir we hyýar, 5-isi sogan we hyýar, 3-üsi bolsa sogan, käşir we hyýar ýetişdirýärler. Beýleki maşgalalar bolsa maldarçylyk bilen meşgul bolýarlar. Näçe maşgala maldarçylyk bilen meşgullanýar? Näçe maşgala diňe sogan, näçe maşgala diňe käşir, näçe maşgala bolsa diňe hyýar ýetişdirýär?

49. Mekdebiň dokmaçylyk gurnagynda gyzlar haly ýa-da tara dokaýarlar. Olaryň 90%-i haly, 80%-i bolsa tara dokaýarlar. Gyzlaryň näçe göterimi ikisini hem dokaýarlar?

50. Bir maşgalanyň 7 agzasy almany, 6 agzasy üzümi, 5 agzasy nary, 4 agzasy almany we üzümi, 3 agzasy almany we nary, 2 agzasy üzümi we nary, 1 agzasy almany, üzümi we nary halaýar. Bu maşgalanyň näçe agzasy bar?

51. Kakasy ikinji synpda okaýan ogly Aman bilen 4-nji synpda okaýan ogly Weliniň arasynda mesele çözmek ýaryşyny geçirdi. Weli ýaryşyň şerti boýunça çözen birinji meselesi uçin 20 teňňe, ikinji meselesi üçin 40 teňňe, üçünji meselesi üçin 60 teňňe we ş.m. baýrak, Aman bolsa çözen ilkinji meselesi üçin 40 teň-

ňe, ikinji meselesi üçin 60 teňňe, üçünji meselesi üçin 80 teňňe we ş.m. baýrak almaly. Ýaryş tamamlananda Weliniň Amandan 1 meseläni köp çözenligi belli boldy. Doganlaryň haýsysy köp pul gazanypdyr?

52. Meret öýlerinden mekdebe çenli 30 minut, onuň dogany Çary bolsa 40 minut ýoreýär. Çary öýlerinden Meretden 5 minut ir çykdy. Näçe minutdan soň Meret Çarynyň yzyndan ýeter?

53. Suwdan doldurylan gabyň massasy 5 *kg*, ýarysyna çenli suwdan doldurylan şol gabyň massasy bolsa, 3 *kg* 250 *g*. Bu gaba näçe suw ýerleşer?

54. Arasyndaky uzaklyk 1 *km* bolan haýwanat bagyndan gämi duralgasyna çenli pili alyp gaýdypdyrlar. Şol bir wagtda duralgadan pile tarap it ylgap gaýdypdyr. Ol piliň ýanyna gelip üýrüpdirde yzyna dolanyp duralga barypdyr. Soňra şeýle hereketini pil duralga gelýänçä gaýtalapdyr.

It pilden 10 esse çalt hereket edýän bolsa, ol näçe kilometr ýol geçipdir?

55. Iki sany gulp we olaryň iki açary bar. Açaryň gulpy açýandygyny bir gulpda barlapdyrlar. Bir gezek geçirilen barlag olaryň haýsy gulpa degişlidigini anyklamak üçin ýeterlikmi?

56. Üç sandygyň üç açary bar. Her sandygyň açaryny anyklamak üçin 3 gezek barlap görmek ýeterlikmi?

57. Gözel jaýyň 2-nji gatynda ýaşaýar. Durdy hem şol girelgede ýaşaýar, ýöne ol öýüne barmak üçin Gözelden 2 esse köp basgançak geçmeli bolýar. Girelgä we 1-nji gata çenli basgançak ýok. Durdy jaýyň näçinji gatynda ýaşaýar?

58. 3 minutlyk we 7 minutlyk çäge bilen işleýän sagatlar bar. Ýumurtgany gaýnap duran suwda göni 4 minut gaýnadyp almaly. Bar bolan sagatlaryň kömegi bilen şu işi ýerine ýetirip bolarmy?

59. Agajyň üstünde 40 serçe oturan eken. Geçip barýan awçy olaryň 6-syny atypdyr. Agajyň üstünde näçe serçe galdy?

60. 8 sany birmeňzeş halkanyň biriniň agramy beýlekileriňkiden ýeňil. Okaraly terezide iki gezek çekmek arkaly ol halkany tapmaly.

61. 77 sany birmeňzeş halkanyň biri beýlekilerinden ýeňil. Çeküw daşsyz okaraly terezini kömegi bilen dört gezekden köp çekmezlik şerti bilen ol ýeňil halkany tapmaly.

62. 8 sany birmeňzeş gyzyl halkanyň biri galp bolup, onuň agramy beýlekilerinňkiden tapawutlanýar. Onuň agramynyň beýleki halkalaryňky bilen deňeşdirilende agyrlygy ýa-da ýeňilligi belli däl. Çeküw daşsyz okaraly terezini kömegi bilen üç gezekden köp çekmezlik şerti bilen ol halkany tapmaly.

63. Daş görnüşleri meňzeş halkalaryň 10 üýşmegi bolup, her üýşmekde bolsa 10 halka bar. 9 sany üýşmekdäki halkalaryň her biriniň massasy 9 *g*, 1 sany üýşmekdäki halkalaryň massasy bolsa 10 *g*. Gramlara çenli takyk çekýän terezini kömegi bilen 9 *g* halkaly üýşmegi tapmaly.

64. Daş görnüşi boýunça biri-birine meňzeş bolan 75 sany mis halkanyň biriniň agramy beýlekileriňkiden tapawutlanýar. Okaraly terezide iki gezek çekmek arkaly ol halkanyň agramynyň beýlekileriňkiden agyrdygyny ýa-da ýeňildigini kesgitlemeli.

65. 4 sany birmeňzeş halkanyň biriniň agramy beýlekileriňkiden tapawutly. Okaraly terezide iki gezek çekmek arkaly ol halkany tapmaly.

66. Köp gatly jaýda 1-nji orta mekdebiň 13 sany okuwçysy ýaşaýardy. Bu mekdepde 12 sany synp bar. Bu jaýda ýaşaýan okuwçylaryň iň bolmanda ikisiniň bir synpda okaýandygyny subut ediň.

67. Mekdepde 370 okuwçy okaýar. Bu mekdebiň okuwçylarynyň arasynda iň bolmanda iki okuwçynyň bir günde doglan günlerini belleýändiklerini subut ediň.

68. Sebetde almalaryň iki görnüşi bar. Iki sany bir görnüşli almany almak üçin azyndan näçe sany alma çykarmaly?

69. Gutuda 4 gyzyl we 10 gara reňkli çöpjagazlar bar. Bu gutudan seretmän, birnäçe çöpjagazlary aldylar: 1) iki sany gyzyl; 2) üç sany gara çöpjagazlary almak üçin gutudan azyndan näçe çöpjagazy almaly?

70. Gutuda 100 sany gyzyl, ýaşyl, sary we gök reňkli baýdajyklar bar. Bir reňkli baýdajyklaryň sany 25. Bir reňkdäki baýdaklaryň iň bolmanda 10 sanysyny almak üçin reňkini görmezden, gutudan iň azyndan näçe baýdak çykarmaly?

71. Gutuda 25 sany 4 dürli görnüşli şarjagazlar bar. Olaryň arasynda 7 sany birmeňzeş reňklisi barmy?

Çözülişler we jogaplar

1. 2 şem galar. Sebäbi öçürilmedik şemler ýanyp gutarar.

2. Birinji minutda 1-nji metri, ikinji minutda 2-nji metri, 3-nji minutda 3-nji metri, 4-nji minutda 4-nji metri kesmek bolýar we 5-nji metr galýar. Şunlukda, agajy böleklemek üçin 4 minut gerek.

3. Üç.

4. Bir adam almany gap bilen bilelikde almaly.

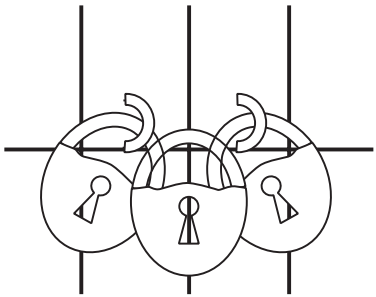
5. Amanda 28, Meretde bolsa 20 gül bar.

6. Amanyň bir özi hem şol üç aşygy tapardy.

7. Dört ýumurtganam dört minutlap gaýnatmaly.

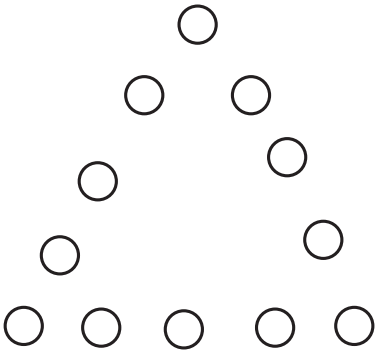
8. Oglanjyk bu arzuwyna ýetip bilmez. Sebäbi ol kiçi almany satyja berende ol yzyna öz 10 teňňesini gaýtaryp alar. 20 teňňelik almany almak üçin oňa ýene 10 teňňe gerek bolar.

9.



10. Merediň oturgyçlary ýerleşdirişi.

Amanyň oturgyçlary ýerleşdirişi.

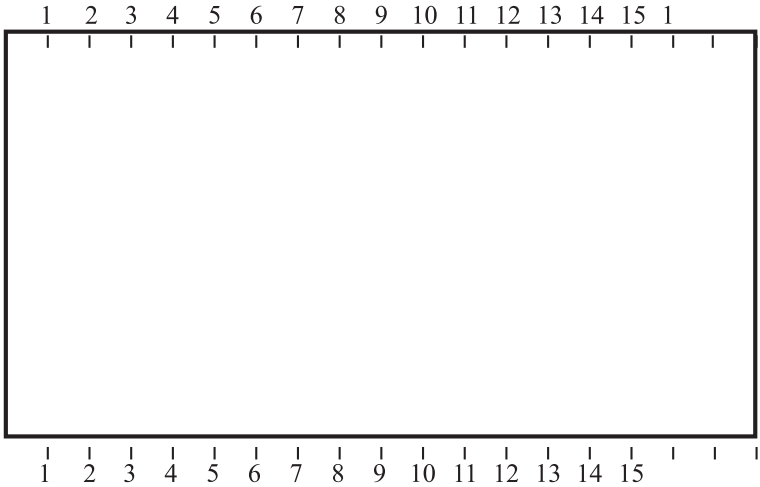


11. Arça agajyndan 1 *m* uzaklykda duşuşarlar. Sebäbi çekirtgäniň tizligi tomzagyňkydan 20 esse uly.

12. Begenç Amanlara ugramazdan öň öz diwar sagadynyň haýsy wagty görkezýänligini görüp gidenligi üçin, ol yzyna gelende näçe wagtlap öýde bolmandygyny kesgitläp bildi. Bu wagtdan Amanlarda bolan wagtyny aýryp, Begenç ýola näçe wagt sarp edenligini kesgitledi. Amanlara barmak we olardan gelmek üçin deň wagt sarp edenligini göz öňünde tutup, ol bu wagty ikä bölüp we ony Amanyň sagadynyň görkezýän wagtynyň üstüne goşup öz sagadynda dogry wagty goýmagy başardy.

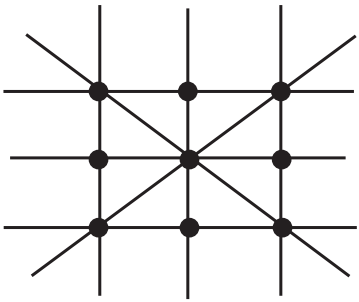
13. Göräýmäge meseläniň çözülişi örän ýönekeý ýaly. Eger Nýu-Ýorkdan Gawra her gün bir parohod ugraýan bolsa, onda Nýu-Ýorka barýan parohod 7 sany garşysyndan gelýän parohoda duşmaly ýaly bolup görünyär. Emma bu ýalňyş pikir. Sebäbi Nýu-Ýorka barýan parohod öň, maý aýynyň 7-sine, 6-syna, 5-ine we ş.m. ýola düşen parohodlar bilen hem duşuşar. Şeýlelikde, bu parohod 7 däl-de, 14 parohod bilen duşuşar. Meseläniň çözülişi çyzgyda has aýdyň görünýär.

Bu mesele ylmy kongresleriň birinde fransuz matematigi Eduard Lýuka tarapyndan hödürlenipdir. Bu kongrese atly matematikleriň bir toparynyň gatnaşýandygyna garamazdan, mesele olarda uly gyzyklanma döredipdir.

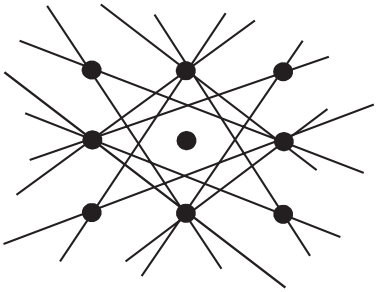

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

27. Nirede duşuşjakdyklaryna seretmezden, maşynlar bir-birinden 90+60=150 kilometr daşlykda bolarlar.

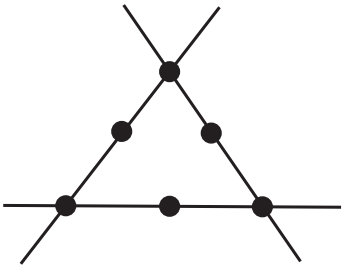
28. Üç nokadyň üstünden 8 (*a surat*), iki nokadyň üstünden bolsa 12 (*b surat*) göni çyzyk geçýär. 6 nokat üçburçluk görnüşinde ýerleşdirilse (*ç surat*), üç göni çyzygyň her biriniň üstünde üç nokat bolar.



a) surat



b) surat

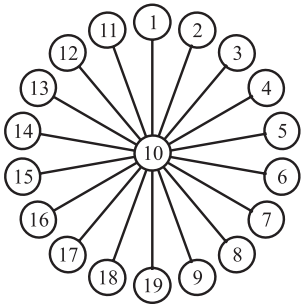


ç) surat

29. Amanyň doganlary ekiz. Olar häzir 6 ýaşynda. Sebäbi

$(6-2)\cdot 2=6+2$ we $(6-3)\cdot 3=6+3$.

30. 1+19=20, 2+18=20, 3+17=20 we ş.m. bolýanlygy üçin bu goşulyjylaryň her birini garşylykly tegelegiň içine ýazyp, ortaky tegelekde bolsa 10-y ýazýarys. Meseläniň doly çözülişi suratda görkezilendir.



31. Köplenç, ýük maşyny Aşgabatdan uzakda boljak ýaly bolup görünýär. Emma olar duşuşanda maşynlaryň ikisi hem Aşgabatdan deň daşlykda bolar.

32. $3 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 80$; $3 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 70$.

33. Spidometrdäki 10 müňlük sifriň 2 sagatda üýtgäp bilmejekdigi düşnükli. Diýmek, spidometrdäki birinji we iň soňky sifr 1 bolmaly. Müňlük sifr ýük maşyny 49 kilometr geçen badyna üýtgäýmeli. Diýmek, ikinji sifr we iň soňkynyň öň ýanyndaky sifr 6 bolmaly. Ýüzlük sifr 0 ýa-da 1 bolup biler. Eger ol 1 bolsa, maşyn 2 sagatda 16161 – 15951= 310 *km*, ýagny sagatda 155 *km* geçmeli. Emma ýük maşyny bu tizlikde gidip bilmez.

Diýmek, ýük maşyny 2 sagatda 16061–15951=110 *km* geçip, sagatda 110: 2 = 55 *km/sag* tizlik bilen hereket edipdir.

34. Begenç tudanalary özüçe deň üç bölege bölüp, özi gapdala çekildi we oglanlara şeýle diýdi: «Maňa bu üýşmekleriň islendigini teklip etseňiz alaryn. Indi ilki Mergen soňra bolsa Geldi iň kiçi üýşmegi görkezsin. Eger olaryň kiçi diýip görkezen üýşmekleri gabat gelse, ony men alýaryn. Galan iki üýşmegi Geldi bilen Mergen meseläniň şertinde getirilen usul boýunça öza-

ra bölüşýärler. Eger Geldi Mergeniň kiçi diýip görkezen üýşmeginde üçden birden az bolmadyk tudana bar diýip hasap etse, onda ol bu üýşmegi ozüne alsyn. Geldi bolsa galan iki üýşmegiň uly hasaplanylýanyny alsyn. Galan üýşmegi bolsa men alaryn».

35. Wesýetiň düzülişi ýalňyş. Sebäbi wesýet boýunça $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}$ bolýanlygy üçin emläginiň barysy däl-de, onuň diňe $\frac{57}{60}$ bölegini paýlamak göz öňünde tutulypdyr. 59 sany sygyr goňşylarynyň bir sygryny üstüne goşmak bilen 60 bölege bölünipdir. Onuň 57 bölegi, ýagny 57 sany sygyr doganlara paýlanylyp berlipdir, 3 bölegi, ýagny 3 sygyr bolsa goňşylaryna galypdyr.

36. Öňki meseledäki ýaly ýalňyşlyk wesýetiň düzülişinde, sebäbi böleklerin sany 1-e deň däl-de,

1-den kiçi bolýar: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9+6+2}{18}=\frac{17}{18}$.

37. Goý, Aman Çary bilen akda Meret bolsa Çary bilen garada oýnan bolsun. Çary Amanyň göçümine garaşýar we göçümi Merediň garşysyna edýär. Merediň jogabyna garaşýar we göçümi Amanyň garşysyna edýär we ş.m. Netijede, eger Aman aklarda Çaryny utsa, öz gezeginde Çary hem aklarda Meredi utýar, tersine, Meret garalarda Çaryny utsa, öz gezeginde Çary hem garalarda Amany utýar. Olaryň özara deň oýnamaklary hem edil şuňa meňzeş bolup geçýär.

38. Birinji garynja çalt çykar. Sebäbi ikinji garynja ýerden sütüniň depesine çykýança, birinji garynja ýere düşüp we sütüniň depesine çykyp ýetişýär.

39. Çarynyň puly ýok.

40. Akylly wezir şeýle pikir ýöredipdir: «Eger meniň kellämde gara telpek bar bolan bolsa, onda beýleki wezir derrew öz kellesinde ak telpegiň bardygyny bilerdi. Ol dymýar. Diýmek, meniň kellämde ak telpek bar».

41. Ol okuwçy şeýle pikir ýöredýär: «Meniň ýoldaşlarymyň ikisiniň hem kellelerinde ak telpek bar. Eger meniň kellämde gara telpek bolan bolsa, onda meniň ýoldaşlarymyň biri ýeňillik bilen öz kellesinde ak telpegiň barlygyny (ýokardaky meseläniň çözülişi boýunça) kesgitläp bilerdi. Emma olaryň ikisi hem dymýar. Diýmek, meniň kellämde ak telpek bar».

42. Ýolagçy gabat gelen adamdan: «Sizem şu obada ýaşaýarsyňyzmy?» diýip soraýar. Bu soraga berlen jogap boýunça bolsa ol gelen obasynyň haýsy obadygyny kesgitleýär. Eger ol adam: «Hawa» diýip jogap berse, onda oba dogruçyllaryň obasy, ýagny *A* obadyr. Sebäbi ol adam şol obaly bolsa, onda ol dogruçyl bolany üçin «Hawa» diýip jogap berer. Eger *B* obaly bolsa, onda ol ýalan sözläp: «Hawa» diýip jogap berer.

Eger ol adam: «Ýok» diýip jogap berse, onda oba ýalançylaryň obasy, ýagny *B* obadyr. Sebäbi bu adam *A* obaly bolsa, onda ol dogruçyl bolany üçin «Ýok» diýip jogap berer. Eger ýalançy, ýagny *B* obaly bolsa, onda ýalan sözläp «Ýok» diýip jogap berer.

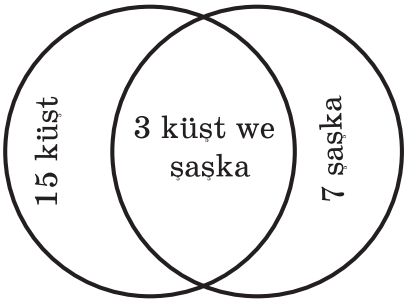
43. Meret ýoluň ikinji ýarymyny pyýadalap geçýänçä, Aman tigirli tutuş ýoly geçip biler. Diýmek, Aman şähere çalt barar.

44. Birinji syýahatçy 5 *km/sag* tizlik bilen ikinji syýahatça garanyňda köp wagtlap ýörär we köp ýol geçer. Diýmek, birinji syýahatçy *B* çalt geler.

45. Merediň oglunyň ady Aman. Meret 21 balyk, Amanyň we Sähediň her haýsy bolsa 7 balyk tutdular.

46. Ilki bilen diňe küşt oýnap bilýan okuwçylaryň sanyny kesgitläliň. Onuň üçin 18 sany küşt oýnap bilýänleriň sanyndan 3 sany küşt we şaşka oýnap bilýänleriň sanyny aýyrýarys: 18–3=15. Edil şuňa meňzeş diňe şaşka oýnap bilýänleriň sanyny kesgitleýäris: 10–3=7. Diýmek, 15+7=22 okuwçy diňe bir oýny we 3 okuwçy bolsa iki oýny hem oýnap bilýärler. Bu ýerden okuwçylaryň 22+3=25 sanysynyň bu oýunlaryň ikisini ýa-da diňe birini oýnap bilýändiklerini anyklaýarys. Diýmek, 31–25=6 okuwçy bu oýunlaryň ikisini-de oýnap bilmeýär.

Meseläniň çözülişini aşakdaky ýaly şekillendirmek oňa düşünmegi ýeňilleşdirýär.



Bu şekilden görnüşi ýaly, 15+3+7=25 okuwçy oýunlaryň birini ýa-da ikisini oýnaýar.

47. 30–6=24 okuwçy ýa tans gurnagyna, ýa aýdym gurnagyna ýa-da bu gurnaklaryň ikisine-de gatnaşýar. 24–18=6 okuwçy tans gurnagyna gatnaşmaýar. Diýmek, bu 6 okuwçy diňe bir gurnaga, ýagny diňe aýdym gurnagyna gatnaşýar. Edil şuňa meňzeşlikde 24–16=8 okuwçynyň aýdym gurnagyna gatnaşman, diňe bir

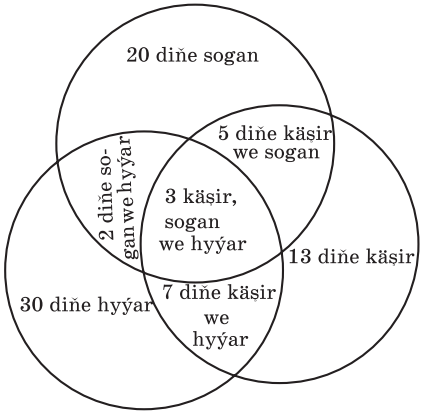
tans gurnagyna gatnaşýandygyny tapýarys. Diýmek, 6+8=14 okuwçy diňe bir gurnaga, 24–14=10 okuwçy bolsa iki gurnagada gatnaşýar.

48. Ilki bilen diňe sogan we käşir ýetişdirýän maşgalalaryň sanyny kesgitläliň. Onuň üçin sogan we käşir ýetişdirýän 8 maşgalanyň sanyndan sogan, käşir we hyýar ýetişdirýän 3 maşgalanyň sanyny aýyrýarys we 5 maşgalanyň diňe sogan we käşir ýetişdirmek bilen meşgul bolýanlygyny anyklaýarys. Indi diňe käşir we hyýar ýetişdirýän maşgalalaryň sanyny kesgitläliň. Onuň üçin käşir we hyýar ýetişdirýän 10 maşgalanyň sanyndan sogan, käşir we hyýar ýetişdirýän 3 maşgalanyň sanyny aýyrýarys we 7 maşgalanyň diňe käşir we hyýar ýetişdirýänligini kesgitleýäris. Edil şuňa meňzeş 5 – 3 = 2 maşgalanyň diňe sogan we hyýar ýetişdirýänligini anyklaýarys. Diňe sogan ýetişdirýän maşgalalaryň sanyny tapmak üçin sogan ýetişdirýän 30 maşgalanyň sanyndan diňe sogan we käşir ýetişdirýän 5 maşgalanyň sanyny, diňe sogan we hyýar ýetişdirýän 2 maşgalanyň sanyny we bu ekinleriň üçüsini hem ýetişdirýän 3 maşgalanyň sanyny aýyrýarys:

30–5–2–3=20. Diýmek, 20 maşgala diňe sogan ýetişdirmek bilen meşgullanýar. Edil şuňa meňzeş 28–5–7–3=13 maşgalanyň diňe käşir ýetişdirýänligini, 42–7–2–3=30 maşgalanyň diňe hyýar ýetişdirýänligini anyklaýarys. Diňe bir ekin, diňe iki ekin we üç ekin ekýän maşgalalaryň sanynyň 20+13+30+5+7+2+3=80-e deňdigini anyklaýarys. Diýmek, 80 maşgala bu ekinleriň ýa birini, ýa ikisini ýa-da üçüsini ýetişdirýär. Onda 100–80=20 maşgala bolsa maldarçylyk bilen meşgul bolýar. Diýmek, 20 maşgala diňe maldarçylyk bilen, 20 maşgala diňe sogan, 13 maşgala diňe käşir, 30 maşgala diňe hyýar ýetişdirmek bilen meşgullanýar.

Eger bu meseläniň çözülişi suratda şekillendirilse, okuwçylar üçin has-da düşnükli bolýar.

Suratdan görnüşi ýaly, 20+13+30+5+2+7+3=80 maşgala ady agzalan ekinleriň ýa 3-üsini, ýa-da 2-sini ýa-da birini ekip ýetişdirýärler. Bu ýerden 100–80=20 maşgalanyň bu ekinleri ekmeýänligi we maldarçylyk bilen meşgul bolýanlygy gelip çykýar.



49. Gyzlaryň 100%–90%=10% haly, 100%–80%= =20% bolsa tara dokap bilmeýärler. Diýmek, gyzlaryň 10%-i diňe tara, 20%-i bolsa diňe haly dokap bilýärler. Onda gyzlaryň 10%+20%=30% diňe bir önümi, 100%–30%=70%-i bolsa iki önümi hem dokap bilýärler.

50. Bu maşgalada diňe almany we üzümi 4–1=3 adam, diňe almany we nary 3–1=2 adam, diňe üzümi we nary 2–1=1 adam halaýar. Diňe almany 7–3–2–1=1 adam, diňe üzümi 6–3–1–1=1 adam we diňe nary 5–2– –1–1=1 adam halaýar. Diýmek, bu maşgalada 1+1+1=3 adam diňe bir miwäni, 3+2+1=6 adam iki miwäni we 1 adam üç miwäni halaýar. Onda bu maşgalanyň 3+6+1=10 agzasy bar.

51. Weli 20 teňňe manat köp pul gazanypdyr. Weliniň 2-nji, 3-nji we ş.m. çözen meseleleri üçin aljak puly Amanyň 1-nji, 2-nji we ş.m. çözen meseleleri üçin aljak puluna deň bolar. Weli bir meseläni köp çözeni üçin onuň birinji mesele üçin alan 20 teňňesi Amanyň alan pullaryndan köp bolar.

52. Öýlerinden mekdebe çenli ýoluň ýarysyny geçenlerinde, ýagny 15 minutdan Meret Çarynyň yzyndan ýeter.

53. Gabyň ýarysyna 5 *kg* – 3 *kg* 250 *g* = 1 *kg* 750 *g* suw sygar. Onda doly gaba 1 *kg* 750 *g* · 2 = 3 *kg* 500 *g* suw sygar.

54. Itjagaz 10 *km* ýoly geçipdir. It pilden 10 esse çalt hereket edip, bir ýerde-de durmandyr. Diýmek, pil 1 *km* geçen bolsa, itjagaz 10 km geçer.

55. Hawa, ýeterlik. Birinji açary birinji gulpda barlamaly. Eger ol gulpy açsa, onda ikinji gulp ikinji açaryňkydyr. Eger birinji açar birinji gulpy açmasa, onda ol açar ikinji gulpuňky. Barlanmadyk açar bolsa birinji gulpuňky.

56. Hawa, ýeterlik. Birinji açary alyp birinji sandykda barlaýarys. Eger ol açmasa, onda bu açary ikinji sandykda barlaýarys. Eger bu açar ikinji sandygy hem açmasa, onda ol üçünji sandygyňky. Ikinji açary alyp birinji sandykda barlaýarys. Eger ol açmasa, onda ol ikinji sandygyň açary. Barlanmadyk üçünji açar bolsa birinji sandygyňky. Beýleki hallar hem edil şuňa meňzeş barlanylýar.

57. Durdy 3-nji gatda ýaşaýar.

58. Bolýar. Iki sagady-da bir wagtda işledip başlamaly. 3 minutlyk sagatda çäge gutaran dessine ýumurtgany gaýnaga salmaly.

59. Agajyň üstünde serçe galmaýar, 6-sy ýere düşýär we galany uçup gidýar.

60. Eger halkalaryň sany 3 bolan bolsa, onda biz halkalaryň ikisini terezide goýup, bir çeküwde ýeňil halkany anyklap bilerdik. Eger terezi deňagramlylyk ýagdaýynda bolsa, onda çekilmedik halka ýeňil. Eger tereziniň bir okarasyndaky halka ýeňil bolsa, onda şol ýeňil halkadyr. Biz 8 halkany 3, 3 we 2 böleklere bölüp, 3 we 3 halkalary terezide çekýäris. Eger olar deň gelse, ýeňil halka çekilmedik iki halkanyň biri. Bir çeküwde onuň ýeňilini anyklamak mümkin. Eger tereziniň bir tarapy ýeňil gelse, onda ýeňil halka şol 3 halkanyň biri. Ol 3 halkanyň ýeňilini bir çeküwde kesgitläp bileris.

61. 77 halkany 27, 27, 23 edip üç üýşmege bölýäris. Birinji sapar 27 we 27 halkalaryň hersini tereziniň bir okarasyna salyp çekýäris. Netijede, birinji çeküwde ýeňil halkanyň haýsy üýşmekdedigini tapýarys (eger okaralaryň biri ýeňil bolsa, onda ýeňil halka şol okarada; eger okaralaryň agramlary deň bolsa, onda ýeňil halka 23 halkaly üýşmekde).

a) eger ýeňil halka 27 halkaly üýşmekde bolsa, onda 9, 9, 9 edip üç üýşmege bölýäris we ikinji çeküwde ýeňil halkanyň haýsysy 9 halkaly üýşmekdedigini tapýarys. Soňra ýeňil halkaly üýşmegi 3, 3, 3 edip üç üýşmege bölýäris we üçünji çeküwde ýeňil halkanyň haýsysy 3 halkaly üýşmekdedigini tapýarys. Dördünji çeküwde bu üç halkanyň ikisini alyp, olaryň her birini tereziniň bir okarasyna salýarys we ýeňil halkany tapýarys.

b) eger ýeňil halka 23 halkaly üýşmekde bolsa, onda ony 9, 9, 5 halkaly üýşmeklere bölýäris. Ikinji çeküwde 9 halkaly üýşmekleriň her birini tereziniň bir okarasyna salyp çekýäris. Netijede, bu üýşmekleriň haýsysynda ýeňil halkanyň barlygyny kesgitleýäris. Goý, ýeňil halka 5 halkaly üýşmekde bolsun (ýeňil halka 9 halkaly üýşmekde bolsa, onda ýeňil halkany tapmagyň ýoly *a*) bölekde görkezildi). Ony 2, 2, 1 üýşmeklere bölýäris. 2 halkaly üýşmekleriň hersini tereziniň bir okarasyna salyp, üçünji çeküwde ýeňil halkanyň haýsy üýşmekdedigini kesgitleýäris. Ol 2 halkaly üýşmekde bolsa, onda dördünji çeküwde ýeňil halkany tapýarys.

62. Halkalary 1, 2, 3, ..., 8 sanlar bilen belgileýäris. 1-nji çeküwde tereziniň bir okarasyna halkalaryň 1, 2 jübütini, beýleki okarasyna bolsa 3, 4 jübütini salyp çekýäris. Iki ýagdaýyň bolmagy mümkin: **1)** deňagramlylyk ýok. Diýmek, galp halka 1, 2, 3, 4 halkalaryň içinde bolup, 5, 6, 7, 8 halkalar hakyky. Ikinji çeküwde 1, 2 halkalary bir okara 5, 6 halkany bolsa beýleki okara salyp çekýäris. Eger deňagramlylyk alynsa, onda 1 we 2 hakyky halkalar. Eger deňagramlylyk alynmasa, onda gözlenilýän galp halka 1 we 2 halkalaryň biri. Deňagramlylyk alynsa, onda galp halka 3 we 4 halkalaryň biri. Üçünji çeküwde galp halkalaryň (1 we 2 ýa-da 3 we 4 halkalar) jübütiniň birini, meselem, 1 halkany tereziniň bir okarasyna hakyky halkalaryň birinem, meselem, 8 halkany beýleki okarasyna salyp çekýäris. Eger deňagramlylyk alynsa, onda 2 galp halka. Eger deňagramlylyk alynmasa, onda 1 galp halka. **2)** deňagramlylyk bar. Diýmek, 1, 2, 3, 4 halkalar hakyky we galp halka 5,6,7,8 halkalaryň biri. 2-nji çeküwde tereziniň bir okarasyna hakyky 1,2 beýleki okarasyna bolsa şübheli 5,6 halkalary salyp

çekýäris. Soňra 1) bölümdäki ýaly derňewleri geçirýäris.

63. Üýşmekleri 1,2,3, ...,10 sanlar bilen belgileýäris. 1-nji üýşmekden 1, 2-nji üýşmekden 2, we ş.m. 10-njy üýşmekden 10 halkany alyp, jemi 1+2+3+...+10=55 halkany terezinin bir okarasyna salýarys. Terezinin beýleki okarasyna 550*g* salýarys. Deňagramlylygyň bolmajagy düşnüklidir.

Sebäbi bu 55 halkanyň arasynda iň bolmanda bir halkanyň massasy 10*g* däl-de, 9*g*. Indi 1*g* ölçeg daşjagazlaryny terezinin halkaly tarapyna bir-birden deňagramlylyk alynýança goýýarys. Eger 5 *g* goýlanda deňagramlylyk alynýan bolsa, onda 5-nji üýşmekdäki halkalaryň massalary 9*g*.

64. Halkalary 25-den üç üýşmek edip goýýarys we olaryň her birini *A*, *B* we *Ç* bilen belgileýäris. Ilkinji nobatda *A* üýşmegiň agramyny *B* üýşmegiň agramy bilen deňeşdirýäris. 1) eger *A* we *B* agramlary deň bolsa, onda bu üýşmeklerdäki halkalaryň arasynda agramy tapawutly halka ýok. Diýmek, agramy tapawutly halka *Ç* üýşmekde. Ikinji gezekde *A* üýşmegiň (ýa-da *B* üýşmegiň) agramyny *Ç* üýşmegiň agramy bilen deňeşdirýäris. Terezinin ýagdaýy boýunça halkanyň agramynyň ýeňildigini ýa-da agyrdygyny kesgitleýäris.

2) eger *A* we *B* agramlary deň bolmasa, onda agyr üýşmek bilen *Ç* üýşmegi deňeşdirýäris. Eger olar deň bolsa, onda halka beýlekilerden ýeňil. Eger *Ç* agyr üýşmekden ýeňil bolsa, onda halka beýlekilerden agyr.

65. Halkalary *A, B, Ç, D* bilen belgileýäris. *A* we *B* halkalaryň her birini terezinin bir okarasyna goýýarys. Iki ýagdaýyň bolmagy mümkin.

1. Deňagramlylyk alynýar. Diýmek, gözlenilýän halka *Ç* ýa-da *D*. *B* bilen *Ç* halkany deňeşdirýäris. Eger deňagramlylyk bozulsa, onda *Ç* gözlenilýän halka. Eger deňagramlylyk saklanylsa, onda *D* gözlenilýän halka.

2. Deňagramlylyk alynmaýar. Diýmek, gözlenilýän halka *A* ýa-da *B*. *Ç* we *D* halkalaryň arasynda agramy tapawutly halka ýok. *A* we *Ç* halkalaryň agramlaryny deňeşdirýäris. Eger deňagramlylyk alynsa, onda gözlenilýän halka *B*. Eger deňagramlylyk alynmasa, onda gözlenilýän halka B.

66. Eger her synpda bir okuwçy okaýan bolsa, onda okuwçylaryň sany 12 bolardy. Emma okuwçylaryň sany 13. Biz gapma-garşylyga geldik. Bu gapma-garşylyk bolsa, iň bolmanda iki okuwçynyň bir synpda okaýandygyny görkezýär.

67. Eger her bir okuwçy ýylyň bir gününde doglan gününi belleýän bolsa hem olaryň sany 366 bolardy. Emma olaryň sany 370. Biz gapma-garşylyga geldik. Bu gapma-garşylyk bolsa iň bolmanda iki okuwçynyň bir günde doglan günlerini belleýändiklerini görkezýär.

68. Eger sebetden 3 alma çykarylsa, onda olaryň iň bolmanda iki sanysy bir görnüşli alma bolar.

69. 1) eger 12 sany çöpjagaz alynsa, onda olaryň azyndan 2 sanysy gyzyl bolar; 2) eger 7 sany çöpjagaz alynsa, onda olaryň azyndan 3 sanysy gara bolar.

70. 37 baýdak.

71. Hawa, hemişe 7-den az bolmadyk bir reňkli şar tapylar. Sebäbi gutuda 4 hili reňkli şarlaryň 25-isi bar. Eger ol şarlaryň her bir reňklisinden 6 sanysy bolsa, onda şarlaryň sany $6 \cdot 4 = 24$ bolardy. Diýmek, iň bolmanda 1 reňkli şardan 7 sanysy bar.

II BAP

HASAPLAMAGA, DEŇLEME DÜZMÄGE WE GÖTERIMLERE DEGIŞLI MESELELER

1. Alta galyndysyz bölünýän sany ýatdan belläň. Ol sanyň ýarysyny; ol sanyň üçden birini; ol sanyň altydan birini tapyň. Alnan sanlary goşuň. Siz ýatdan bellän sanyňyzy aldyňyz. Sanlaryň jemini hasaplaň?

2. Amana alma, armyt, üzüm almak üçin 3 manat 60 teňňe berdiler. Aman bazardan gelende uly dogany Maýsa näçe pulunyň galanyny sorady. Aman puluň $\frac{1}{2}$–ine alma, $\frac{1}{3}$–ine armyt we $\frac{1}{6}$ –ine üzüm satyn alnandygyny aýtdy. Mende näçe puluň galanyny özüň bil diýip jogap berdi. Maýsa: «Sende pul galmandyr» diýdi. Ol muny nädip bildi?

3. Maksat bir käse gara çaýyň $\frac{1}{6}$ bölegini içdi we käsäni süýt bilen doldurdy. Soňra ýene-de käsäniň $\frac{1}{3}$ bölegini içdi we ýene-de ony süýt bilen doldurdy. Soňra käsäniň ýarysyny içdi we ony ýene süýt bilen doldurdy. Ondan soňra Maksat käsäni tutuşlygyna içip boşatdy. Maksat çaýy köp içdimi ýa-da süýdi?

4. Otluda barýan ýolagçy ýoluň ýarysyny geçenden soň irkildi. Ol oýananda irkilip geçen ýolunyň ýarysy

ýaly ýoly geçmelidigi belli boldy. Ol ýoluň näçe bölegini uklap geçiripdir?

5. Aman 2 depder, 1 ruçka üçin 90 teňňe töledi. Eger ol 2 ruçka 1 depder alan bolsa, 1 manat 20 teňňe tölemeli bolardy. Ruçkanyň we depderiň bahasyny kesgitläň.

6. Üsti dikuçarly gämi deňiz menzilinden çykyp, 960 *km* daşlykda ýerleşýän ada tarap 60 *km/sag* tizlik bilen ýüzüp ugrady.

Bellibir wagtdan soň dikuçar gäminiň üstünden barylmaly ada tarap 200 *km/sag* tizlik bilen uçup ugrady. Eger dikuçaryň sürüjisine ada barmak üçin 9 sagat gerek bolan bolsa, dikuçar näçe wagtlap uçupdyr.

7. Iki obadan birwagtda iki tigirli çykyp bir-biriniň garşysyna ugradylar. Olaryň birinjisiniň tizligi 10 *km/sag*, ikinjisiniňki bolsa 15 *km/sag*. Olar duşuşmazyndan 2 sagat öň olaryň arasyndaky uzaklyk näçä deň bolar?

8. Iki tigirli biri-biriniň garşysyna barýardylar. Olaryň biriniň tizligi 12 *km/sag*, beýlekisinin tizligi bolsa birinjisiniňkiden 3 *km/sag* köpdi. Olar duşuşykdan 2 sagat geçenden soň biri-birinden näçe daşlykda bolarlar.

9. Iki dogan öýlerinden 4 *km* daşlykdaky demir ýol menziline barmak isleýärdiler. Otlynyň ugramagyna az wagt galypdy. Eger olar tigirli gitseler otla ýetişip biljekdiler. Emma doganlaryň ulusynyň tigri ýel goýberen eken. Eger olar pyýada gitseler, onda otly ugranyndan 10 minut soň menzile barjaklar. Emma olar doganlaryň kiçisiniň tigrinden peýdalanyp, bir wagtda otly ugramazdan 10 minut öň demir ýol menziline bardylar. Eger tigirliniň tizliginiň pyýadanyň tizliginden 3 esse

uludygy we tigri iki bölüp münüp bolmaýanlygy belli bolsa, doganlar bu işi nähili amal etdiler? Pyýadanyň we tigirliniň tizlikleri näçe?

10. Üç ýolagçy aralaryndaky uzaklyk 30 *km* bolan çopan goşundan oba bir wagtda ugradylar. Olaryň bir aty bar. Ata bir wagtda iki adam münüp bilýär. Atyň tizligi 15 *km/sag*, pyýadanyň tizligi bolsa 5 *km/sag*. Olaryň üçüsi bir wagtda oba geler ýaly, atdan nähili peýdalanmaly?

11. Syýahatçy suwsuz çölüň içi bilen alty günlük ýöriş geçirmekçi bolýar. Syýahatçynyň özi we onuň ýüküni göterişmäge kömekleşýän ýükçi bir adama gerek bolan dört günlük suw we iýmit ätiýaçlyklaryny göterip bilýärler. Bu ýörişi geçirmek üçin syýahatçy öz ýany bilen näçe ýükçini alyp gitmeli?

12. Gülnar, Aşyr we olaryň kakasy syýahata ugradylar. Agşamara olar ýuwaşja akýan we çuň däl derýanyň kenaryna baryp ýetdiler. Kenarda agaçdan ýasalan we 100 *kg*-a çenli ýüki göterip biljek sal bardy. Kakasynyň agramy 80 *kg*, Gülnaryň agramy 50 *kg*, Aşyryň agramy 40 *kg* we ýüküň agramy 15 *kg*.

Aşyr ilkinji nobatda aňyrky kenarda odun we ot ýakmak üçin ýer taýýarlamaly. Soňra Gülnar çorba üçin balyk we kartoşka arassalamaly. Kakasy bolsa agşam ýatmak üçin çadyr dikmeli. Görkezilen her bir işi etmek üçin 20 minut wagt gerek. Derýadan 10 minutda geçip bolýar. Nähili edip bir sagada-da galman olaryň üçüside derýanyň aňyrsyna geçip, öz borçlaryny ýerine ýetirip bilerler? Bir sagatdan garaňky düşýär we ot ýakmaly.

13. Iki orunly motosikletde 3 adam nähili edip 60 *km* aralygy 3 sagatda geçip biler? Motosikletiň tizligi 50 *km/sag*, pyýadanyň tizligi 5 *km/sag*.

14. Ýaşikleriň dördüsinde gaba salnan süýjüler bardy. Olaryň her birinden 9 gap süýjüni alansoňlar, 4 ýaşikde galan süýjüleriň mukdary bir ýaşikdäki ýaly bolupdy. Ýaşikleriň her birinde ilki başda näçe gap süýji bar eken?

15. Kombaýnçylaryň topary iki meýdanyň bugdaýyny ormalydylar. Olar uly meýdanyň bugdaýyny orup başladylar. Günüň ikinji ýarymynda kombaýnlaryň ýarysy uly meýdanda galyp, ony agşama çenli orup gutardylar. Kombaýnlaryň galan ýarysy, günüň ikinji ýarymynda iki esse kiçi bolan beýleki meýdanyň bugdaýyny ordular. Bir kombaýn ertesi hem uzakly gün işläp, kiçi meýdanyň bugdaýyny orup gutaran bolsa, toparda näçe kombaýn bar eken?

16. Babasynyň 56 ýaşy, agtygynyň bolsa 14 ýaşy bar. Haçan babasynyň ýaşy agtygynyň ýaşyndan iki esse uly bolar?

17. 35 ýaşly Aman aganyň 4 ogly bar. Her biri beýlekisinden iki ýyl ýaş, onsoňom iň ulusynyň 8 ýaşy bar. Haçan hemme çagalarynyň jemi ýaşy kakasynyň ýaşy bilen deň bolar ?

18. Iki ekiz dogan ýaşapdyr. Olaryň biri gije gündiziň $\frac{1}{3}$-ini, beýlekisi bolsa bir gije gündiziň $\frac{1}{4}$-ini uklap geçiripdir. Olar 72 ýaşapdyrlar. Olaryň her biri ömrüniň näçe wagtyny ýatyp geçiripdir?

19. Öküz bir daňy bedäni 1 sagatda, at 2 sagatda, geçi bolsa 3 sagatda iýip gutarýar. Olaryň üçüsi bilelikde bir daňy bedäni näçe sagatda iýip gutararlar?

20. Oglanjyk 600 gram mürepbäni 6 minutda iýýär, Böwenjik bolsa ondan iki esse çalt iýýär. Olaryň ikisi bilelikde 600 gram mürepbäni näçe wagtda iýerler?

21. Ýük otlysynyň uzynlygy 1 *km* we ol 50 *km/sag* tizlik bilen hereket edýär. Ol uzynlygy 1 *km* bolan tunnelden näçe wagtda geçer?

22. 150 metrlik köpriniň üstünde duran adam otlynyň öz deňinden 10 sekuntda geçenligini, köprini geçmek (teplowozyň köpriniň üstüne müneninden, tä soňky wagonyň köpriniň üstünden düşýänçä wagty) üçin bolsa 25 sekunt harçlandygyny kesgitläpdir. Otlynyň uzynlygyny we onuň tizligini kesgitläň.

23. Eginleri deň bolmany üçin agramy nädogry ölçeýän okaraly terezi bar. Massasyny anyklamaly ýüki ilki tereziniň bir okarasyna salyp, agram daşlary bolsa beýleki okara salyp çekdiler. Soňra bolsa ýüküň we agram daşlaryň okaralaryny çalşyp çekdiler. Ýüküň massasyny anyk kesgitläp bolarmy?

24. Eginleri deň bolmany üçin agramy nädogry ölçeýän okaraly terezi bar. 2 *kg* ýarmany almak üçin 1 *kg* daşy bir okarada goýup, beýleki okara bolsa ýarma guýdular. Soňra bolsa okaralary çalşyp ýene-de 1 *kg* ýarmany çekdiler. Bu iki gezek çekilen yarmalary goşup, onuň massasynyň 2 *kg*-ma deňligi barada netije çykardylar. Bu netije dogrumy?

25. Ýük maşyny 25000 *km* geçenden soň onuň yz tigrindäki rezinleri, 15000 *km* geçenden soň bol-

sa öň tigrindäki rezinleri täzesi bilen çalşyrmaly bolýar. Eger öz wagtynda öň we yz tigirlerdäki rezinler çalşyrylsa, onda ýük maşyny näce kilometr ýoly rezinlerini çalşyrmazdan geçip biler?

26. Derýanyň akyş tizligi 2 *km/sag*. Eger gämininň tizligi üýtgewsiz bolsa, onda akymyň ugruna ýüzýän gämininň tizligi akymyň garşysyna ýüzýän gämininň tizliginden näçe köp?

27. Motorly gaýyk käbir aralygy akymyň ugruna 3 sagatda, edil şol aralygy akymyň garşysyna 4,5 sagatda geçip bilýär.

Akymyň ugruna akyp barýan içi boş gap bu aralygy näçe wagtda geçer?

28. Iki motosikletli bir wagtyň özünde şäherden oba ugradylar. Olaryň birinjisi ähli ýoly 25 *km/sag* tizlik bilen, ikinjisi bolsa ýoluň birinji ýarymyny 30 *km/sag*, ikinji ýarymyny 20 *km/sag* tizlik bilen geçdi. Olaryň haýsysy oba çalt barypdyr?

29. Oba bilen şäheriň arasynda baýyr bar. Şonuň üçin awtobus baýra çykanda 25 *km/sag* tizlik bilen, baýyrdan aşak düşende bolsa 50 *km/sag* tizlik bilen hereket edýär. Şäherden oba gidende awtobus ýola 4 sagat, obadan şähere gaýdanda bolsa 3,5 sagat sarp edýär. Oba bilen şäheriň arasyndaky uzaklygy tapyň.

30. (Eýleriň meselesi). Öz ähli baýlygyny ogullaryna deň bölmek islän baý adam aşakdaky ýaly wesýet edipdir. «Meniň uly oglum pulumdan 1000 tylla we galanynyň $\frac{1}{8}$-ini alsyn, ikinji oglum 2000 tylla we galanynyň $\frac{1}{8}$-ini alsyn, üçünji oglum 3000 tylla we galanynyň

$\frac{1}{8}$-ini alsyn we ş.m.». Wesýet eden adamyň ogullarynyň sanyny we baýlygynyň mukdaryny kesgitlemeli.

31. Ýaz aýlary oglanlar kömelek ýygmaga gitdiler. Kömelek ýygyp bolansoňlar tapan kömeleklerini deň paýlaşmagy karar etdiler. Oglanlaryň iň kiçisine 20 kömelek we galan kömelekleriň 0,04-üni, ondan uly oglana 21 kömelek we galan kömelekleriň 0,04-üni, üçün-ji oglana 22 kömelek we galan kömelekleriň 0,04-üni we ş.m. berdiler. Näçe oglan kömelek ýygmaga gitdi? Olaryň her birine näçe kömelekden ýetdi?

32. Mydama gaýnap duran samowardaky suwy 5 adam 1,5 sagatda, 8 adam bolsa 1 sagatda çaý demlenip içip gutaryp bilýär. Samowary 11 adam näçe sagatda içip gutarar? (Suwuň gaýnap bugarmasy we çaýyň içilişi deň ölçegli bolup geçýär diýip hasaplamaly).

33. (*Nýutonyň meselesi*). Meýdandaky ot deň gürlükde we deň çaltlykda ösýär. 70 sygryň bu meýdanyň otuny 24 günde, 30 sygryň bolsa 60 günde iýip gutarjakdygy belli. 96 sygyr bu meýdanyň otuny näçe günde iýip gutarar? (Sygyrlar meýdanyň otuny deň mukdarda we deň ölçegli iýýärler diýip hasaplamaly).

34. Aman tigirli 16^{00}-da demir ýol menziline barmakçy boldy. Eger ol 15 *km/sag* tizlik bilen gitse, onda menzile bir sagat öň, ýagny 15^{00}-da, eger 10 *km/sag* tizlik bilen gitse bolsa bir sagat soň, ýagny 17^{00}-da barjakdy. Demir ýol menziline 16^{00}-da barmak üçin Aman nähili tizlik bilen gitmeli?

35. Doganlar Begli, Myrat, Meret we Çary balyk tutmaga gitdiler. Olar öýlerine gelenlerinde Çary ejesine: «Men 6 balyk. Myrat 7, Begli 3, Meret 4 balyk tut-

duk» diýdi. Ejesi ogullaryna bir goşowuç pisse berdi. «Ýöne pisseleri öz tutan balyklaryňyza görä paýlaşyp iýiň» diýdi. Çagalar pisseleriň sanynyň 60-a deňdigini anykladylar. Olar bu pisseleri nähili paýlaşmaly?

36. Iki balykçy derýa balyk tutmaga gitdiler. Olaryň biri 4, beýlekisi bolsa 5 sany deň ululykdaky balyklary tutdular. Balykçylar balyklary gün ýaşmanka arassalap, ot ýakyp olary gowurmaga başladylar. Şol wagt geçip barýan ýolagçy olar bilen agşamlyk edindi. Ýolagçy agşamlygy üçin 1 manat 80 teňňe berdi. 4 balyk tutan balykçy: «Bu puluň 80 teňňesi meniňki, 1 manady seniňki bolmaly» diýdi. Oňa 5 balyk tutan balykçy: «Ýok sen ýalňyşýarsyň. Bu puluň 1 manat 20 teňňesi meniňki, diňe 60 teňňesi bolsa seniňki bolmaly» diýdi. Balykçylaryň haýsysy mamla?

37. Nädip 7 almany 6 oglana deň paýlap bermeli?

38. Iki daýhanyň biri 2 käse ýarma, beýlekisi bolsa, 3 käse ýarma goşup meýdanda bilelikde nahar taýýarlaýardylar. Ýarma taýýar bolanda olaryň ýanyna ýenede 2 daýhan gelip bilelikde bu ýarmany iýip gutardylar. Gelen iki daýhanyň her biri nahar üçin 1 manat pul berdiler. Nahar bişiren iki daýhan bu 2 manady nähili paýlaşmaly?

39. Garaşsyzlyk baýramynda Aman, Çary we Şatlyk 12 sany şokolad almagy karar etdiler. Aman 5, Çary bolsa 7 şokolad satyn aldylar. Şatlyk 4 şokolad üçin 2 manat 40 teňňe pul berdi. Bu puly Aman we Çary nähili paýlaşmaly?

40. Çary aga bazarda goýunlaryny satyp gutaran dessine oňa obadaşy Meret aga duşup «Tüweleme senä goýunlaryňy derrew satyp gutaraýdyň. Kän goýun

getiripmidiň?» diýdi. Onda Çary aga «Birinji alyja getiren goýunlarymyň ýarysyny we ýene-de ýarym goýny, ikinji alyja galan goýunlaryň ýarysyny we ýene-de ýarym goýny satdym. Üçünji alyja ikinji alyjydan galan goýunlarymyň ýarysyny we ýene-de ýarym goýny satanymda, goýunlar gutardy». Çary aga bazarda näçe goýun satypdyr?

41. Sebetde almalar bardy. Almalaryň deň ýarysyny we ýene-de ýarym almany, soňra galan almalaryň ýarysyny we ýene-de ýarym almany, iň soňunda bolsa galan almalaryň ýarysyny we ýene-de ýarym almany alanlaryndan soň sebetde 31 alma galdy. Sebetde ilkibaşda näçe alma bar eken?

42. Sebetden 3 almany aldylar. Soňra galan almalaryň üçden birini we ýene-de 3 alma aldylar. Şondan soňra sebetde ilkibaşdaky almalaryň ýarysy ýaly alma galdy. Sebetde näçe alma bar eken?

43. Aman mekdepden gelýärkä dosty Alta şeýle diýdi: «Eger meniň pulumyň üstüne, onuň ýarysy ýaly puly we ýene-de 2 manat goşsaň, onda ikimiz 20 manada oýun ýazylan kompýuter diskini alyp bilerdik» diýdi. Amanyň näçe manat puly bar eken?

44. Bazara barýan Hudaýberdi gorkak dynç almak üçin bir sazagyň ýanynda oturan wagty onuň ýanyna mekir tilki gelip, hal-ahwal soraşypdyr. Hudaýberdiniň näme almak üçin bazara barýandygyny, jübüsinde näçe pulunyň bardygyny bilenden soňra oňa şeýle diýipdir: «Hudaýberdi seniň aňsatja baýasyň gelýärmi? Sen şu sazagyň daşyndan her sapar aýlananyňda seniň jübüňdäki tylla teňňeleriň iki esse köpeler. Ýöne sen meniňem hyzmatymy ýatdan çykarmaly dälsiň. Puluň iki esse artany üçin her sapar maňa 16 tylla teňňäni ber-

meli bolarsyň» diýdi. Hudaýberdi oňa: «Eger sazagyň daşyndan her gezek aýlananyňda puluň iki esse köpeljek bolsa, onda saňa 16 teňňe bermegiň gürrüňi hem bolmaz» diyip sazagyň daşyndan bir gezek aýlandy we silkme telpegini çykaryp, pullaryny onuň içine dökdi. Haýran galaýmaly, onuň puly iki esse köpeldi. Ol wada berlen 16 tylla teňňäni tilkä sanap berdi we sazagyň daşyndan ikinji sapar aýlandy. Onuň pullary ýene iki esse köpelip, tilkä ýene-de 16 teňňäni berdi. Ol üçünji sapar sazagyň daşyndan aýlananda onuň pullary ýene iki esse artyp, 16 teňňe boldy. Tilki ýene-de 16 teňňäni aldy-da guýrugyny gysyp gidiberdi. Haýran galan Hudaýberdi gorkak bolsa, pulsuz galdy. Ilki başda Hudaýberdiniň näçe puly bar eken?

45. Siňekler Welini şeýle bir ýadatdy welin, ol siňekleri öldürmäge başlady. Ol 4 günde 216 siňegi öldürdi. Şeýlelikde, ol her gün öňki günlerde öldüren siňekleri ýaly siňegi öldürdi. Weli her gün näçe siňek öldüripdir?

46. Kakasy bazardan pisse alyp, ony öýe getirip aşhanada goýdy. Meret mekdepden gelip, pisseleriň ýarysyny iýdi. Soňra Aman mekdepden gelip, galan pisseleriň ýarysyny iýdi. Amandan soňra Ata mekdepden gelip, galan pisseleriň ýarysyny iýdi. Kakasy işden gelende 4 pisse galan eken. Ol bazardan näçe pisse satyn alypdyr?

47. Garry ene bazara satmak üçin ýumurtga getirdi. Birinji alyjy ýumurtgalaryň $\frac{1}{2}$-ini we ýene-de 1 ýumurtga satyn aldy. Ikinji alyjy galan ýumurtgalaryň $\frac{1}{2}$-ini we ýene-de 1 ýumurtga satyn aldy. Üçünji alyjy hem soňky galan ýumurtgalaryň $\frac{1}{2}$-ini we ýene-de

1 ýumurtga satyn aldy. Şeýlelikde, garry enede 5 ýumurtga satylman galdy. Garry ene başda bazarda satmak üçin näçe ýumurtga getiripdir?

48. Kakasy Aman, Maýsa we Kyýas üçin hoz satyn aldy. Hozlary çagalar deň paýlaşmalydylar. Mekdepden birinji Kyýas geldi we hozlaryň $\frac{1}{3}$-ini alyp oýnamaga gitdi. Ikinji mekdepden Maýsa geldi we galan hozlaryň $\frac{1}{3}$-ini alyp enelerine gezmäge gitdi. Üçünji mekdepden Aman geldi we galan hozlaryň $\frac{1}{3}$-ini aldy. Şondan soň sekiz hoz galdy. Kakasy çagalary üçin näçe hoz alypdyr.

49. Amanyň, Merediň we Çarynyň aşyklary bardy. Aman öz aşyklaryndan Merede we Çara olarda näçe aşyk bar bolsa, şonça aşygy berdi. Soňra Meret öz aşyklaryndan Amana we Çara olaryň her haýsynda näçe aşygy bar bolsa, şonça aşygy berdi. Iň soňunda Çary hem öz aşyklaryndan Amana we Merede olaryň her haýsynda näçe aşygy bar bolsa, şonça aşygy berdi. Şondan soňra oglanlaryň her birinde 8 aşygy bardy. Ilki başda oglanlaryň her birinde näçe aşygy bar eken?

50. Kakasy 24 sany hozy üç oglunyň her haýsyna näçe ýaşan bolsa, şonça hozdan paýlap berdi. Kakasy: «Goý, doganlaryň kiçisi öz hozlarynyň ýarysyny uly doganlaryna deň paýlap bersin. Soňra doganlaryň ortanjysy öz hozlarynyň ýarysyny uly we kiçi doganlaryna deň paýlap bersin. Iň soňunda uly dogan hem hozlarynyň ýarysyny kiçi doganlaryna deň paýlap bersin» diýip sargady. Ogullary kakasynyň bu sargydyny berjaý edenlerinde olaryň her birinde 8 hozy bardy. Doganlaryň her biri näçe ýaşynda?

51. Bahar aýy atasy 4 agtygyny alyp, kömelek ýygmaga gitdi. Kömelekli meýdanda olaryň her haýsy dürli taraplara gitdiler. Birsalymdan atalary ýadap oturdy we tapan kömeleklerini sanady. Ol 45 sany kömelek tapypdy. Atalarynyň oturanyny görüp agtyklary onuň ýanyna ylgaşyp geldiler. Olaryň özleri kömelek tapmansoňlar, atasyndan tapan kömeleklerinden özlerine bermegini soradylar. Atalary öz tapan kömeleklerinin ählisini agtyklaryna paýlady. Çagalar ýene-de kömelek gözläp, dürli taraplara ýörediler. Şonda çagalaryň biri 2 kömelek tapdy, beýlekisi bolsa 2 kömelek ýitirdi, üçünjisi atasynyň bereni ýaly kömelegi tapdy, dördünjisi bolsa atasynyň beren kömeleklerinin ýarysyny ýitirdi. Çagalar öýlerine gelip kömeleklerini sananlarynda olaryň ählisiniň kömeleklerinin sany deňdi. Oglanlaryň her birine atasy näçe kömelek beripdir? Olar öýlerine gelende çagalaryň her haýsynda näçe kömelegi bar eken?

52. Iki agaçda 16 serçe otyr. Ikinji agaçdan 2 serçe uçup gitdi, soňra birinji agaçdan ikinji agaja 5 serçe uçup bardy. Ondan soňra agaçlaryň her birinde şol bir sanly serçeler boldy. Agaçlaryň her birinde ilkibaşda näçe serçe bar eken?

53. Atasy, kakasy we ogly üç bolup Serdaryň saglyk ýoly bilen ýokarlygyna barýardylar. Olaryň tanşy Meret aga aşaklygyna düşüp gelýärdi. Saglyk – amanlyk soraşylandan soňra Meret aga olaryň hersiniň näçe ýaşyndadygyny sorady. Atasy «Biziň üçümiziň bilelikdäki ýaşymyz 100» diýip ýokarlygyna ýöräp ugrady. Kakasy «Oglumyň we meniň bilelikdäki ýaşymyz 45. Men oglumdan 25 ýaş uly» diýip ol hem ýoluny dowam etdi. Şeýlelikde, Meret aga olaryň her biriniň nä-

çe ýaşyndadygyny bilip bilmedi. Olaryň her biri näçe ýaşyndaka?

54. Oglanyň ýaşy kakasynyňkydan iki esse kiçi. Kakasy 24 ýaşyndaka ogly doglupdy. Häzir ogly näçe ýaşynda?

55. 11 metrlik ýüpi bir bölekdäki metrleriň sany beýleki bölekdäki desimetriň sanyna deň bolar ýaly edip, iki bölege böldüler. Her bölekdäki ýüpüň uzynlygyny tapyň.

56. Oglanlar, suwy kesilen ýabyň düýbünde galan suwdan birnäçe balyk tutdular. Her oglana bir balyk bereniňde olaryň birine ýetmeýänligi, eger her iki oglana bir balykdan berlende bolsa bir balygyň artyp galýanlygy belli boldy. Oglanlaryň sany näçe we olar näçe balyk tutupdyrlar?

57. Uçup gelýän guşlar agaçlary gördüler we olaryň üstüne gonmaga başladylar. Guşlar bir-birden gonanlarynda olarýň dördüsine agaç ýetmedi. Her agaja ikiikiden gonanlarynda bolsa bir tut agajy artyp galdy. Näçe agaç we näçe guş bar eken?

58. Aman we Çary küşt oýnaýardylar. Çary göçüm etmek üçin çuňňur oýa batanda Amanyň içi gysyp başlady. Aman şonda tagtadaky boş öýjükleriň mallar duran öýjüklerden 3 esse köpdugini we özüniň mallarynyň Çarynyň mallaryndan 4 sany köpdügini anyklady. Şu pursatda olaryň her haýsynda näçe maly bar eken?

59. «Ata sen näçe ýaşyňda?» – diýip agtygy atasyndan sorady. Atasy «Eger meniň ýaşan her 10 ýylymyň üstüne 2 ýyldan goşsaň, meniň ýaşym 84 bolar»

diýp jogap berdi. Agtygy atasynyň näçe ýaşyndadygyny örän kynlyk bilen hasaplap tapdy. Oglanjygyň atasy näçe ýaşynda?

60. Kakalary Amana we Merede özara küşt oýnamagy teklip etdi. Her utan oýny üçin küştçä baýrak hökmünde pisse berjekdigini, özünem öňki utan oýnundakydan 4 esse köp pisse berjekdigini aýtdy. Aman oýnalan dört döwüň dördüsinem utdy we baýrak hökmünde 255 pisse aldy. Aman her utan oýnundan soň näçe pisse alypdyr?

61. Kakasy 5 oglunyň her haýsyna deň sanly hoz berdi. Doganlarynyň üçüsiniň her biri 5 hozy iýenlerinden soňra olaryň galan hozlarynyň beýleki iki doganyňky ýalydygy belli boldy. Kakasy ogullarynyň her birine näçe hoz beripdir?

62. Aman jigisi Merjeni doglan gününe 16 manat 80 teňňä oýunjak aýyny, maýmyny, syçany we pişigi satyn aldy. Maýmynyň, syçanyň we pişigiň bilelikdäki bahasy 12 manat 60 teňňe, aýynyň, syçanyň we pişigiň bilelikdäki bahasy 11 manat 20 teňňe, maýmynyň we pişigiň bilelikdäki bahasy 10 manat 20 teňňe bolsa, oýunjaklaryň her birininiň bahasy näçe?

63. Meniň 1 manat 20 teňňe pulum bardy. Men bu pula sirkul, çyzgyç we transportir satyn aldym. Eger men sirkul we çyzgyç üçin bu puluň $\frac{2}{3}$ bölegini, çyzgyç we transportir üçin $\frac{3}{5}$ bölegini sarp eden bolsam bu esbaplaryň her haýsy üçin näçe pul töläpdirin?

64. Obadan şähere barýan iki oglan ýoluň $\frac{1}{3}$-ini geçenden soň dynç almak üçin oturdylar. Oglanlaryň biri

beýlekisinden: «Biz ýene näçe ýol ýöremeli?» diýip soranda ol: «Geçen ýolumyzdan 12 *km* köp ýol ýöremeli» diýip jogap berdi. Şäher bilen obanyň arasyndaky uzaklyk näçe?

65. Myrat sygyrlary, goýunlary we geçileri bakyp ýördi. Onuň ýanyna dosty Mergen gelip «Seniň bakýan mallaryň näçesi sygyr?» diýip sorady. Myrat «Sygyrlar meniň bakýan mallarymyň $\frac{1}{2}$-ini düzýär» diýip jogap berdi. Onda Mergen «Bu mallaryň näçesi goýun?» diýip sorady. Myrat «Goýunlar meniň bakýan mallarymyň $\frac{1}{3}$-ini düzýär» diýip jogap berdi. «Geçiler näçe sany?» diýlen soraga Myrat «Geçiler goýunlardan 25 sany az» diýip jogap berdi. Mergen biraz pikirlenip, näçe sygryň, goýnuň we geçiniň bardygyny kesgitledi. Näçe sygyr, goýun we geçi bar?

66. Enesi agtyjaklary üçin etli somsa bişirdi. Ol somsalary sanap pikirlendi: «Eger her agtygyma 5 somsadan paýlasam, onda bir agtygyma 5 däl-de, eýsem, iki somsadan ýeter. Eger her agtygyma 4 somsadan paýlasam, onda 3 somsa artyp galýar». Enäniň näçe agtygy bar eken? Ol näçe somsa bişiripdir?

67. Oglanlar synpdaş gyzlaryny bahar baýramy bilen gutlamakçy boldular. Olar her bir gyza 1 manat 60 teňňelik sowgat almak üçin 1 manat 20 teňňäniň ýetmeýänligini, 1 manat 20 teňňelik sowgat alsalar 1 manat 60 teňňäniň artyp galýandygyny hasapladylar. Oglanlar näçe manada sowgat almakçy boldular?

68. Daýhan öz ýetişdiren üzüm hasylynyň 2000 *kg* kem $\frac{1}{3}$-ini çakyr zawodyna tabşyrdy. Galan hasylyň

$\frac{1}{2}$-ini we 6000 *kg*-ny bolsa bazarda satdy. Daýhan näçe üzüm hasylyny ýetişdiripdir we onuň näçesini zawoda tabşyryp, näçesini bolsa bazarda satypdyr?

69. Galam bilen depderiň bilelikdäki bahasy 30 teňňe. Depder galamdan 20 teňňe gymmat. Depderiň we galamyň her biriniň bahasy näçe?

70. Doganlar Aman we Mergen dükandan top aljak boldular. Emma topy almak üçin Amana 4 manat, Mergene bolsa 2 manat 80 teňňe ýetmedi. Olar pullaryny goşanlarynda hem topy almak üçin 80 teňňeleri ýetmeýärdi. Topuň bahasy näçe?

71. Synpda 36 okuwçy okaýar. Oglanlaryň sany gyzlaryňkydan 3 sany köp bolsa, synpda näçe oglan we näçe gyz bar?

72. Bir oglanyň gyz doganlarynyň sany erkek doganlarynyň sanyna deň. Onuň aýal doganynyň erkek doganlarynyň sany aýal doganlarynyňkydan iki esse köp. Maşgalada näçe çaga bar?

73. Küşt mekdebinde iki ýarys geçirildi. Birinji ýarşda birinji derejeli 4 küştçi, ikinji ýarşda bolsa ikinji derejeli 6 küştçi özara güýç synanyşdylar. Oýunçylaryň her biri beýleki küştçüler bilen diňe bir döw oýnadylar. Ýarys tamamlananda birinji ýarşyň ýeňijisi bilen ikinji ýarşyň ýeňijisiniň deň mukdarda utuk gazanandyklary belli boldy. Ikinji ýarşyň ýeňijisi näçe utuk gazanypdyr?

74. Küşt ýarşynda 8-nji we 9-njy synplaryň okuwçylary bäsleşdiler. Her bir oýunçy beýlekileriň her biri bilen bir döw oýnady. 9-njy synp okuwçylary 8-nji synp okuwçylaryndan 10 esse köp bolup, olaryň alan utuk-

lary bolsa 8-nji synplaryňkydan 4,5 esse köpdi. Näçe sany 8-nji synp okuwçysy ýaryşa gatnaşdy we ol näçe utuk gazandy?

75. Çelekdäki ýagyň 25%-ini birinji alyja, galan ýagyň 30%-ini ikinji alyja, galan ýagyň 40%-ini bolsa üçünji alyja satdylar. Çelekdäki ýagyň näçe göterimi satylman galypdyr?

76. Käbir harydyň bahasyny ilki 10% gymmatladyp, soňra bolsa 10% arzanlatdylar. Bu harydyň bahasy üýtgedimi?

77. Meret iki sany top satyn aldy. Toplaryň birinjisi beýlekisine garanyňda 50% gymmatdy. Toplaryň ikinjisi birinjisine garanyňda näçe göterim arzan?

78. Zawod sagatda 100 *kw/sag* elektrik energiýasyny harçlaýardy. Täze enjamlaryň birinjisiniň goýulmagy 25% elektrik energiýasyny tygşytlamaga, ikinjisiniň goýulmagy bolsa 20% elektrik energiýasyny tygşytlamaga mümkinçilik berdi. Täze enjamlar goýlandan soňra zawod sagatda näçe *kw/sag* elektrik energiýasyny harçlaýar?

79. Iki harydyň bahalary deň. Täze ýylyň öň ýany harytlaryň bahalaryny arzanlatdylar. Şeýlelikde, birinji harydyň bahasy iki sapar 15% arzanladyldy. Ikinji harydyň bahasy bolsa bir sapar, ýöne 30% arzanladyldy. Bu arzanlaşykdan soň harytlaryň haýsysynyň bahasy has arzan?

80. Ýoluň ýarysyny geçeninden soň awtobus tizligini 25% artdyrdy we barmaly ýerine ýarym sagat öň bardy. Awtobus ähli ýoly näçe wagtda geçdi?

81. 6-njy synpda okaýan Aman we onuň 1-nji synpda okaýan jigisi Myrat birwagtyň özünde öýlerin-

den çykyp mekdebe tarap ugradylar. Myradyň ädimi Amanyňkydan 10% gysgady, emma ol Amana seredende 10% köp ädim ädýärdi. Olaryň haýsysy mekdebe öň barar?

Çözülişler we jogaplar

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ bolany üçin sanyň ýarysyny, üçden birini, altydan birini goşup, ol sanyň özüni alarys.

2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ bolany üçin.

3. Maksadyň içen süýdi $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1$ käsä deň. Onuň içen çaýy hem bir käsä deň.

4. $\frac{1}{3}$ bölegini. Ýolagçy ýoluň ýarysyny geçenden soň uklaýar. Ol oýananda galan ýoluň $\frac{1}{3}$-ini geçmeli bolýar. Diýmek, ol galan ýoluň $\frac{2}{3}$ bölegini uklap geçiripdir. Galan ýoluň $\frac{2}{3}$ bölegi tutuş ýoluň $\frac{1}{3}$ bölegine deňdir.

5. 3 depder we üç ruçka 0,9 + 1,2 = 2,1 manat. Onda 1depder we 1 ruçka 2,1:3 = 0,7 manat bolar. 1 depder 0,9 – 0,7= 0,2 manat, 1 ruçka 1,2 – 0,7 = 0,5 manat bolar.

6. 9 sagatda dikuçaryň sürüjisi uçman, gämide giden bolsa, ol 9·60 = 540 *km* geçerdi. Emma ol 9 sagatda 960 *km* geçipdir. Diýmek, ol 960 – 540 = 420 *km* köp ýol geçipdir. Ol dikuçarda sagatda 200 – 60 = 140 *km* köp ýol geçýär. Diýmek, dikuçar 420 : 140 = 3 sagat uçupdyr.

7. Duşuşýançalar birinji tigirli 2·10=20 *km*, ikinji tigirli bolsa 2·15=30 *km* ýol geçmeli. Diýmek, du-

şuşmazlaryndan 2 sagat öň olaryň arasyndaky uzaklyk 20+30=50 kilometr bolar.

8. 54 *km/sag*.

9. Doganlar tigirden gezekli-gezegine peýdalandylar. Öýden doganlaryň kiçisi tigirli, ulusy bolsa pyýada ugraýarlar. Kiçi dogan 1 *km* geçenden soň (bu wagtda doganlaryň ulusy pyýada $\frac{1}{3}$ *km* geçýär) tigri goýup, ýoluny pyýada dowam edip başlaýar. Doganlaryň ulusy 1 *km* pyýada geçende kiçi dogan 1 *km* tigirli we $\frac{2}{3}$ *km* pyýada, ýagny $1\frac{2}{3}$ *km* geçýär. Doganlaryň ulusy 2-nji kilometri tigirli geçýänçä, kiçisi $\frac{1}{3}$ *km* geçýär we 2-nji kilometriň soňuna uly dogany bilen deň gelýär. Galan iki kilometri hem doganlar edil şuňa meňzeş geçýärler we demir ýol menziline bir wagtda gelýärler.

Indi tigirli we pyýada nähili tizlikde hereket edilendigini kesgitläliň. Ýoluň 2 *km* tigirli we 2 *km* pyýada geçildi. Diňe pyýada ýörelen bolsa, 10 *min* gijä galynýandygyny, tigir ulanylanlygy üçin bolsa 10 *min* ir gelnenligini göz öňünde tutsak, 2 *km* ýoluň tigirli geçilmegi netijesinde, 20 *min* wagtyň tygşytlanandygyna göz ýetirýäris. Tigirli 2 *km* ýoly geçýänçä, pyýada $\frac{2}{3}$ *km* geçýär. Pyýada $2-\frac{2}{3}=1\frac{1}{3}$ *km* geçmek üçin 20 min sarp edýär. Diýmek, pyýadanyň tizligi $1\frac{1}{3}:\frac{1}{3}=4$ *km*, tigirliniň tizligi $4 \cdot 3 = 12$ *km/sag*.

Tizlikleri deňleme düzüp hem tapyp bolýar. Goý, pyýadanyň tizligi x bolsun, onda tigirliniň tizligi $3x$ bolar.

Deňleme düzýäris: $\frac{2}{x}-\frac{2}{3x}=\frac{1}{3}$; $\frac{4}{3x}=\frac{1}{3}$; $3x=12$; $x=4$.

13. Iki adam motosikletde we biri pyýada ýola düşýärler. 55 *km* geçenden soň motosikletiň yzynda oturan düşüp, galan 5 *km* ýoluny pyýada dowam etdirýär. Beýlekisi motosikletde yzyna (45 *km*) gaýdýar. Motosiklet jemi 55 + 45 = 100 *km* ýoly 100:50 = 2 sagatda geçýär. Şol pursada çenli üçünji pyýada 5·2 = 10 *km* geçýär. Motosiklet ony alyp ýene-de 50 *km* aralygy 1 sagatda geçýär. Şeýlelikde, 3 sagatda üçüsi-de 60 *km* aralygy geçýärler.

14. Jemi 4 ýaşikden 4·9=36 gap süýji alnandan soň galan süýji bir ýaşikdäki ýaly bolupdyr. Onda 3 ýaşikde 36 gap, bir ýaşikde 12 gap süýji bar eken.

15. Uly meýdanda ähli kombaýnlar ýarym gün, kombaýnlaryň ýarysy hem ýarym gün bugdaý ordular. Diýmek, toparyň $1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ iş güni birinji meýdany ormak üçin ulanyldy. Kiçi meýdanda toparyň ýarysy ýarym gün işledi. Diýmek, toparyň $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ iş güni ulanyldy. Ilkinji meýdan iki esse kiçi bolany üçin ony topar $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$ günde dynyp biljekdi. Ikinji gün ikinji meýdanda ähli topar üçin $\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ günlük iş galýar. Bu işi diňe bir kombaýn ýerine ýetireni üçin, toparda 8 kombaýn bar eken.

16. Agtygy doglanda babasynyň 42 ýaşy bar eken. Diýmek, 42 ýýldan soň babasynyň ýaşy 42·2=84, agtygynyň ýaşy bolsa 42 bolar.

17. Uly oglunyň 8 ýaşy, ikinji oglunyň 6 ýaşy, üçünji oglunyň 4 ýaşy we dördünji oglunyň 2 ýaşy bar. Olaryň hemmesiniň bilelikde ýaşy 20 bolýar. Her ýyl kakalarynyň ýaşy bir ýyl artýar, dört ogullarynyň umumy ýaşan ýyly 4 ýyl artýar. 5 ýyldan kakalary 40 ýaşaýar, hemme çagalarynyň ýaşynyň umumy jemi bolsa 40 bolýar.

18. Ekizleriň birinjisi ömrüniň 72:3=24 ýylyny, ikinjisi 72:4 = 18 ýylyny ýatyp geçiripdir.

19. 12 sagatda öküz 12, at 6, geçi bolsa 4 daňy bedäni, ählisi bilelikde bolsa 22 daňy bedäni iýerler. Diýmek, olaryň üçüsi bilelikde 1 daňy bedäni $\frac{6}{11}$ sagatda iýip gutararlar.

20. 2 minutda. 1 minutda oglan $600:6 = 100$ *gram* mürepbäni iýer. Böwenjik ähli mürepbäni 3 minutda, 1 minutda bolsa $600:3 = 200$ *gram* mürepbäni iýer. Olaryň ikisi 1 minutda $100 + 200 = 300$ *gram* mürepbäni, 2 minutda bolsa ähli mürepbäni iýerler.

21. 2 *km* ýoly 50 *km/sag* tizlik bilen barýan otlynyň näçe wagtda geçjekdigini kesgitlemeli.

$$t = \frac{S}{\vartheta} = \frac{2km}{50km/sag} = \frac{1}{25}sag = \frac{1}{25} \cdot 60\ min = 2{,}4\ min.$$

22. Öz uzynlygy ýaly aralygy geçmek üçin otly 10 *sek* wagt sarp edýär. Öz uzynlygy we köpriniň uzynlygy ýaly aralygy geçmek üçin bolsa 25*sek* wagt sarp edýär.

Diýmek, otlynyň tizligi $\frac{150}{25-10} = 10\ m/sek$ ýa-da $\frac{10 \cdot 60 \cdot 60}{1000} = 36\ km/sag$. Otlynyň uzynlygy $10 \cdot 10 = 100\ m$.

23. Bolar. Eger birinji çeküwde ýüküň massasy p, ikinji çeküwde ýüküň massasy q bolsa, onda ýüküň hakyky massasy $\sqrt{pq}$ bolar.

24. Bu netije dogry däl. Ýarmanyň massasy 2 *kg* köp bolýar. Goý, a birinji gezek çekilen ýarmanyň massasy, b bolsa ikinji gezek çekilen ýarmanyň massasy bolsun. Onda öňki mesele boýunça $\sqrt{ab} = 1$ bolmaly. $a \neq b$ we

$$a + b = \frac{a}{\sqrt{ab}} + \frac{b}{\sqrt{ab}} = \frac{a}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{ab}}} > 2.$$

25. Ýük maşyny 9375 *km* geçenden soň onuň yz we öň tigirlerindäki rezinleri çalşyrmaly. Şonda ýük maşyny 18750 *km* ýoly rezinleri täzesi bilen çalşyrmazdan geçip biler.

26. 4 *km/sag* köp.

27. Akymyň ugruna 1 sagatda motorly gaýyk ähli ýoluň $\frac{1}{3}$-ini, akymyň garşysyna bolsa ähli ýoluň $\frac{2}{9}$-sini geçer. Ähli ýoluň $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$ bölegi, akymyň bir sagatda geçýän ýolunyň iki essesi bolar. Diýmek, $\frac{1}{18}$ aralyk akymyň bir sagatda geçjek ýoludyr. Diýmek, diňe akymyň ugruna akyp barýan içi boş gap bu aralygy 18 sagatda geçer.

28. Ikinji motosikletçi ýoluň birinji ýarysynyň bir kilometrini 2 minutda, ýoluň ikinji ýarysynyň bir kilometrini 3 minutda geçipdir. Diýmek, ol ortaça 2 kilometr ýoly 5 minutda ýa-da sagatda 24 kilometr ýoly geçipdir. Diýmek, birinji motosikletçi 25 *km/sag* tizlik bilen oba çalt gelipdir.

29. Awtobus şäherden oba we tersine, obadan şähere barmak üçin 7,5 sagat sarp edýär. Seýlelikde, onuň baýra çykýan we baýyrdan düşýän aralyklary deňdir. Ýöne awtobus baýra çykanda düşenindäkiden iki esse pes tizlik bilen hereket edýär. Diýmek, ol ýokary çykmak üçin düşenindäkiden iki esse köp wagt sarp edýär. Diýmek, ol 7,5 sagadyň 2,5 sagadyny baýyrdan düşmek üçin 5 sagadyny bolsa baýra çykmak üçin sarp edýär. Onda oba bilen şäheriň arasyndaky uzaklyk $\frac{2,5 \cdot 50 + 5 \cdot 25}{2} = 125\ km$ deňdir.

30. Ähli ogullary deň paý alanlary üçin täze galyndynyň $\frac{1}{8}$-i öňki galyndynyň $\frac{1}{8}$-inden 1000 tylla az bolmaly. Diýmek, täze galyndy öňki galyndydan 8000 tylla az bolmaly. Şert boýunça ähli baýlyk doly paýlanypdyr. Diýmek, baýyň iň soňky ogly käbir tylla alandan soň galyndyda hiç bir zat galmandyr. Onda onuň öň ýanyndaky galyndy 8000 tylla bolmaly. Ol 8000 tylladan baýyň iň kiçi oglundan öňki ogly 1000 tylla alypdyr. Diýmek, iň kiçi ogly (diýmek, beýleki ogullary hem) 7000 tylla alypdyr. Baýyň 7 ogly bolup, onuň baýlygynyň mukdary 49000 tylla bolupdyr.

31. 5 oglan kömelek ýygmaga gidipdir we olaryň her birine 24 kömelekden ýetipdir. Şert boýunça oglanlaryň her birine öňkä berlenden bir kömelek köp berilýär. Diýmek, galan kömelekleriň 0,04-i 1-e deň bolmaly. Bu ýerden soňky galan kömelekleriň sanynyň öňki galanlardan 25 kömelek azdygyny görkezýär. Iň soňky oglan özüne ýetýän kömelegi alandan soň hiç bir kömelek galmaýar. Onuň öň ýanyndaky oglan özüne degişli kömelekleri alandan soň 25 kömelek galyp, ol

bu kömelekleriň 0,04-üni, ýagny 25·0,04=1 kömelegi alýar. Bu ýerden iň soňky oglanyň 24 kömelek alandygy gelip çykýar. Diýmek, oglanlaryň her birine 24 kömelekden ýetipdir. Oglanlaryň sanynyň 5-ligine göz ýetirmek has hem ýeňildir. Ilkibaşda 1-nji oglan 20, 2-nji 21 we ş.m. 5-nji oglan bolsa 24 kömelek alýar.

32. Eger 8 adam samowary 1 sagatda içip gutaryp bilýän bolsa, onda onuň göwrümi 8 adamyň paýyna (1 paý diýip, bir adamyň 1 sagatda içip biljek çaýynyň möçberine düşünilýär) we 1 sagatda gaýnap bugarjak suwuň mukdaryna deňdir. Başga tarapdan, 5 adam samowary 1,5 sagatda içip gutaryanlygy üçin onuň göwrümi 5·1,5=7,5 adamyň paýyna we 1,5 sagatda gaýnap bugarjak suwuň mukdaryna deňdir. Bu ýerden ýarym sagatda samowarda ýarym paýyň, 1 sagat-da bolsa bir paýyň bugaryanlygy gelip çykýar. Diýmek, samowaryň göwrümi 9 paýa deň. 11 adam ilkinji ýarym sagatda 5,5 paýy içýär we ýarym paý bolsa bugaryp gutaryar. Diýmek, samowardaky suw ýarym sagatda 6 paý azalar. Galan 3 paý bolsa 15 minutda içiler. Şeýlelik bilen 11 adam samowardaky çaýy 45 minutda içip gutarar.

33. 24 günde 70 sygyr 24·70=1680 paýy iýip bilýär (1 paý diýip 1 sygryň bir günde iýip biljek otunyň mukdaryna düşünýäris). Bu 1680 paýa otuň öňki mukdary we onuň 24 günde ösen mukdary giryär. 30 sygyr 60 günde 30·60=1800 paýy iýip bilýär. 1800 −1680=120 artykmaç paý 60−24=36 gündäki otuň ösüşini düzýär. Diýmek, 24 günde otuň ösüşi 80 paýa, ilkibaşdaky otuň mukdary 1680−80=1600 paýa deň. 96 günde otuň ösüşi 80·4=320 paýa, 96 gündäki ähli

ot 1600+320=1920 paýa deň bolar. Bir günde 1920: 96=20 paý iýilýär. Diýmek, 20 sygyr 96 günde bu meýdanyň otuny iýip gutaryp biler.

34. Goý, demir ýol menziline çenli uzaklyk a deň bolsun. Onda biz 10 *km/sag* tizlik bilen gidende 15 *km/sag* tizlik bilen gidenindäkiden 2 sag köp wagt sarp edýänligi üçin aşakdaky deňlemäni düzüp bileris: $\frac{a}{10}-\frac{a}{15}=2$, bu deňlemäni çözüp a=60 köki tapýarys. Bu san demir ýol menziline çenli uzaklygyň 60 *km* deňligini görkezýär. Diýmek, tigirli 10 *km/sag* tizlik bilen gidende bu ýoly 6 sagatda, 15 *km/sag* tizlik bilen gidende bolsa 4 sagatda geçjekdigini tapyp bileris. Diýmek, 5 sagatda menzile barmak üçin Aman 12 *km/sag* tizlik bilen tigrini sürmeli.

35. Çagalaryň tutan balyklarynyň sany 6+7+3+ +4=20. Diýmek, her balyk üçin 60:20=3 pisseden paýlaşmaly. Çary 6·3=18, Myrat 7·3=21, Begli 3·3=9, Meret 4·3=12 pisse almaly.

36. 5 balyk tutan balykçy mamla. 4 balyk tutan 1 balygyny 5 balyk tutan bolsa 2 balygyny ýolagça beripdirler. Diýmek, her balyk üçin 60 teňňe tölenipdir. Onuň 60 teňňesini birinji balykçy, 1 manat 20 teňňesini ikinji balykçy almaly.

37. Her oglana bir almadan bermeli galan 1 almany 6 bölege bölup, her oglana bir bölekden bermeli.

38. Dört daýhanyň her biri 5: 4 = 1,25 käse ýarmany iýipdir. Diýmek, nahar bişiren birinji daýhanyň 2−1,25=0,75 käse ýarmasyny, ikinji daýhanyň 3−1,25= =1,75 käse ýarmasyny, ýagny 0,75+1,75=2,5 käse ýarmany gelen iki daýhan iýipdir. Her käse ýarma üçin

2 : 2,5 = 0,8 manatdan ýetýär. Diýmek, 0,75 · 0,8 = 0,6 manady 2 käse ýarma goşan, 0,75 · 4=1,4 manady bolsa, 3 käse ýarma goşan daýhan almaly.

39. Aman öz şokoladlarynyň 4-üsini özi iýip 1-ini Şatlyga berýär. Çary bolsa 4 şokolady özi iýip 3-üsini Şatlyga berýär. Diýmek, 2,4 manadyň 0,6 manadyny Aman 1,8 manadyny bolsa Çary almaly.

40. Meseläni tersinden çözeliň. Çary aga üçünji alyja galan goýunlarynyň ýarysyny we ýene-de ýarym goýny satanynda onuň goýunlary gutarypdyr. Diýmek, ol üçünji alyja bir goýun satypdyr. Diýmek, ikinji alyjy iki we birinji alyjy dört goýny satyn alypdyr. Çary aganyň bazara getiren goýunlarynyň sany 1+2+4=7.

41. Mesele öňki meselä meňzeş çözülýär.

Jogaby: 255 alma.

42. 3 alma alnandan soňra galan almanyň $\frac{1}{3}$-i alnypdyr. Diýmek, ähli almanyň bir alma kem $\frac{1}{3}$-i alnypdyr. Diýmek, sebetden 3 alma, bir alma kem $\frac{1}{3}$ alma we ýene-de 3 alma alnypdyr. Diýmek, sebetden almalaryň $\frac{1}{3}$-i we ýene-de 5 alma alnandan soňra sebetde ilkibaşdaky almalaryň ýarysy galypdyr.Diýmek, ähli almalaryň $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ bölegi 5 alma deň. Sebetde ilkibaşda 30 sany alma bar eken.

43. Bu meseläni soňundan çözüp başlamak amatly bolýar. 2 manat goşulmazdan öňki pul 20−2=18 manat bolar. 18 manat Amanyň pulunyň üstüne onuň ýarysy ýaly pul goşulandan soň alyndy. Diýmek, 6 manat pul goşulandan soň 18 manat bolýar. Amanyň puly

18 − 6 = 12 manada deň.

44. Meseläni dürli usullar bilen çözüp bolýar. Olaryň birini görkezeliň. Üçünji gezek sazagyň daşyndan aýlanandan soň onuň puly iki esse köpelip, 16 teňňe bolupdyr. Diýmek, üçünji gezek aýlanandan öň onuň 16:2=8 teňňesi bar eken. Bu 8 teňňe 16 teňňe tilkä berlenden soňky pul. Ondan öň Hudaýberdiniň 16+8=24 teňňesi bar eken. Ikinji gezek sazagyň daşyndan aýlanmazdan öň Hudaýberdiniň 24:2=12 teňňesi bar eken. Bu teňňe tilkä ikinji 16 teňňe berlenden soňky galan pul. Ondan öň Hudaýberdiniň 16 + 12 = 28 teňňesi bolupdyr. Birinji gezek aýlanmazdan öň Hudaýberdiniň 28 : 2 = 14 teňňesi bar eken.

45. Goý, Weliniň birinji gün öldüren siňekleri x bolsun. Onda ol ikinji gün x, üçünji gün $x+x=2x$, dördünji gün $x+x+2x=4x$ siňegi, jemi $x+x+2x+4x=8x$ siňegi öldüripdir. $8x = 216$ deňlemeden $x=27$ tapýarys. Weli birinji gün 27, ikinji gün 27, üçünji gün 54, dördünji gün 108 siňegi öldüripdir.

Meseläni deňleme düzmän, tersinden çözmek has amatly bolýar. Weliniň dördünji tutan siňekleriniň sany 216 : 2= 108-e deň. Diýmek, onuň öňki üç gündäki tutan siňekleriniň sany hem 108-e deň. Weliniň üçünji gün tutan sinekleri 108:2=54-e deň. Diýmek, onuň öňki iki gündäki tutan siňekleriniň sany hem 54-e deň. Weliniň ikinji gün tutan siňekleri 54:2=27-ä deň. Diýmek, ol birinji günem 27 siňek tutupdyr.

46. 32 pisse alypdyr.

47. 54 ýumurtga.

48. Aman hozlaryň $\frac{1}{3}$-ini alandan soň 8 hoz galan bolsa, ol hoz almanka 12 hoz bar eken. Maýsa hozlaryň $\frac{1}{3}$-ini alandan soň 12 hoz galan bolsa, ol hoz almanka

18 hoz bar eken. Kyýas hozlaryň $\frac{1}{3}$-ini alandan soň 18 hoz galan bolsa, ol hoz almanka, ýagny ilki başda 27 hoz bar eken.

49. Çary aşygyny paýlandan soň oglanlaryň her birinde 8 aşygy bolýar. Diýmek, şol paýlanyşykdan öň Çarynyň 16, Amanyň 4, Merediň hem 4 aşygy bar eken. Meret aşyklaryny paýlamazdan öň bolsa, Amanyň 2, Merediň 14, Çarynyň 8 aşygy bar eken. Onda Aman aşyklaryny paýlamazdan öň Amanyň 13, Merediň 7, Çarynyň 4 aşygy bar eken.

50. Iň soňunda doganlaryň her birinde 8 hoz bar eken. Diýmek, uly dogan hozlarynyň ýarysyny paýlamanka onuň 16 hozy, beýleki doganlaryň her biriniň 4 hozy bardy. Onda ortanjy dogan hozlarynyň ýarysyny paýlamazdan öň onuň 8 hozy, uly doganyň 14 hozy, kiçi doganyň 2 hozy bardy. Kiçi dogan hozlarynyň ýarysyny paýlamazdan öň onuň 4 hozy, uly doganyň 13 hozy, ortanjy doganyň 7 hozy bardy.

Jogaby: 13, 7, 4 ýaşynda.

51. Atasynyň üçünji agtygyna iň az kömelek berenligine göz ýetirmek kyn däldir. Sebäbi ol doganlary bilen deňleşmek üçin atasynyň bereni ýaly kömelek tapmaly bolýar. Goý, atasy üçünji agtygyna x kömelek beripdir diýeliň. Onda ol öýlerine ýene şonça kömelek tapyp, $2x$ kömelek getirýär. Dördünji agtygy berlen kömelekleriň ýarysyny ýitirip ol hem $2x$ kömelek getirýär. Diýmek, atasy dördünji agtygyna ilkibaşda $4x$ kömelek beripdir. Birinji agtygy 2 kömelek tapandan soň öýlerine $2x$ kömelek getirýär. Diýmek, atasy oňa başda $2x-2$ kömelek beripdir. Ikinji agtygy 2 kömelek ýitirenden soň öýlerine $2x$ kömelek getirýär. Diýmek, atasy başda

oňa $2x+2$ kömelek beripdir. Deňleme düzýäris we ony çözýäris: $x+4x+2x-2+2x+2=45$; $9x=45$; $x=5$. Diýmek, atasy üçünji agtygyna 5, dördünji agtygyna $4\cdot5=20$, birinji agtygyna $2\cdot5-2=8$, ikinji agtygyna $2\cdot5+2=12$ kömelek beripdir.

52. 12 we 4 serçe.

53. Atasy $100-45=55$, kakasy 35, ogly $(45-25):2=10$ ýaşynda.

54. Ogly doglanda kakasy 24 ýaşynda eken. Diýmek, häzir ogly 24 ýaşynda.

55. 10 *m* we 1 *m* = 10 *dm*.

56. 4 oglan 3 balyk tutupdyr.

57. 10 guş we 6 tut agajy bar.

58. Amanyň 10 maly, Çarynyň bolsa 6 maly bar.

Küşt tagtasynyň 64 öýjügi bar. Boş öýjükleriň sany mally öýjükleriň sanyndan üç esse köp. Diýmek, boş öýjükler 48 we mally öýjükler 16 sany. Amanyň 4 maly köp. Eger bu dört mal bolmasa, onda olaryň deň mallary, ýagny her biriniň $(16-4):2=6$ maly bolardy. Amanyň 4 maly köp bolany üçin onuň $6+4=10$ maly, Çarynyň bolsa 6 maly bar.

59. Atasynyň ýaşan her 10 ýylynyň üstüne 2 ýyldan goşsaň onuň ýaşy 84 bolýar. 84-i 12-ä bölüp 7-ni alýarys. Diýmek, oglanyň atasy 7 onlugy ýaşapdyr, ýagny ol 70 ýaşynda.

60. Goý, Aman birinji oýny utanda x pisse alan bolsun. Onda ol ikinji oýnundan soň $4\cdot x$, üçünji oýnundan soň $4\cdot4x=16x$, dördünji oýnundan soň $4\cdot16x=64x$, we jemi $x+4x+16x+64x=85x$ pisse alypdyr. $85x=255$

deňlemäni çözüp $x=3$ tapýarys. Aman birinji oýnundan soň 3, ikinji oýnundan soň 12, üçünji oýnundan soň 48, dördünji oýnundan soň bolsa 192 pisse alypdyr.

61. Üç doganyň her haýsy 5 hozdan iýenden soň olaryň galan hozlary beýleki iki dogana berlen hozlaryň sanyna deň boldy. Bu bolsa üç doganyň her birinin öz hozlarynyň $\frac{1}{3}$-ini, üçüsiniň bilelikde bolsa bir dogana berlen, ýagny 15 hozy iýendiklerini aňladýar. Diýmek, kakasy doganlaryň her birine 15 hozdan paýlapdyr.

Meseläni denleme düzüp hem çözüp bolýar. Eger her dogana berlen hozy x bilen belgilesek, onda $3(x-5)=2x$ deňlemäni düzüp bileris. Ony çözüp, $x=15$ jogaby alarys.

62. Maýmynyň, syçanyň we pişigiň bilelikdäki bahasy 12,6 manat bolany üçin aýynyň bahasy $16{,}8-12{,}6=$ $=4{,}2$ manat. Aýynyň, syçanyň we pişigiň bilelikdäki bahasy 11,2 manat bolany üçin maýmynyň bahasy $16{,}8-11{,}2=5{,}6$ manat. Maýmynyň we pişigiň bilelikdäki bahasy 10,2 manat bolany üçin syçanyň bahasy $12{,}6-$ $-10{,}2=2{,}4$ manat.

Pişigiň bahasy $16{,}8-4{,}2-5{,}6-2{,}4=4{,}6$ manat.

63. Transportir üçin 0,4 manat, sirkul üçin 0,72, çyzgyç üçin 0,08 manat töläpdirin.

64. Şäher bilen obanyň arasyndaky uzaklyk 36 *km*-e deň. Bu jogaby $\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x+12=x$ deňlemäni çözüp alýarys.

65. 75 sygyr, 50 goýun we 25 geçi bar.

66. 6 agtygy bar eken. Ol 27 somsa bişiripdir.

67. 10 manat.

68. Meseläni deňleme düzüp çözeliň. Goý, ähli üzüm hasyly x bolsun. Onda zawoda tabşyrylan üzüm $\frac{1}{3}x - 2000$ bolar. Galan üzüm hasyly $x - \left(\frac{1}{3}x - 2000\right) = \frac{2}{3}x + 2000$ bolar. Galan üzümiň $\frac{1}{2}$-ini we 6000 *kg*-y tapýarys.

$$\left(\frac{2}{3}x + 2000\right) \cdot \frac{1}{2} + 6000 = \frac{1}{3}x + 1000 + 6000 = \frac{1x}{3} + 7000.$$

Indi deňleme düzýäris:

$\frac{2}{3}x + 2000 = \frac{1}{3}x + 7000; \frac{1}{3}x = 5000;$ $x = 15000$. Diýmek, daýhan 15000 *kg* üzüm hasylyny ýetişdiripdir.

Onuň $1500 \cdot \frac{1}{3} - 2000 = 3000$ *kg* zawoda tabşyryp,

$12000\frac{1}{2} + 6000 = 12000$ *kg* bolsa bazarda satypdyr.

Jogaby: 15000 *kg*; 3000 *kg*; 12000 *kg*.

69. Depderiň bahasy 25 teňňe, galamyň bahasy 5 teňňe.

70. Goý, Amanyň x manat puly bar bolsun. Onda Mergeniň $x+1,2$ manat puly bolar. Topuň bahasyny a bilen belgiläp, aşakdaky deňlemeler ulgamyny ýazyp bileris:

$$\begin{cases} a - x = 4, \\ a - x - x - 1,2 = 0,8. \end{cases}$$

Bu ulgamy çözüp $a=6$, $x=2$-ni alarys. Diýmek, Amanyň 2 manat, Mergeniň bolsa 3,2 manat pullary bar. Topuň bahasy 6 manat.

71. $x+x+3=36$ deňlemäniň natural sanlarda çözüwi bolmany üçin meseläniň çözüwi ýok.

72. Maşgalada 4 oglan we 3 gyz bar.

73. Birinji derejeli küştçileriň ýaryşynda ýeňiji bolan küştçi 3 utukdan köp gazanyp bilmez. Ikinji derejeli küştçileriň ýaryşynda jemi $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ döw oýnalyp, bu ýaryşa gatnaşyjylar bilelikde 15 utuk gazanyp bilerler. Eger ikinji ýaryşyň ýeňijisi $2\frac{1}{2}$ utuk gazansa, onda galan 5 oýunçy bilelikde $12\frac{1}{2}$ utuk gazanardy. Bu bolsa olaryň her biriniň $2\frac{1}{2}$ utuk ýa-da biriniň ondan hem kän utuk gazanmagyny aňladardy.

Diýmek, ikinji ýaryşyň ýeňijisi hem 3 utukdan az utuk gazanyp bilmeýär. Emma ol 3 utukdan köp utuk hem gazanyp bilmeýär. Sebäbi ol birinji ýaryşyň ýeňijisi bilen deň utuk gazanypdyr. Diýmek, ikinji ýaryşyň oýunçylary utuklary diňe aşakdaky ýaly paýlaşyp bilerler: ýaryşyň ýeňijisi 3 utuk, 4 oýunçynyň her haýsy $2\frac{1}{2}$ utuk, bir oýunçy bolsa 2 utuk gazanypdyr.

74. Goý, ýaryşa gatnaşan 8-nji synp okuwçylarynyň sany x bolsun. Onda ýaryşa gatnaşan 9-njy synp okuwçylarynyň sany $10x$ bolar we ýaryşa jemi $11x$ oýunçynyň gatnaşanlygy belli bolar. Ýaryşa gatnaşanlaryň her biri $11x - 1$ döw oýnap, ähli oýunçylaryň oýnan döwleriniň sany $\frac{11x(11x-1)}{2}$ bolar. Diýmek, ähli oýunçylaryň gazanjak utuklarynyň sany hem $\frac{11x(11x-1)}{2}$ bolar. Şerte görä 8-nji synp okuwçylary 9-njy synp okuwçylaryna garanyňda 4,5 esse az utuk gazanypdyrlar. Diýmek, ähli utuklaryň 5,5 bölegi, ýagny $\frac{11x(11x-1)}{2}:5$, $5=x(11x-1)$ utuk 8-nji synp okuwçylarynyň paýyna düşýär. Her bir okuwçy iň kän bolanda, oýnan ähli döwlerini utup, $11x-1$ utuk gazanyp

bilýär. Şeýlelik bilen, her bir ýaryşa gatnaşan 8-nji synp okuwçysy öz oýnan ähli döwüni (şol sanda 8-nji synpdan bolan garşydaşlaryny hem) utan bolup çykýar. Gapma-garşylyk alyndy. Bu gapma-garşylyk diňe 8-nji synp okuwçysy 1 sany bolanda çözülýär. Diýmek, $x = 1$ we onuň gazanany $11 \cdot 1 - 1 = 10$ utuga deň.

75. Birinji alyjy ýag alandan soň çelekde $100\% - 25\% = 75\%$ ýag galar. Bu ýagyň 30%-i $75 \cdot \frac{30}{100} = 22{,}5\%$ bolar. Onda ikinji alyjy ýag alandan soň çelekde $75\% - 22{,}5\% = 52{,}5\%$ ýag galar. Bu ýagyň 40%-i $52{,}5 \cdot \frac{40}{100} = 21\%$ bolar. Üçünji alyjy ýag alandan soň çelekde $52{,}5\% - 21\% = 31{,}5\%$ ýag galar.

76. Harydyň bahasy gymmatladylandan soň $100\% + 10\% = 110\%$ bolar. Arzanladylandan soň harydyň bahasy $110 \cdot \frac{10}{100} = 11\%$ arzan bolar. Harydyň soňky bahasy $110\% - 11\% = 99\%$ bolar. Diýmek, harydyň bahasy 1% arzanlar.

77. Toplaryň ikinjisi birinjisiniň $\frac{100}{150} \cdot 100\% = 66\frac{2}{3}\%$-ini düzýär. Diýmek, ikinji top birinji topdan $100\% - 66\frac{2}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$ arzan.

78. Birinji enjam goýlandan soňra sagatda 75 *kw/sag* elektrik energiýasy harçlanyp başlandy. Ikinji enjamyň goýulmagy elektrik energiýasyny ýene-de 20% tygşytlamaga mümkinçilik berdi. 75-iň 20%-i 15-e deň. Onda $75 - 15 = 60$. Diýmek, täze enjamlar goýlandan soňra

zawod sagatda 60 *kw/sag* elektrik energiýasyny harçlap başlady.

79. Birinji harydyň bahasy birinji gezek arzanladylanda onuň bahasy öňki bahasynyň 85%-e deň bolýar. Ikinji gezek arzanladylanda onuň bahasy başdaky bahasynyň

$$\left(85 \cdot \frac{85}{100}\right)\% = \frac{7225}{100}\% = 72,25\%\text{-e deň bolýar.}$$

Ikinji harydyň bahasy 30%-ine arzanladylandan soň onuň bahasy öňki bahasynyň 70%-ine deň bolýar. Diýmek, ikinji harydyň bahasy birinji harydyň bahasyna görä arzan.

80. Ýoluň ikinji ýarymyny geçmek üçin awtobus ýoluň birinji ýarymyna sarp eden wagtynyň $\frac{100}{125} = \frac{4}{5}$ bölegini sarp etdi. Awtobusyň ýoluň birinji we ikinji ýarymlaryny geçmek üçin sarp eden wagtlarynyň tapawudy $\frac{1}{5}$-e deň. Diýmek, bu wagt $\frac{1}{2}$ sagada deň. Diýmek, awtobus ýoluň birinji ýarymyny $\frac{1}{2} \cdot 5 = 2\frac{1}{2}$ sagatda, ikinji ýarymyny 2 sagatda, ähli ýoly bolsa $2\frac{1}{2} + 2 = 4\frac{1}{2}$ sagatda geçipdir.

81. Myradyň tizligi Amanyň tizliginiň $\frac{9}{10} \cdot \frac{11}{10} = \frac{99}{100}$ bölegini düzýär. Diýmek, Aman mekdebe öň barar.

III BAP

MATEMATIKI SOFIZMLER

Göräýmäge dogry, emma aslynda bilgeşleýin toslanan, logika ters gelýän pikire (netije çykarma) sofizm diýilýär. Adatça, matematiki sofizmlerde gizlin ýagdaýda gadagan edilen amallar (meselem, nola bölmek, otrisatel aňlatmadan jübüt derejeli kök almak we ş.m.) ýerine ýetirilýär ýa-da düzgünleri, formulalary ýa-da teoremalary ulanmagyň şertleri göz öňünde tutulmaýar. Käbir sofizmlerde bolsa ýalňyş çyzgylary ulanmak arkaly pikir ýöretmeler geçirilýär we manysyz, ýalňyş netijeler alynýar.

Matematiki sofizmleri derňemek, pikir ýoretmelerdäki ýol berlen ýalňyşlyklary öwrenmek okuwçylarda dogry pikirlenmek endigini, mysal-meseleleri çözenlerinde we teoremalary subut edenlerinde örän ünsli, ägä bolmalydyklaryny terbiýeleýär. Matematiki sofizmleri derňemek okuwçylaryň logiki pikirlenmek ukyplaryny, dogry pikir ýöretmek başarnyklaryny ösdürýär. Sofizmiň ýalňyşlygyny tapmak, soňra şuňa meňzeş ýalňyşlyklara ýol berilmeginiň öňüni alýar.

Matematiki sofizmler käbir matematiki maglumatlara has çuňňur düşünmeklige ýardam edýär. Meselem, 4-nji synpyň matematikasynda «Sany nola bölmek bolmaýar» diýen tassyklama öwrenilýär. Emma

okuwçylaryň köpüsi wagt geçenden soň bu tassyklamany ýatdan çykarýarlar we nola bölmek bilen baglanyşykly ýalňyşlyklara ýol berýärler. Emma okuwçylara nola bölmek arkaly 5 = 9 deňligi subut edip görkezmek we bu subudyň ýalňyşlygyny olaryň özlerine tapdyrmak, soňra bu ýalňyşlygyň gaýdyp gaýtalanmazlygyna ýardam edýär.

Matematiki sofizmler okuwçylarda uly gyzyklanma hem döredýär. Diýmek, sofizmler okuwçylara matematikany çuňňur öwretmegiň serişdesi bolup hyzmat edýär.

SOFIZMLER

1. $2 \cdot 2 = 5$ deňligi subut edýäris.

Munuň üçin 4:4=5:5 dogry san deňligini ýazýarys. Bu deňligiň iki böleginden hem ýaýyň daşyna umumy köpeldijini çykaryp alarys:

$$4(1:1)=5(1:1).$$

Ýaýdaky sanlar deňdir, şoňa görä-de 4=5 ýa-da $2 \cdot 2=5$.

2. 2=3 deňligi subut edeliň.

Munuň üçin 4–10 = 9–15 dogry deňligi ýazyp, onuň üstünde aşakdaky ýaly özgertmeleri geçirýäris:

$$4-10+6\frac{1}{4}=9-15+6\frac{1}{4};$$

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2;$$

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2};$$

Diýmek, 2 = 3.

3. 7=1 deňligi subut edýäris.

Munuň üçin 7-niň we 1-iň her birinden 4-i aýyrýarys we netijede, 3 we −3 sanlary alarys. Ol sanlary kwadrata göterip, özara deň $3^2=(-3)^2=9$ alarys. Diýmek, 7 we 1 sanlar hem özara deň bolmaly.

4. 6=7 deňligi subut edeliň.

Aşakdaky deňlemeler ulgamyny ornuna goýmak usuly bilen çözýäris:

$$\begin{cases} 3x + y = 7, \\ x - 2 = -\dfrac{y}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 7, \\ x = 2 - \dfrac{y}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} 3\left(2 - \dfrac{y}{3}\right) + y = 7, \\ x = 2 - \dfrac{y}{3}; \end{cases}$$

$$6 - y + y = 7, \ \ 6 = 7.$$

5. Piliň agramy syçanyň agramyna deň.

Goý, piliň agramy a(*kg*), syçanyň agramy bolsa b (*kg*) bolsun. Olaryň agramlarynyň orta arifmetiki bahasyny ϑ bilen belgiläliň. Onda

$$a+b=2\vartheta,\ a=2\vartheta-b,\ a-2\vartheta=-b$$

bolar. Soňky iki deňligi agzama-agza köpeldip alarys:

$$a^2 - 2a\vartheta = b^2 - 2b\vartheta.$$

Bu deňligiň her bölegine ϑ^2-y goşup alarys:

$$a^2-2a\vartheta + \vartheta^2=b^2-2b\vartheta + \vartheta^2 \text{ ýa-da } (a-\vartheta)^2=(b-\vartheta)^2.$$

Soňky deňlikden

$$(a-\vartheta)=(b-\vartheta) \text{ ýa-da } a=b$$

alarys. Diýmek, piliň agramy syçanyň agramyna deň.

6. Otluçöp telegraf sütüninden iki esse uzyndyr.

Goý, otluçöpiň uzynlygy a (*dm*), telegraf sütüniniň uzynlygy bolsa b (*dm*) bolsun. b-niň we a-nyň tapawudyny c bilen belgiläp alarys:

$$b-a=c,\ b=a+c.$$

Bu deňlikleri agzama-agza köpeldip alarys:

$$b^2-ba=c^2+ca.$$

Soňky deňligiň iki böleginden hem bc-ni aýryp alarys:

$b^2-ba-bc=c^2+ca-bc$ ýa-da $b(b-a-c)=-c(b-a-c)$.

Bu ýerden $b=-c$ deňligi alarys. $c=b-a$ bolýanlygyny göz öňünde tutsak,

$$b=a-b \text{ ýa-da } a=2b$$

deňligi alarys. Diýmek, otluçöpiň uzynlygy (a), telegraf sütüniniň uzynlygyndan (b) iki esse uly.

7. 2 =−2 deňligiň subudy.

16−16+4=1− 6+9 deňligiň dogrulygy şübhesizdir.

$4^2-2\cdot4\cdot2+2^2=1^2-2\cdot1\cdot3+3^2$;

$(4-2)^2=(1-3)^2$;

$4-2=1-3$;

$2=-2$.

8. Otrisatel san položitel sandan uludyr.

$a>0$ we $b>0$ iki san alyp, aşakdaky iki gatnaşygy deňeşdireliň: $\frac{a}{-b}$ we $\frac{-a}{b}$. Bu gatnaşyklar deňdir, çünki olaryň her biri $-\frac{a}{b}$ deňdir. Proporsiýa düzýäris:

$$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}.$$

Eger proporsiýada birinji gatnaşygyň ilkinji agzasy özünden soň gelýän agzadan uly bolsa, onda ikinji gatnaşykda hem bu şert ýerine ýetmeli. Biziň mysalymyzda $a>-b$, diýmek, $-a>b$ şert hem ýerine ýetmeli. Onda otrisatel san položitel sandan uly bolar.

9. Noldan tapawutly islendik san özüne garşylykly sana deňdir.

Noldan tapawutly erkin a sany alalyň we ony x bilen belgiläliň: $x=a$. Bu deňligiň iki bölegini hem $-4a$ köpeldeliň:

$-4ax = -4a^2$ ýa-da $4a^2 - 4ax = 0$.

Bu deňligiň iki bölegine hem x^2-y goşup alarys:

$x^2 - 4ax + 4a^2 = x^2$ ýa-da $(x - 2a)^2 = x^2$.

Diýmek, $x-2a=x$. $x=a$ deňligi göz öňünde tutup alarys:

$a-2a=a$ ýa-da $a= -a$.

10. Deň däl iki sanyň elmydama birinjisi ikinjisinden uludyr.

Goý, a we b erkin sanlar we $a\neq b$ bolsun. Onda $(a - b)^2 > 0$, ýagny $a^2-2ab + b^2>0$, ýagny $a^2 + b^2 > 2ab$.

Bu deňsizligiň iki bölegine-de $-2b^2$-y goşup alarys:

$a^2 - b^2 > 2ab - 2b^2$ ýa-da $(a-b)(a+b)>2b(a-b)$.

Deňsizligiň iki bölegini hem $a-b$ bölüp alarys: $a + b > 2b$. Bu ýerden bolsa $a > b$ gelip çykýar.

11. Islendik san özünden iki esse uly sana deň.

Goý, a islendik san bolsun. $a^2 - a^2 = a^2 - a^2$ toždestwo alalyň. Onuň üstünde aşakdaky ýaly özgertmeleri geçireliň:

$$a(a - a) = (a - a)(a + a).$$

Bu toždestwony ýönekeýleşdirip $a=2a$ deňligi alarys.

12. $2=3$ deňligi subut etmegiň ýene bir täsin «usulyny» getireliň.

Islendik b san we $a = b + 1$ san alalyň. Bu deňligiň iki bölegini hem a-b köpeldeliň:

$a^2 - ab = ab + a - b^2 - b$ ýa-da $a^2 + b^2 = 2ab + a-b$.

Bu deňlik islendik b we $a = b + 1$ deňlik bilen berlen a san üçin dogrudyr. Onda $a = 2$ we $b = 2$ bahalary

goýup alarys:

$$4 + 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 - 2,$$

ýagny deňlik dogry. Diýmek, $a = b + 1$ berlen deňlik hem $a=b=2$ bolanda dogry. Şeýlelikde, $2=2+1$, ýagny $2=3$.

13. $a+b=b+a$ jem üçin orun çalşyrma kanunyň subudyny getireliň.

Bu häsiýet ýerine ýetmeýär, diýip güman edeliň. Şeýlelikde, islendik a we b üçin $a+b \neq b+a \cdot b=a$ diýip alarys: $a+a \neq a+a$, bu bolsa mümkin däldir. Alnan gapma-garşylyk jem üçin orun çalşyrma kanuny nädogry diýip güman etmämiziň ýalňyşdygyny görkezýär, şoňa görä-de, elmydama $a + b = b + a$ deňlik ýerine ýetýär. Bu mysalda tassyklamanyň özi dogry, ýöne subudy ýalňyşdyr. Nirede ýalňyşlyk göýberilipdir?

14. $5 = 6$ subut edeli.

$35 + 10 - 45 = 42 + 12 - 54$ deňligiň dogrudygyny barlamak kyn däldir. Umumy köpeldijini ýaýyň daşyna çykaryp bu deňligi aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$5(7+2-9) = 6(7+2-9).$$

Bu deňligiň iki bölegini hem $(7+2-9)$-a bölüp $5 = 6$-ny alarys.

15. $4 = 5$ subut edeliň.

$a = 4$ we $b = 5$ iki san alalyň we olaryň ýarym jemini $c = \frac{a+b}{2}$ bilen belgiläliň. Onda

$$a=2c - b \text{ we } 2c - a = b$$

bolar. Bu deňlikleri agzama-agza köpeldip, alarys:

$$a^2 - 2ac=b^2 - 2bc.$$

Deňligiň iki bölegine hem c^2-y goşup,

$a^2 - 2ac - c^2 = b^2 - 2bc + c^2$ ýa-da $(a-c)^2 = (b - c)^2$

deňligi alarys. Diýmek,

$a - c = b - c$, bu ýerden $a = b$, ýagny 4=5 gelip çykýar.

16. Ýarym bitine deňdir.

Islendik a we b sanlar üçin

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

deňlik dogrudyr. Goý, $b = a$ bolsun, onda

$a^2 - a^2 = (a+a)(a-a)$ ýa-da $a(a-a) = (a+a)(a-a)$ bolar. Bu deňligiň iki bölegini hem $(a - a)$ bölüp $a = a + a$ ýa-da $a = 2a$-ny alarys. Diýmek, $\frac{a}{2} = a$, ýagny ýarym bitine deňdir.

17. Islendik san onuň ýarysyna deň.

Iki sany deň položitel a we b sanlary alalyň. $a = b$ deňligiň iki bölegini hem a sana köpeldeliň we iki böleginden hem

$b^2 - y$ aýryp alarys:

$$a^2 - b^2 = ab - b^2.$$

Bu deňligi köpeldijilere dagydyp,

$$(a+b)(a-b) = b(a-b)$$

alarys. Bu deňligiň iki bölegini hem $(a - b)$ bölüp $a + b = b$ deňligi alarys. Ýöne, şert boýunça $b = a$, bu ýerden $2a = a$-ny alarys. Islendik sanyň özüniň ýarysyna deňdigini aldyk.

18. 5=7 subut edeliň.

Erkin položitel b san we b sandan 1,5 esse uly bolan a san alalyň. $a = 1{,}5b$ deňligiň üstünde özgertmeler geçirip

$$10a = 15b \text{ we } 14a = 21b$$

deňlikleri alarys. Bu deňliklerden bolsa

$14a - 10a = 21b - 15b$ ýa-da $15b - 10a = 21b - 14a$-ny alarys. Diýmek,

$$5(3b - 2a) = 7(3b - 2a).$$

Bu deňligiň iki bölegini hem $3b - 2a$ gysgaldyp, $5 = 7$-ni alarys.

19. $9 = 5$ subut edeliň.

$9 + 5 = 2 \cdot 7$ deňligiň dogrudygy aýdyňdyr. Bu deňligiň iki bölegini hem 9–5-e köpeldip,
$9^2 - 5^2 = 2 \cdot 7 \cdot 9 - 2 \cdot 7 \cdot 5$ ýa-da $9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 = 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5$ alarys. Alnan deňligiň iki bölegine hem $49 = 7^2$ goşup

$(9-7)^2=(5-7)^2$-yny alarys. Eger kwadratlary deň bolsa, onda bu sanlaryň özleri hem deňdirler. Şonuň üçin $9-7=5-7$. Diýmek, $9=5$.

20. $5=4$ subut edeliň.

Goý, $x=5$, $y=4$ bolsun, onda $x+y=9$ bolar. Bu deňligiň iki bölegini hem $x-ay$-e köpeldip,

$$x^2-y^2=9x-9y \text{ ýa-da } x^2-9x=y^2-9y$$

alarys. Bu deňligiň iki bölegine hem $\frac{81}{4}$-i goşup,

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2=\left(y-\frac{9}{2}\right)^2$$

deňligi alarys. Soňky deňlikden

$$x-\frac{9}{2}=y-\frac{9}{2}$$

alarys. Diýmek, $x = y$, ýagny $5=4$.

21. Algebraik sofizmlere bagyşlanan matematikadan gurnaklaryň bir maslahatynda Ahmet hemme sanlaryň özara deňdigini subut etmäge synanyşdy. Ol özüniň örän geň tassyklamasyna degişli üç sany subut getirip görkezdi. Olary aýdyňlaşdyryň:

1) goý, a we b islendik san, özem $a>b$ bolsun. $a-b=c$ belgileme girizeliň, bu ýerde c položitel san. Diýmek, $a=b+c$. Bu deňligiň iki bölegi hem $a-b$ položitel sana köpeldeliň we alnan aňlatmada özgertmeler geçireliň:

$$a^2-ab=ab+ac-b^2-bc;\ a^2-ab-ac=ab-b^2-bc;$$
$$a(a-b-c) = b(a-b-c).$$

Bu deňligiň iki bölegini hem şol bir $a-b-c$ sana bölüp $a = b$ alarys.

2) goý, a we b islendik san bolsun. Olaryň orta arifmetiki bahasyny c bilen belgiläliň. Diýmek,

$c = \frac{a+b}{2}$ bu ýerden $2c-a=b$ we $a = 2c - b$

alarys. Bu deňlikleri agzama-agza köpeldeliň:

$$2ac-a^2=2bc-b^2.$$

Bu deňligiň iki bölegine hem $-c^2$-y goşup,

$-c^2+2ac-a^2=-c^2+2bc-b^2$ ýa-da $-(c-a)^2= -(c-b)^2$

alarys. Soňky deňligiň iki bölegini hem -1-e köpeldip, $(c-a)^2 = (c-b)^2$ deňligi alarys. Diýmek,

$c - a = c - b$ ýa-da $-a = -b$,

şoňa görä-de $a = b$.

Şert boýunça a we b erkin sanlardyr, onda biz ähli sanlaryň deňdigini subut etdik.

3) $3 - 1 = 6 - 4$ deňlik düşnüklidir. Bu deňligiň iki bölegini hem $-$ 1-e köpeldeliň we $\frac{9}{4}$ goşalyň:

$1-3=4-6$; $1-2\cdot 1\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4} = 4-2\cdot 2\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}$;

$\left(1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(2-\frac{3}{2}\right)^2$.

Bu deňlikden $1-\frac{3}{2}=2-\frac{3}{2}$ alarys. Şunlukda, $1=2$. Eger $1=2$ bolsa, onda bu deňligiň iki bölegine hem 1-i goşup, $2=3$ soňra $3=4$ we ş.m. alarys. Diýmek, $1=2=3=4=\ldots$.

Gurnagyň agzalary soňky ýagdaýyň subudyndaky ýetmezçiligi derrew görkezdiler, çünki Ähmet islendik san üçin deňligi subut etmegi boýun alypdy. Ol bolsa diňe bitin sanlar üçin deňligi subut etdi.

22. Islendik iki položitel sanyň jemi nola deňdir.

Goý, a we b islendik iki položitel san bolsun, onda olaryň jemi $c=a+b$ san hem položitel sandyr. Bu deňligiň iki bölegini hem $a+b$ sana köpeldip alarys:

$$c(a+b)=(a+b)^2;\ ac+bc=a^2+2ab+b^2;$$
$$a^2+2ab+b^2-ac-bc=0.$$

Soňky deňligiň çep bölegini köpeldijilere dagydalyň:

$(a^2+ab-ac)+(ab+b^2-bc)=0$; $a(a+b-c)+b(a+b-c)=0$.

Bu aňlatmany $a+b-c$ gysgaldyp, $a+b=0$-y alarys.

23. Noluň islendik sandan uludygyny subut edeliň.

Eger a otrisatel san bolsa, onda tassyklama aýdyňdyr. Goý, a islendik uly položitel san bolsun. $a-1<a$ deňsizligiň dogrudygy düşnüklidir. Bu deňsizligiň iki bölegini hem $-a$ sana köpeldip, $-a^2+a<-a^2$-y alarys. Alnan deňsizligiň iki bölegine hem a^2-y goşup, alarys:

$-a^2+a+a^2<-a^2+a^2$, ýagny $a<0$.

Diýmek, islendik položitel san noldan kiçidir.

24. Islendik sanyň nola deňdiginiň iki subudyny getireliň.

1) erkin a san alalyň we onuň ýarysyny x bilen belgiläliň, diýmek, $2x=a$ bolar. Bu deňligiň iki bölegini hem a sana köpeldip,

$$2ax=a^2 \text{ ýa-da } a^2-2ax=0$$

alarys. Soňky deňligiň iki bölegine hem x^2-y goşup, alarys:

$a^2-2ax+x^2=x^2$; $(a-x)^2=x^2$ ýa-da $(x-a)^2=x^2$.

Şunlukda, $x-a=x$. Diýmek, $a=0$.

2) aşakdaky jeme garalyň:

$a-a+a-a+a-a+a-\ldots$ we şeýle tükeniksizlige çenli. Bu jemi aşakdaky ýaly iki görnüşde aňlatmak bolýar:

$$(a-a)+(a-a)+(a-a)+...=0 \text{ ýa-da}$$
$$a-(a-a)-(a-a)-(a-a)-...=a.$$

Bu deňlikleriň çep bölekleri deň, diýmek, olaryň sag bölekleri hem deňdirler.

25. Islendik san özünden bir birlik uly sana deňdir.

Goý, käbir a san berlen bolsun. $a=a+1$ deňligi subut etmek talap edilýär. Aýdyň toždestwo garalyň:

$$a^2-a(2a-1)=(a-1)2-(a-1)(2a-1).$$

Bu toždestwonyň iki bölegine-de $\frac{2a-1}{2}$ sanyň kwadratyny goşup, biz iki böleginden-de doly kwadrat alarys:

$$\left(a-\frac{2a+1}{2}\right)^2=\left(a-\frac{2a-1}{2}\right)^2. \qquad (1)$$

(1) deňligiň iki böleginden hem kwadrat kök alyp, alarys:

$$\left(a-\frac{2a+1}{2}\right)=\left(a-\frac{2a-1}{2}\right) \qquad (2)$$

ýa-da $a-\frac{2a+1}{2}=a+1-\frac{2a+1}{2}$, ýa-da $a = a + 1$.

26. $a > a + 1$ (a – natural san) deňsizligi subut edeliň.

$\left(\frac{1}{n}\right)^a>\left(\frac{1}{n}\right)^{a+1}$ dogry deňsizlige garalyň, bu ýerde n – birden uly natural san. Deňsizligiň iki böleginden hem onluk logarifm alalyň:

$$a\lg\frac{1}{n}>(a+1)\lg\frac{1}{n}.$$

Bu deňsizligiň iki bölegini hem $\lg\frac{1}{n}$-e bölüp alarys: $a>a+1$.

27. Gapma-garşylykly sanlaryň deňligini subut edeliň.

Käbir a položitel sana we oňa gapma-garşylykly $-a$ sana garalyň. $a=-a$ deňligi subut edeliň. Deňligiň iki bölegini hem kwadrata götereliň: $a^2=(-a)^2$. Bu deňligi logarifmläp alarys:

$2\lg a=2\lg(-a)$, ýa-da $\lg a=\lg(-a)$,

bu ýerden $a=-a$-ny alarys.

28. 2=4.

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$ toždestwodan

$(\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}=(1-\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}$ ýa-da $\cos^3 x=(1-\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}$

deňlikleri alarys. Alnan deňligiň iki bölegine-de 3-i goşalyň.

Alnan deňlikde x-iň ýerine 180°-y goýup: $-1+3=1+3$, ýagny 2=4 deňligi alarys.

29. $f(x)=\sqrt{x^2}$ otrisatel däl funksiýadan $\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}\,dx$ integralyň nola deňdigini subut edeliň.

Alarys: $\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}\,dx=\int_{-1}^{1}x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$

Jogaplar

1. 4:4=5:5 toždestwonyň sag we çep böleginde ýaýyň daşyna umumy köpeldiji çykarylanda ýalňyşlyk göýberildi.

2. $\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2$ kwadrat deňlik $2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}$ deňlige däl-de, eýsem, $\left|2-\frac{5}{2}\right|=\left|3-\frac{5}{2}\right|$ deňlige deňgüýçlüdir.

3. Iki sanyň kwadratynyň deňdiginden, bu sanlaryň deňdigi gelip çykmaýar.

4. Berlen ulgamyň deňlemeleri ylalaşmaýar.

5. $(a-\vartheta)^2=(b-\vartheta)^2$ kwadrat deňlik $a-\vartheta=b-\vartheta$ deňlige deňgüýçli däldir. Bu kwadrat deňlik $|a-\vartheta|=|b-\vartheta|$ deňlige deňgüýçlüdir.

6. $b-a-c$ bölüp bolanok, çünki $b-a-c=0$.

7. $(4-2)^2=(1-3)^2$ kwadrat deňlik $4-2=1-3$ deňlige däl-de, eýsem, $|4-2|=|1-3|$ deňlige deňgüýçlüdir.

8. Eger-de proporsiýanyň käbir agzasy otrisatel bolsa we proporsiýada birinji gatnaşygyň birinji agzasy ondan soňky agzadan uly bolsa, onda ikinji gatnaşygyň birinji agzasynyň soňky agzadan uly bolmazlygy hem mümkindir.

9. $(x-2a)^2=x^2$ kwadrat deňlik $x-2a=x$ deňlige deňgüýçli diýlende ýalňyşlyk göýberildi. Bu kwadrat deňlik

$|x-2a|=|x|$ deňlige deňgüýçlüdir.

10. $(a+b)(a-b)>2b(a-b)$ deňsizligiň iki bölegini hem $a-b$ bölünende deňsizligiň belgisiniň gapma-garşylykly tarapa öwrülmegi mümkindir (eger $a-b<0$ bolsa).

11. $0-a$ bölüp bolanok, ýagny $a-a=0$.

12. $a=b+1$ bolanda berlen deňlik dogrudyr, şoňa görä-de $a=b=2$ almak bolanok.

13. Inkär etme nädogry gurlan. Şeýle bir a we b sanlar tapylyp, $a+b\neq b+a$ şert ýerine ýetsin diýip aýtmak gerek.

14. Nola bölmek bolmaýar. $a\cdot 0=b\cdot 0=0$ we $a=b$ bolmagy hökman däldir. Bu sofizm bu tassyklamany açyp görkezýär.

15. $(a-c)^2=(b-c)^2$ deňlikden $a-c=b-c$ deňlik gelip çykmaýar. $(a-c)^2=(b-c)^2$ deňlikden $|a-c|=|b-c|$ deňlik gelip çykýar.

16. Nola bölmek bolmaýar, ýagny $a-a=0$.

17. Ikinji köpeldiji nola deň, ýagny $a-b=0$.

18. Ikinji köpeldiji nola deň, ýagny $3b-2a=0$.

19. Sanlaryň kwadratynyň deňdiginden, bu sanlaryň deňdigi gelip çykmaýar.

20. $\left(x-\frac{9}{2}\right)^2=\left(y-\frac{9}{2}\right)^2$ kwadrat deňlik $x-\frac{9}{2}=y-\frac{9}{2}$ deňlige deňgüýçli däldir. Bu kwadrat deňlik $\left|x-\frac{9}{2}\right|=$ $=\left|y-\frac{9}{2}\right|$ deňlige deňgüýçlüdir.

21. 1) ikinji köpeldiji nola deň.

2) sanlaryň kwadratynyň deňdiginden, bu sanlaryň deňdigi gelip çykmaýar.

3) sanlaryň kwadratynyň deňdiginden, bu sanlaryň deňdigi gelip çykmaýar.

22. Ikinji köpeldiji nola deň.

23. Deňsizligiň iki bölegi hem otrisatel sana köpeldilende, deňsizligiň belgisini gapma-garşylykly tarapa üýtgetmeli.

24. 1) sanlaryň kwadratynyň deňdiginden, bu sanlaryň deňdigi gelip çykmaýar.

2) $a \neq 0$ bolanda $a-a+a-a+\ldots$ aňlatmalaryň manysy ýokdur.

25. (1) deňlikden (2) deňlige geçilende ýalňyşlyk goýberildi, çünki

$$a-\frac{2a+1}{2}<0, \quad a-\frac{2a-1}{2}>0.$$

26. Sofizmde logarifmlemek mümkin, ýöne $\lg\frac{1}{n}$ bölünende deňsizligiň alamatyny üýtgetmek ýatdan çykarylypdyr.

27. $-a<0$, onda $a^2=(-a)^2$ deňligiň iki bölegi logarifmlenende $2\lg a=2\lg|-a|$ görnüşde ýazmalydy.

28. $(\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}=|\cos x|^3$.

29. $\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}\,dx=\int_{-1}^{1}x\,dx$ deňlik nädogry. Şeýle ýazmaly:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}\,dx=\int_{-1}^{1}|x|\,dx.$$

$$|x|=\begin{cases}-x, & \text{eger } -1\le x<0 \text{ bolsa}\\ x, & \text{eger } 0\le x\le 1 \text{ bolsa,}\end{cases}$$

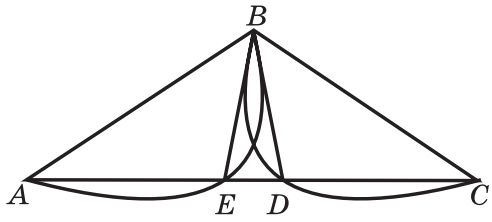
$$\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}\,dx=\int_{-1}^{1}|x|\,dx=\int_{-1}^{0}-x\,dx+\int_{0}^{1}x\,dx=-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}=$$

$$=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0=1.$$

GEOMETRIK SOFIZMLER

1. Nokatdan **göni çyzyga iki perpendikulýar geçirip** bolýar.

Göni çyzygyň üstünde ýatmaýan nokatdan oňa perpendikulýar bolan iki göni çyzygy geçirip bolýandygyny «subut edeliň».

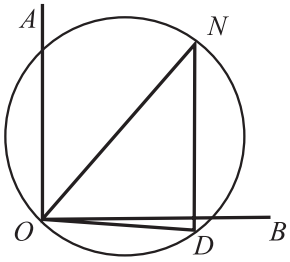


Munuň üçin *ABC* üçburçluk alalyň. Ol üçburçlugyň *AB* we *BC* taraplary diametrler bolar ýaly edip ýarymtöwerekleri çyzalyň. Goý, bu ýarymtöwerekler *AC* tarapy degişlilikde, *E* we *D* nokatlarda kesýän bolsunlar. *E* we *D* nokatlary göni çyzyklar arkaly *B* nokat bilen birikdirýäris. *AEB* burç diametre daýanýan içinden çyzylan burç bolany üçin ol göni burçdur. Edil şuňa meňzeş diametre daýanýanlygy üçin içinden çyzylan *BDC* burç hem göni burçdur. Diýmek, *B* nokatdan *AC* göni çyzyga perpendikulýar bolan iki sany *BE* we *BD* göni çyzyklary geçirip bolar.

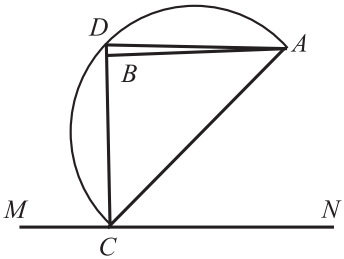
2. Tekizlikde göni çyzygyň üstünde alnan nokatdan bu göni çyzyga iki perpendikulýar geçirip bolýar.

AOB göni burç alýarys. *O* depeden içki burça erkin şöhle geçireliň we onda *O* nokatdan erkin *ON* kesim goýalyň. Bu kesimiň ortasyndan merkez ýaly *O* we *N* nokatlardan geçýän töwerek çyzalyň.

AO göni çyzyga parallel *N* nokatdan göni çyzyk geçireliň. Goý, bu göni çyzyk töweregi *D* nokatda kesýän bolsun. *O* we *D* nokatlary kesim bilen birikdireliň. *ODN* burç diametre daýanýan, içinden çyzylan ýaly göni burçdur, çünki $ND \| AO$, onda *DOA* burç hem göni burçdur. Şunlukda, $OB \perp AO$ we $OD \perp AO$. Ýalňyşlyk nirede?



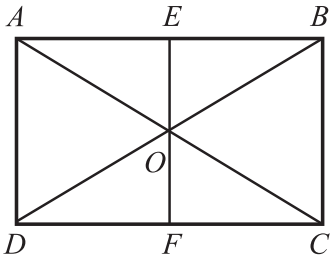
3. Göni çyzykda ýatmaýan nokatdan berlen göni çyzyga parallel iki göni çyzyk geçirip bolýar.



Goý, MN göni çyzyk we onuň daşynda A nokat berlen bolsun. A nokadyň üstünden MN göni çyzyga parallel bolan AB göni çyzygy geçireliň. MN göni çyzykda käbir C nokat alalyň. AC kesimi diametr hökmünde alyp ýarym töwerek çyzalyň. MN göni çyzygyň C nokadyndan geçýän perpendikulýar bilen bu ýarym töweregiň kesişme nokadyny D bilen belgiläliň. A we D nokatlaryň üstünden göni çyzyk geçireliň. CDA gönüburç we $CD \perp MN$ bolany üçin AD göni çyzyk MN göni çyzyga parallel. Diýmek, A nokadyň üsti bilen MN göni çyzyga parallel iki göni çyzyk geçýär. Ýalňyşlygy tapyň.

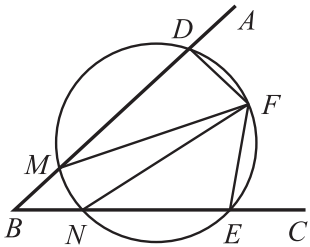
4. Göni burç kütek burça deňdir.

Subut etmek üçin şeýle gurluşlary amala aşyralyň. Käbir AB kesim alalyň hem-de onuň A we B uçlarynda göni we kütek burç guralyň. Bu burçlaryň taraplarynda olaryň depelerinden AD we BC deň kesimleri goýalyň. AB we DC kesimleriň her birini deň böleliň we bölünme nokatlardan bu kesimlere perpendikulýar geçireliň. AB we DC göni çyzyklar parallel däldirler, onda bu perpendikulýarlar käbir O nokatda kesişerler. Bu O nokady kesimleriň A, B, C we D nokatlary bilen birikdireliň.



Alnan AOD we BOC üçburçluklar deňdir, çünki $AO=OB$, $AD=BC$, $DO=CO$, we diýmek,

$\angle OAD = \angle OBC$, ýöne $\angle EAO = \angle EBO$, şoňa görä-de $\angle DAE = \angle CBE$, ýagny göni burç kütek burça deňdir. Ýalňyşlygy tapyň.



5. Islendik töweregiň iki merkezi bar.

ABC ýiti burç guralyň. Onuň taraplarynda *D* we *E* nokat alalyň we olardan burçuň taraplaryna perpendikulýar geçireliň. Goý, bu perpendikulýarlar *F* nokatda kesişýän bolsunlar. *D, F* we *E* üç nokadyň üstünden töwerek geçireliň.

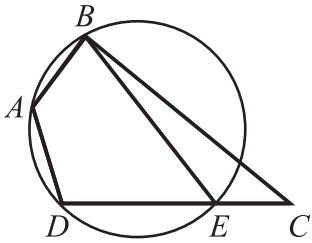
Bu töwerek burçuň taraplaryny *M* we *N* nokatlarda kesýär.

MF we *NF* kesimler gurlan töweregiň diametrleri bolýar, çünki olara bu töweregiň içinde çyzylan *MDF* we *NEF* göni burçlar daýanýarlar. *MF* we *NF* kesimleriň ortalary gurlan töweregiň merkezleri bolar.

6. Üçburçlugyň daşky burçy, onuň bilen çatyk bolmadyk içki burça deňdir.

A we *C* burçlaryň jemi 180°-a deň bolan *ABCD* dörtburçluga garalyň.

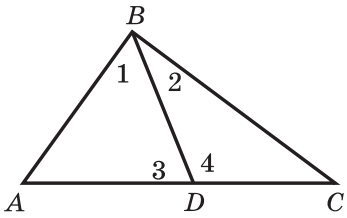
D, A we *B* depelerden töwerek geçireliň. Goý, bu töwerek *DC* tarapy *E* nokatda kesýän bolsun.



E nokady *B* nokat bilen birleşdireliň. Onda $\angle C = 180° - \angle A$ (gurluşy boýunça), $\angle BED = 180° - \angle A$ (*ABED* dörtburçluk içinden çyzylan, diýmek, onuň *BED* we *BAD* gapma-garşylykly burçlarynyň je-

mi 180°-a deňdir). Şunlukda, $\angle C=\angle BED$, ýöne $\angle BED$ burç CBE üçburçlugyň daşky burçy, $\angle C$ bolsa CBE üçburçlugyň çatyk bolmadyk içki burçy.

7. Parallel göni çyzyklar aksiomasyna daýanmaýan üçburçlugyň içki burçlarynyň jemi hakyndaky teoremanyň subudy.



ABC erkin üçburçluk alalyň.

Onuň *AC* tarapynda erkin *D* nokat alalyň we ony *B* bilen kesim arkaly birikdireliň. Üçburçlugyň tapmaly içki burçlarynyň jemini x bilen belgiläliň. Alarys:

$$\angle A+\angle 1+\angle 3=x,\ \angle C+\angle 2+\angle 4=x.$$

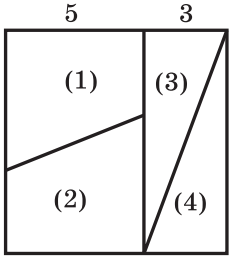
Bu deňlikleri bölekleri boýunça goşalyň:

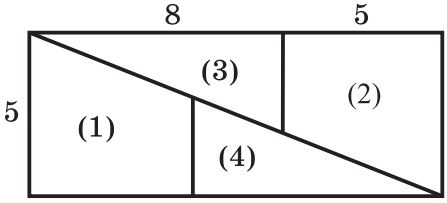
$$(\angle A+\angle C+\angle 1+\angle 2)+(\angle 3+\angle 4)=2x.$$

Birinji ýaýdaky aňlatma *ABC* üçburçlugyň burçlarynyň jemidir. Ol x-a deňdir. Ikinji ýaýdaky aňlatma 180°-a deňdir (çatyk burçlaryň jemi ýaly). Alarys: $x+180°=2x$ we $x=180°$. Bu dogrumy?

8. 64=65. Bu nädogry deňligi subut edeliň.

Tarapynyň uzynlygy 8 birlige deň bolan kwadrat suratda görkezilişi ýaly 4 bölege bölünen. Bu böleklerden gönüburçluk düzülen. Bu gönüburçlugyň esasynyň uzynlygy 13 birlige, beýikligi bolsa 5 birlige deň boldy. Berlen kwadratyň meýdany 64 kwadrat birlige deň, on-



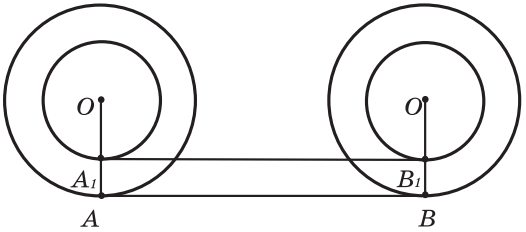


dan alnan gönüburçlugyň meýdany bolsa 65 kwadrat birlige deň.

Diýmek, 64=65. Nähili ýalňyşlyga ýol berildi?

9. Hemme töwereklerin uzynlyklary deň.

Merkezleri gabat geler ýaly edip biri-birine görä gozganmaýan iki dürli (radiuslary deň bolmadyk) tegelegi berkideliň. Uly tegelek typman göni çyzyk boýunça tigirlenip we doly öwrüm eder ýaly bu tegelekleri süýşüreliň.

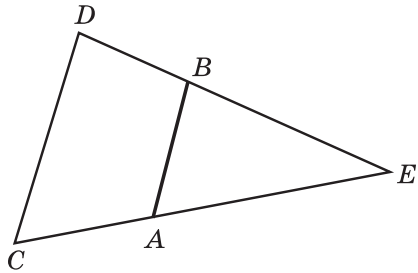


Şonda göni çyzygyň AB kesimininiň uzynlygy (OA radiusly) uly tegelegiň töwereginiň uzynlygyna deň bolar. Uly tegelege gozganmaz ýaly berkidilen kiçi tegelek hem doly öwrüm eder. A_1B_1 kesimiň uzynlygy (OA_1 radiusly) kiçi tegelegiň töwereginiň uzynlygyna deň bolar. $AB=A_1B_1$ (gönüburçlugyň garşylykly taraplary bolany üçin), onda bu iki töwereklerin uzynlyklary hem deňdir. Bu näme üçin beýle?

10. Burçuň taraplarynyň arasyndaky parallel göni çyzyklaryň islendik iki kesimi deň .

$AB \,||\, CD$, onda $\Delta ABE \sim \Delta CDE$, we şoňa görä

$\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$ ýa-da $AE \cdot DE = CE \cdot BE$.



Alnan deňligi bölekleri boýunça $AB-CD$ köpeldip, alarys:

$AE\cdot DE\ (AB-CD) = CE\cdot BE\ (AB-CD)$

ýa-da $AE\cdot DE\cdot AB-AE\cdot DE\cdot CD =$

$= CE\cdot BE\cdot AB-CE\cdot BE\cdot CD$

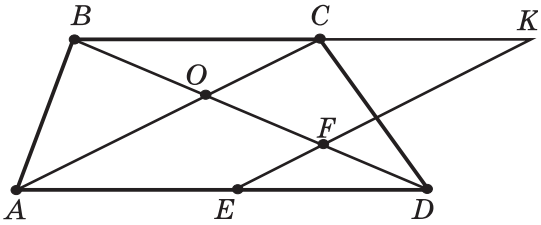
bu deňligi şeýle ýazmak bolar:

$AE\cdot DE\cdot AB-CE\cdot BE\cdot AB=AE\cdot DE\cdot CD-CE\cdot BE\cdot CD$ ýa-da

$AB\ (AE\cdot DE-CE\cdot BE)=CD\ (AE\cdot DE-CE\cdot BE)$,

bu ýerden alarys: $AB=CD$. Sebäbini düşündiriň.

11. Trapesiýanyň orta çyzygynyň uzynlygy nola deň.



$ABCD$ trapesiýa berlen bolsun we $BC||AD$, diagonallaryň kesişme nokady O bolsun. Şeýle gurluşy ýerine ýetireliň: BC kesimiň dowamynda AE deň bolan CK kesimi alyp goýýarys. $BK=AD$, $DE=BC$. Bu ýerde $BO=x$, $OF=y$, $FD=z$ belgileme girizeliň. DEF we BKF üçburçluklaryň meňzeşliginden

$$\frac{BF}{FD}=\frac{BK}{DE} \quad \text{ýa-da} \quad \frac{x+y}{z}=\frac{AD}{BC} \qquad (1)$$

gatnaşyklary alarys. ΔBOC we ΔAOD üçburçluklaryň meňzeşliginden bolsa

$$\frac{DO}{BO}=\frac{AD}{BC} \text{ ýa-da } \frac{y+z}{x}=\frac{AD}{BC} \qquad (2)$$

gatnaşyklary alarys. (1)-i we (2)-ni deňeşdirip alarys:

$$\frac{x+y}{z}=\frac{y+z}{x} \text{ ýa-da } \frac{x+y}{z}=-\frac{-y-z}{-x}.$$

Bu gatnaşyklaryň her birini t bilen belgiläp alarys:

$$\frac{x+y}{z}=t, \quad \frac{-y-z}{-x}=t,$$

bu ýerden $x+y=tz$, $-y-z=-tx$ deňlikleri alarys. Alnan deňlikleri bölekleri boýunça jemläp

$x+y-y-z=t(z-x)$ ýa-da $\frac{x+y-y-z}{z-x}=t$ alarys.

Bu ýerden bolsa

$$\frac{x-z}{z-x}=\frac{x+y}{z} \text{ ýa-da } \frac{x+y}{z}=-1$$

alarys. Ýöne,

$\frac{x+y}{z}=\frac{AD}{BC}$ şoňa görä-de $\frac{AD}{BC}=-1$, ýagny $AD=-BC$.

Diýmek, $AD+BC=0$ we $\frac{AD+BC}{2}=0$. Nähili ýalňyşlyga ýol berildi?

12. Pifagor teoremasynyň täze subudy.

Katetleri a we b, gipotenuzasy c we a katetiň garşysyndaky ýiti burçy α bolan gönüburçly üçburçluk alalyň. Alarys: $a=c\sin\alpha$, $b=c\cos\alpha$, bu ýerden bolsa

$$a^2=c^2\sin^2\alpha,\ b^2=c^2\cos^2\alpha$$

deňlikleri alarys. Bu deňlikleri bölekleri boýunça jemläp

$$a^2+b^2=c^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$

alarys. Ýöne, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ we şoňa görä $a^2+b^2=c^2$. Bu subut dogrumy?

13. Islendik sanyň kwadraty 1-e deň.

Goý, m islendik san bolsun. $x=y=\frac{m^4}{4}$ belgileme girizeliň. Alarys:

$\sqrt{x}=\sqrt{y}$ we $x-\sqrt{x}=y-\sqrt{y}$, ýa-da $x-y=\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

Bu deňligi şeýle ýazalyň:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

Alnan deňlikden taparys:

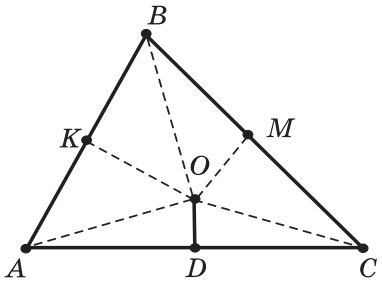
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$.

Şunlukda, $2\sqrt{x}=1$, ýöne $x=\frac{m^4}{4}$.

Diýmek, $2\sqrt{\frac{m^4}{4}}=1$ ýa-da $m^2=1$. Näme üçin?

14. Islendik üçburçluk deňýanlydyr.

Erkin ABC üçburçluga garalyň. AC kesimiň ortasyndan



$DO\perp AC$ kesimi geçireliň we DO kesimi O nokatda kesýän B burçuň bissektrisasyny guralyň. O nokady A we C nokatlar bilen birikdireliň we O nokatdan $OK\perp AB$ we $OM\perp BC$ iki perpendikulýar geçireliň.

OKB üçburçluk BOM üçburçluga deňdir (BO umumy gipotenuza we $\angle KBO=\angle OBM$). Diýmek,

$OK=OM$ we $BK = BM$. $\Delta AOD=\Delta DOC$ (iki katetleri boýunça), onda $AO=OC$. Şunlukda, $\Delta AOK =\Delta MOC$ (katetler we gipotenuzasy boýunça), şoňa görä-de $AK=MC$. Diýmek,

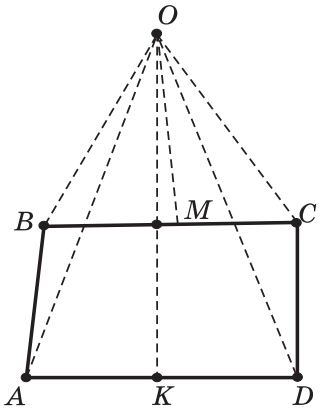
$$AB=AK+KB=CM+MB=CM,$$

ýagny erkin ABC üçburçluk deňýanly bolýar.

Nähili ýalňyşlyk goýberildi?

15. Göni burçuň ýiti burça deňligini «subut edeliň».

A we D nokatlarda iki burç guralyň: $\angle DAB$ –ýiti we $\angle ADC$– göni burçlar. Olaryň taraplarynda $AB=DC$ deň kesimleri goýalyň we B hem-de C nokatlary BC göni çyzyk bilen birikdireliň. AD kesimiň ortasyndan KO perpendikulýar galdyralyň. BC göni çyzygyň ortasyndan O nokatda KO perpendikulýar bilen kesişýänçä MO perpendikulýar geçireliň.

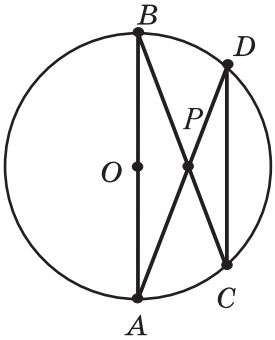


Soňra O nokat bilen A, B, C we D nokatlary birikdireliň. AOD we BOC üçburçluklaryň deňýanlydygy aýdyňdyr, diýmek, $AO=OD$ we $BO=OC$, onsoňam $\angle DAO=\angle ODA$. Gurlusy boýunça $AB=DC$, onda

$\Delta ABO=\Delta DOC$ (üç tarapy boýunça), diýmek, $\angle BAO=$ $=\angle CDO$. Şunlukda,
$\angle BAD=\angle BAO+\angle OAD=\angle CDO+\angle ODA=\angle CDA$. Diýmek, soralýan subut etme şulardan ybarat.

16. Tegelegiň merkezinden geçmeýän hordanyň onuň diametrine deňligini subut edeliň.

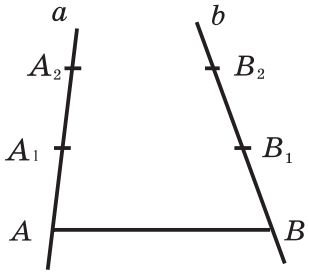
Töwerek guralyň we AOB diametr geçireliň. B nokadyň üstünden BC horda geçireliň, BC hordanyň ortaky P nokadynyň üstünden AD horda geçireliň we D hem-de C nokatlary birikdireliň. Indi alnan iki ΔAPB we ΔDPC deňýanly üçburçluklara garalyň. Gurluşy boýunça $BP=PC$, onda $AP=PD$. Ondan başga-da, $\angle APB=\angle DPC$ (wertikal burçlar). Diýmek, $\Delta APB=\Delta DPC$, bu ýerden $AB=DC$ alarys, ýagny tegelegiň merkezinden geçýän horda bu tegelegiň diametrine deňdir.



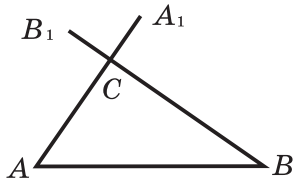
Ýalňyşlygy tapyň.

17. Wizantiýaly *Proklyň* (412–485 ýyllar) sofizmi: «Islendik iki göni çyzyk kesişmeýär».

Bir tekizlikde a we b dürli iki göni çyzyk alalyň. a göni çyzykda A nokat we b göni çyzykda B nokat alalyň. A we B nokatlary birikdireliň we $AA_1=BB_1=\frac{AB}{2}$ kesimleri guralyň (*1-nji surat*).



1-nji surat



2-nji surat

AA_1 we BB_1 kesimler kesişmeýärler, tersine bolan ýagdaýda (*2-nji surat*).

$$AB < AC + CB < \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AB$$

deňsizligi alarys, bu bolsa mümkin däldir. Indi

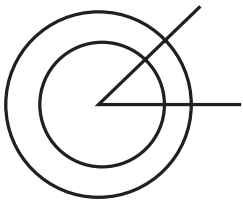
$$A_1A_2 = B_1B_2 = \frac{1}{2}A_1B_1$$

kesimleri guralyň we bu gurlusy dowam edeliň. Tassyklamamyzy şuňa meňzeş dowam edip, *a* we *b* göni çyzyklaryň kesişmeýändigini alarys. Ýalňyşlyk nirede goýberildi?

18. Merkezleri gabat gelýän islendik iki töweregiň uzynlyklary deňdir.

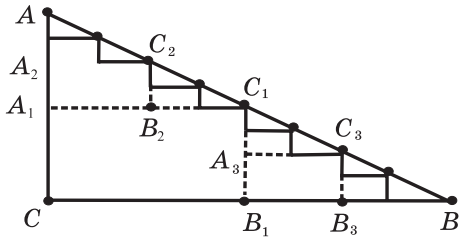
Suratda dürli iki sany merkezleri gabat gelýän töwerek şekillendirilipdir.

Eger merkezden şöhleleri geçirsek, onda kiçi töweregiň her bir nokadyna uly töweregiň diňe bir nokadynyň degişlidigini we tersine, uly töweregiň her bir nokadyna kiçi töweregiň diňe bir nokadynyň degişlidigini alarys. Şeýlelikde, iki töwerekdäki nokatlaryň sany deň. Diýmek, bu töwereklerin uzynlyklary hem deňdir.



19. Katetleriň jemi gipotenuza deňdir.

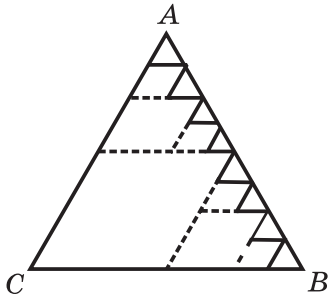
Erkin ABC gönüburçly üçburçluk guralyň. Onuň katetlerine parallel bolan orta çyzyklaryny geçirip uzynlygy katetleriň jemine deň bolan $AA_1C_1B_1B$ döwük çyzyk alarys. AA_1C_1 we C_1B_1B üçburçluklarda hem şeýle gurluşlary ýerine ýetirip öňküsi ýaly uzynlygy katetleriň jemine deň bolan $AA_2C_2B_2C_1A_3C_3B_3B$ döwük çyzyk alarys. Alnan her bir dört üçburçlukda şeýle orta çyzyklary geçirip, uzynlygy ýene-de katetleriň jemine deň bolan täze döwük çyzyk alarys.



Bu gurluşy dowam edip, gitdigiçe gipotenuzadan az tapawutlanýan, predelde bolsa gipotenuza bilen gabat gelýän döwük çyzyklary alarys. Bu egrileriň uzynlygy elmydama hemişelik we katetleriň jemine deň bolýar. Diýmek, $AC+CB=AB$, ýagny katetleriň jemi gipotenuza deňdir.

20. 1=2 deňligi geometrik usulda subut edeliň.

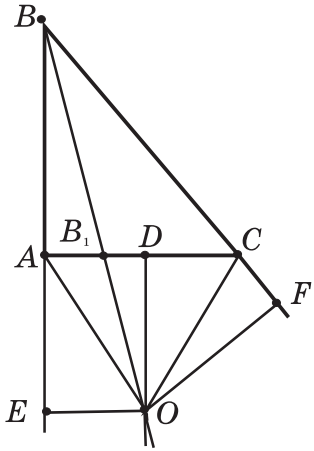
ABC deňtaraply üçburçluk üçin, ýokarky mysaldaky ýaly gurluşy ýerine ýetireliň. Gurlan döwük çyzygyň $AC+CB$ deň bolan hemişelik uzynlygy bardyr we AB-den gitdigiçe az tapawutlanýandyr. 4–5 gurluşy dowam edip, AB tarap bilen döwük çy-



zygyň bir-birine örän ýakyn bolanyny göreris. Bu ýerden,

$AC+CB=AB$, ýagny $2AB=AB$

deňligi alarys. Diýmek, 2=1.



21. Islendik gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasynyň katete deňligini subut edeliň.

Goý, ABC gönüburçly üçburçlugyň B burçunyň bissektrisasy BB_1; AC katetiň ortasy D; AC kesimiň D nokadynda geçirilen perpendikulýaryň BB_1 göni çyzyk bilen kesişme nokadyny O, O nokatdan AB we BC göni çyzyga geçirilen perpendikulýarlary degişlilikde, OE we OF bilen belgiläliň.

Çyzgydan görnüşi ýaly $\Delta BOE=\Delta BOF$ (üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşany boýunça), bu ýerden

$$BE=BF \qquad (1)$$

$OA=OC$ deňlikden $\Delta OEA=\Delta OCF$ gelip çykýar, bu ýerden

$$AE=FC \qquad (2)$$

deňligi alarys. (1) we (2) deňliklerden bolsa $AB=BC$ deňlik gelip çykýar.

Jogaplar

1. Tassyklama nädogry çyzga esaslanýar. Hakykatda, ýarym-töwerekler AC tarapy diňe bir nokatda kesýärler, ýagny BE bilen BD gabat gelýär.

2. D nokat OB şöhläniň üstünde ýatýar.

3. D nokat AB göni çyzygyň üstünde ýatýar.

4. Tassyklamada garalýan ýagdaý mümkin däl. Çyzgyny sirkulyň we çyzgyjyň kömegi bilen ýerine ýetirmeli.

5. Ýalňyş çyzga esaslanyldy.

6. Ýalňyş çyzga esaslanyldy.

7. Biz: «Islendik üçburçlugyň içki burçlarynyň jemi hemişelikdir» diýen subut edilmedik tassyklamany peýdalandyk.

8. Kwadratdan tapawutly islendik gönüburçlugyň (1) we (4) bölekleri onuň (2) we (3) böleklerine dykyz sepleşenok. Olaryň arasynda parallelogram görnüşindäki inçejik deşik bar. Bu deşigiň meýdany 1 kwadrat birlige deňdir.

9. A_1B_1 kesimiň uzynlygy kiçi tegelegiň töwereginiň uzynlygyndan uludyr, çünki kiçi tegelek A_1B_1 göni çyzyk boýunça typyp tigirlenýär.

10. $AE \cdot DE - CE \cdot BE$ bölüp bolanok, çünki bu tapawut 0-a deň.

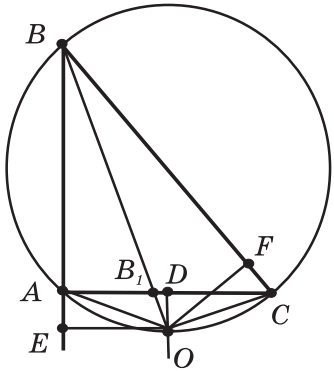
11. (1) we (2)-ni ulanyp, $z=x$ deňligi subut etmek bolar. Şunlukda, $z-x=0$. Şonuň üçin, $(z-x)$-a bölüp bolanok.

12. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ formula Pifagoryň teoremasy esasynda getirilip çykarylýar.

13. $x=y$ bolany üçin $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$, şoňa görä-de $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ bölüp bolanok.

14. Üçburçlugyň içinde bissektrisa we perpendikulýar kesişmeýär.

15. Çyzgyny tertipli ýerine ýetirip, ýiti burçuň tapawuda deňdigine, göni burçuň jübüt deň burçlaryň jemine deňdigine göz ýetirýäris.



16. *APB* we *DPC* üçburçluklar deňýanly däldirler.

17. Biz indeksli A_kA_{k+1} we B_kB_{k+1} kesimleriň hiç wagt kesişmeýändigini subut etdik, ýöne ondan, mysal üçin, A_3A_4 we B_7B_8 kesimleriň kesişip bilmeýändigi gelip çykmaýar.

18. Bir töweregiň nokatlary bilen beýleki bir töweregiň nokatlarynyň arasynda özara birbahaly degişlilik gurnalmagyndan olaryň uzynlyklarynyň deňdigi gelip çykýar.

19. Döwük çyzygyň uzynlygy kesimiň uzynlygyna ymtylýar.

20. Döwük çyzygyň uzynlygy kesimiň uzynlygyna ymtylýar.

21. *O* nokat hökman *BC* diametrli töweregiň üstünde ýatmaly.

IV BAP

MATEMATIKI GÖZBAGÇYLYKLAR

Belli bolşy ýaly, çagalarda dersi öwrenmeklige çuňňur höwes döretmezden, olarda mugallym tarapyndan öwredilýän bilimleriň üstüni özbaşdak ýetirip durmaga isleg döretmezden, diňe sapak wagtynda alnyp barylýan işleriň netijesinde olara zerur bolan bilimleri, başarnyklary we endikleri doly berip bolmajakdygy düşnüklidir.

Okuwçylarda matematika dersine gyzyklanma döretmekde matematiki gözbagçylyklara (fokuslara) hem uly orun degişlidir.

1. Çalt köpeltmek

Köp ýagdaýlarda ýönekeý algebraik özgertmeleriň kömegi bilen hasaplaýyş işini ep-esli ýeňilleşdirip bolýar. Şeýle tärleri ulanyp, çalt köpeltmegi amala aşyrýan okuwçy beýlekilerde uly haýran galmany döredip bilýär.

Mysal üçin, 975^2 hasaplamak aşakdaky ýaly ýerine ýetirilýär:

$975 \cdot 975 = (975 + 25) \cdot (975 - 25) + 25^2 = 1000 \cdot 950 + 625 = 950625.$

Bu hasaplama amala aşyrylanda aşakdaky algebraik özgertmäniň geçirilýändigine göz ýetirmek kyn däldir:

$$a^2=a^2-b^2+b^2=(a+b)\cdot(a-b)+b^2.$$

Bu özgertme ýatdan hasaplamak üçin giňden ulanylýar. Mysal üçin:

$27^2=(27+3)\cdot(27-3)+3^2=729$	$37^2=40\cdot34+3^2=1369$
$63^2=66\cdot60+3^2=3969$	$48^2=50\cdot46+2^2=2304$
$18^2=20\cdot16+2^2=324$	$54^2=58\cdot50+4^2=2916.$

Şeýle-de, 986-ny 997-ä köpeltmek aşakdaky ýaly amala aşyrylýar:

$986\cdot997=(986-3)\cdot1000+3\cdot14=983042.$

Bu usul nämä esaslanýar?! Köpelijileri aşakdaky görnüşe getireliň:

$(1000-14)\cdot(1000-3)$ we olary algebraik özgertmeleri ulanyp köpeldeliň:

$1000\cdot1000-1000\cdot14-1000\cdot3+14\cdot3.$

Özgertmeler geçirýäris:

$$1000(1000-14)-1000\cdot3+14\cdot3=1000\cdot986-1000\cdot3+14\cdot3=$$
$$=1000(986-3)+14\cdot3.$$

Soňky ýazgy bu hasaplamanyň algebraik mazmunyny aýan edýär. Onluk sifrleri deň we birlikleriniň jemi 10-a deň bolan üçbelgili sanlary köpeltmegiň-de täsin usuly bar. Mysal üçin $783\cdot787$ köpeltmek şeýle ýerine ýetirilýär:

$78\cdot79=6162$; $3\cdot7=21$ diýmek, netije 616221.

Bu usulyň esaslandyrylyşy aşakdaky özgertmelerden durýar:

$$(780+3)\cdot(780+7)=780\cdot780+780\cdot3+780\cdot7+3\cdot7=$$
$$=780\cdot780+780\cdot10+3\cdot7=780\cdot(780+10)+3\cdot7=$$
$$=780\cdot790+21=616200+21616221.$$

Şeýle sanlary köpeltmegi ýerine ýetirmegiň has ýönekeý usuly hem bar:

$$783 \cdot 787 = (785 - 2) \cdot (785 + 2) = 785^2 - 4 =$$
$$= 616225 - 4 = 616221.$$

Bu mysalda bize 785-i kwadrata götermek gerek boldy. Soňy 5 bilen gutarýan ikibelgili sanlary kwadrata götermek üçin aşakdaky usul has-da amatlydyr:

35^2; $3 \cdot 4 = 12$; *Jogaby*: 1225.

65^2; $6 \cdot 7 = 42$; *Jogaby*: 4225.

75^2; $7 \cdot 8 = 56$; *Jogaby*: 5625.

Bu düzgün, onluklaryň sanyny şondan bir birlik uly sana köpeltmek hasylynyň soňuna 25-i ýazmakdan durýar. Bu usuly esaslandyralyň: 5 bilen tamamlanýan ikibelgili sanlary $\overline{a5} = 10a + 5$ görnüşde ýazmak bolýar. Onda:

$$(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a \cdot (a+1) + 25.$$

$a \cdot (a+1)$ aňlatma sanyň onlugyny, şondan bir birlik uly sana köpeltmekligi aňladýar. Bu tärden drob bölegi $\frac{1}{2}$-e deň bolan garyşyk sanlary kwadrata götermegiň ýönekeý usuly gelip çykýar. Mysal üçin:

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 3,5^2 = 12,25 = 12\frac{1}{4}; \quad \left(7\frac{1}{2}\right)^2 = 56\frac{1}{4}; \left(8\frac{1}{2}\right)^2 = 72\frac{1}{4};$$

we ş.m.

Onluk sifri 5-e deň bolan ikibelgili sanlary kwadrata götermegiň hem örän oňaýly usuly bar. Meselem, $58^2 = 3364$. Bu netijäni tapmak üçin kwadrata göterilýän sandan 25-i aýryp, onuň yzyndan kwadrata göterilýän sanyň birliginiň kwadratyny ýazmaly. Biziň mysalymyzda $58 - 25 = 33$ we $8^2 = 64$, diýmek, $58^2 = 3364$. $59^2 = 3481$, sebäbi $59 - 25 = 34$ we $9^2 = 81$. Bu düzgüni umumy görnüşde getirip çykaralyň. Kwadrata göterilýän sany $x = 50 + a$ görnüşde ýazalyň. Onda

$x^2=(50+a)^2=2500+100a+a^2=(25+a)\cdot 100+a^2\cdot a=x-50$ bolýanlygyny göz öňünde tutup alarys:

$$(25+a)\cdot 100+a^2=(25+x-50)\cdot 100+a^2=(x-25)\cdot 100+a^2.$$

2. 1, 5 we 6 sifrler bilen gutarýan sanlary köpeltmek

1 sifr bilen gutarýan sanlar özara köpeldilende ýene-de 1 bilen tamamlanýan san alynýar. Şol häsiýet 5 we 6 sifrler bilen gutarýan sanlara-da degişlidir. Şoňa görä-de 6 sifr bilen tamamlanýan islendik sanyň derejesi ýene-de 6 sifr bilen gutarýar. Mysal üçin:

$$46^2=2116;\ 46^3=97336.$$

Bu sanlaryň ýokarda görkezilen aýratynlygyny algebraik usulda esaslandyralyň. 6 bilen gutarýan ikibelgili sanlary $10a+6$, $10b+6$ we ş.m. ýaly ýazylýar. Bu ýerde a we b noldan tapawutly sifrler.

Şeýle iki sanyň köpeltmek hasyly:

$100ab+60b+60a+36=10\cdot(10ab+6a+6b)+30+6=$ $=10\cdot(10ab+6a+6b+3)+6$ deňdir. Görnüşi ýaly köpeltmek hasyly käbir onluklardan we 6 sifrden durýar. Şuňa meňzeşlikde 1 we 5 sifrler bilen tamamlanýan sanlaryň aýratynlygyny-da algebranyň kömegi bilen esaslandyryp bolýar. Ýokarda aýdylanlar bize 386^{2567}-niň 6 bilen, 815^{723}-üniň 5 bilen, 491^{1732}-niň 1 bilen we ş.m. gutarýandygyny tassyklamaga mümkinçilik berýär.

3. 11-e bölünijilik

Belli bolşy ýaly, bölünijilik nyşanlary bölmek amalyny ýerine ýetirmezden berlen sanyň käbir sana bölünýändigini ýa-da bölünmeýändigini kesgitlemäge mümkinçilik berýär. Biz 2-ä, 3-e, 4-e, 5-e, 6-a, 8-e, 9-a, 10-a bölünijilik nyşanlaryny bilýäris. 11-e bölünýän

sanlar hem käbir kanunalaýyklyga boýun egýär. 11-e bölünijilik nyşanyny getirip çykaralyň. Goý, N köpbelgili sanyň birlik sifri a, onluk sifri b, ýüzlük sifri c, müňlük sifri d we ş.m. bolsun, onda N sany $N=a+10b+$ $+100c+1000d+\ldots=a+10(b+10c+100d+\ldots)$ görnüşde ýazyp bolar. N sandan 11-e bölünýän $11\cdot(b+10c+100d+\ldots)$ sany aýralyň. Alnan $a-b-10(c+10d+\ldots)$ tapawudyň 11-e bölünende şol bir galyndyny berýändigine göz ýetirmek kyn däldir. Netijede, biz

$$a-b+c-d+\ldots=(a+c+\ldots)-(b+d+\ldots)$$

sanlary, ýagny edil N san 11-e bölünende alynýan galyndyny alarys. Bu ýerden 11-e bölünijiligiň aşakdaky nyşany gelip çykýar: täk orunda ýerleşýän sifrleriň jeminden, jübüt orunda ýerleşýän sifrleriň jemini aýyrmaly; eger tapawut nola deň ýa-da 11-e bölünýän (položitel ýa-da otrisatel) sana deň bolsa, onda synap görýän sanymyz 11-e bölünýändir. Eger bu şert ýerine ýetmese, synagdaky san 11-e galyndysyz bölünmeýär. 87635064 sanyň 11-e bölünýändigini ýa-da bölünmeýändigini barlap göreliň: 8+6+5+6=25; 7+3+0+4=14; 25−14=11. Diýmek, bu san 11-e galyndysyz bölünýär.

Mundan başga-da has uly sanlar üçin 11-e bölünijiligiň has ýönekeý nyşany hem bar. Bu nyşanda synalýan san sagdan çepe iki sifri saklaýan bölekler bölünýär we bu bölekler goşulýar. Eger alnan jem 11-e galyndysyz bölünse, onda synalýan san hem 11-e bölünýär; eger jem 11-e galyndysyz bölünmese, synalýan san hem 11-e galyndysyz bölünmeýär. Meselem, 528-iň 11-e bölünýändigini ýa-da bölünmeýändigini barlamaly bolsun. 5+28=33; 33-üň 11-e bölünýändigi üçin 528 hem 11-e galyndysyz bölünýändir: 528:11=48. Bu nyşan hem ýokardaka meňzeş subut edilýär.

4. Ýatdan bellenen sanlary bilmegiň syrlary

Siz ýatdan bellenen sanlary aýan etmek boýunça gözbagçylyklara duşansyňyz. Bu gözbagçylyk, köplenç, käbir hasaplamalary ýerine ýetirmekligi talap etmekden başlanýar. Meselem, bir sany ýatdan belle, oňa 2-ni goş, 3-e köpelt, 5-i aýyr, ýatdan bellän sanyňy aýyr we ş.m. Adatça, 4-5 amaly, kähalatlarda bolsa ondan hem köp amaly ýerine ýetirmek haýyş edilýär. Soňra gözbagçy netijede alnan sany sizden soraýar we jogaby eşiden badyna sizi haýran galdyryp, ýatdan bellän sanyňyzy aýdýar. Bu gözbagçylygyň syry ol diýen çylşyrymly bolman, onuň esasynda deňlemeleri çözmek durýar.

Meselem, gözbagçy aşakdaky tablisanyň çep sütünindäki amallary ýerine ýetirmekligi size hödürlän bolsun.

Bir sany ýatdan belle	x
oňa 2-ni goş	$x+2$
netijäni 3-e köpelt,	$3x+6$
5-i aýyr	$3x+1$
oýlan sanyňy aýyr	$2x+1$
2-ä köpelt	$4x+2$
1-i aýyr	$4x+1$

Soňra gözbagçy bu amallary ýerine ýetirip, alan netijäňizi sizden soraýar we siziň jogabyňyzy eşiden badyna ýatdan bellän sanyňyzy aýdyp berýär. Gözbagçynyň syryny bilmek üçin ýokardaky tablisanyň ikinji sütünine seretmek ýeterlikdir. Tablisanyň ikinji sütüninde gözbagçynyň aýdanlary algebra diline

geçirilendir. Görnüşi ýaly, siz x sany ýatdan bellän bolsaňyz, ähli amallary ýerine ýetirenden soň $4x+1$ alynýar. Siziň alan iň soňky netijäňiz boýunça, başdaky ýatdan bellän sanyňyzy aýan etmek kynçylyk döretmeýär. Mysal üçin, goý siz 33 netijäni alandygyňyzy gözbagça aýdypsyňyz diýeliň. Onda gözbagçy $4x+1=33$ deňlemäni çalt ýatdan çözüp, siziň başdaky ýatdan bellän $x=8$ sanyňyzy tapýar. Başgaça aýdanda ol ahyrky netijeden 1-i aýryp, alnan netijäni 4-e bölýär ($(33-1):4=8$). Eger siziň alan iň soňky netijäňiz 25 bolan bolsa, gözbagçy ýatdan $25-1=24$ we $24:4=6$ amallary ýerine ýetirip, siziň başda 6 sany ýatdan belländigiňizi aýdyp berýär.

Görşüňiz ýaly, bu gözbagçylygyň uly bir syry ýok. Gözbagçy ýatdan bellenen sany tapmak üçin aýdylan netijäniň üstünde nähili amallary ýerine ýetirmelidigini öňünden bilýär. Muňa düşünenden soň, sizde öz dostlaryňyzy haýran galdyryp bilersiňiz.

Siz ýoldaşyňyza bir sany ýatdan belläp, soňra şol sanyň üstünde dürli amallary ýerine ýetirmekligi (meselem, ol sanyň üstüne 2-ni goşmaly, 3-e köpeltmeli, 5-i aýyrmaly we ş.m) hödürläň. Alnan netijäni size aýdan badyna onuň ýatdan bellän sanyny aýan edýärsiňiz. Ýoldaşyňyz sizi ýalňyşdyrmak üçin ýerine ýetirýän amallarynyň sanyny has köpeldýär we çylşyrymlaşdyrýar. Emma muňa garamazdan siz iň soňky netije boýunça ýatdan bellenen sany tapýarsyňyz. Mysal üçin, ol 5-i ýatdan belleýär we onuň üstünde, size aýdyp birnäçe amallary ýerine ýetirýär.

– Men bir sany ýatdan belledim, ony 2-ä köpeltdim, netijesine 3-i goşdum, soňra ýatdan bellän sanymy goşdum, 1-i goşdum, 2-ä köpeltdim, ýatdan bellän sanymy

aýyrdym. 3-i aýyrdym, ýene-de ýatdan bellän sanymy aýyrdym, 2-ni aýyrdym, alnan netijäni 2-ä köpeltdim, 3-i goşdum we netijede, 49-y aldym. Men haýsy sany ýatdan belledim?

Ony haýran galdyryp, siz onuň ýatdan bellän sanynyň 5-digini aýan edýärsiňiz. Siz ony nädip bildiňiz? Haçanda ýoldaşyňyz ýerine ýetirýän amallaryny aýdanynda, siz ýatdan bellenilen sany x bilen belgiläp, onuň üstünde şol amallary ýerine ýetirýärsiňiz. Amallar aşakdaky tablisada görkezilen.

Men bir san ýatdan belledim	x
ony 2-ä köpeltdim	$2x$
netijesine 3-i goşdum	$2x+3$
soňra oýlan sanymy goşdum	$3x+3$
indi men 1-i goşdum	$3x+4$
2-ä köpeltdim	$6x+8$
oýlan sanymy aýyrdym	$5x+8$
3-i aýyrdym	$5x+5$
oýlan sanymy ýene-de aýyrdym	$4x+5$
2-ni aýyrdym	$4x+3$
netijäni 2-ä köpeltdim	$8x+6$
3-i goşdum	$8x+9$

Görnüşi ýaly, netijede $8x+9$ alynýar. $8x+9=49$ deňlemäni çözüp siz ýoldaşyňyzyň ýatdan bellän sanynyň 5-digini aýan edýärsiňiz. Bu gözbagçylygyň aýratynlygy, ähli amallary ýoldaşyňyzyň özüne erkin düzmeklige rugsat berýänligiňizdedir. Käbir ýagdaýda bu gözbagçylygyň maksadyna ýetmezligi-de mümkin. Mysal üçin, birnäçe hasaplamany ýerine ýetirenden soň $x+12$ alyndy diýeliň. Ýoldaşyňyz bolsa size: «Men

ýatdan bellän sanymy aýyrdym we netijede 12 alyndy» diýip jogap berdi diýeliň. Siz özgertmeleri yzarlap $(x+12)-x=12$ bolandygyny we hiç bir deňlemäniň emele gelmändigini, netijede bolsa ýatdan bellenen sany aýdyp bilmejekdigiňizi aňýarsyňyz.

Bu ýagdaýda näme etmeli?

Şeýle hereket ediň! Haçanda näbelli x bolmadyk netije alnan mahalynda ýoldaşyňyza: «Saklan! Indi men senden hiç zat soramazdan netijäni aýdyp biljek: ol 12». Bu bolsa siziň ýoldaşyňyzy öňküden-de aňktaňk eder. Ol hiç zat geplemän «12-ni nädip bildikä?» – diýip haýran galar. Bu ýerde ýatdan bellenen san tapylmasa--da, gözbagçylyk maksadyna ýeter. Aşakdaky tablisa seret)

Men bir sany ýatdan belledim	x
oňa 2-ni goşdum	$x+2$
netijäni 2-ä köpeltdim	$2x+4$
soňra 3-i goşdum	$2x+7$
ýatdan bellän sanymy aýyrdym	$x+7$
5-i goşdum	$x+12$
ýatdan bellän sanymy aýyrdym	12

Azajyk türgenleşik geçirip, siz ýoldaşlaryňyz bilen şeýle gözbagçylyklary ýerine ýetirip bilersiňiz.

5. Oýlanyp ýatdan bir san belläň!

Meniň aýdýan amallarymy üns bilen ýerine ýetiriň, men bolsa siziň hasaplamalaryňýzyň netijesini aýan ederin.

1. Noldan tapawutly 10-dan kiçi bir sany ýatdan belläň. Ony 3-e köpeldiň, netijesine 2-ni goşuň soňra 3-e köpeldiň, netijesine ýatdan bellän sanyňyzy goşuň.

Netijäniň birinji sifrini çyzyň. Galan sanyň üstüne 2-ni goşuň. Alnan jemi 4-e bölüň. Paýyň üstüne 19-y goşuň. Siziň hasaplamalaryňyzyň netijesi 21-e deň boldy.

2. Noldan tapawutly 10-dan kiçi bir sany ýatdan belläň. Ony 5-e köpeldiň. Köpeltmek hasylyny ikeldiň we onuň üstüne 14-i goşuň. Jemden 8-i aýryň. Netijäniň birinji sifrini çyzyň. Galan sany 3-e bölüň we oňa 10-y goşuň. Siz 12-ni aldyňyz.

3. Noldan tapawutly 10-dan kiçi bir sany ýatdan belläň we oňa 29-y goşuň, netijäniň ahyrky sifrini taşlaň. Galanyny 10-a köpeldiň. Netijesine 4-i goşuň. Alnan sany 3-e köpeldiň, netijeden 2-ni aýryň. Siz 100-i aldyňyz.

4. Noldan tapawutly 10-dan kiçi bir sany ýatdan belläň. Ony 5-e köpeldiň. Alnan sany ikeldiň netijesinden oýlan sanyňyzy aýryň. Alnan tapawutdaky sanyň sifrlerini goşuň. Netijesine 2-ni goşuň. Jemi kwadrata göteriň. Alnan sandan 10-y aýryň. Tapawudy 3-e bölüň. Siz 37-ni aldyňyz.

5. Noldan tapawutly 10-dan kiçi bir sany ýatdan belläň. Ony 25-e köpeldiň, 3-i goşuň. Alnan sany 4-e köpeldiň, netijäniň birinji sifrini çyzyň. Galan sany kwadrata göteriň. Netijäniň sifrlerini goşuň. Ýene-de 7-ni goşuň. Şeýlelikde, 16 san alyndy.

6. Ikibelgili sany ýatdan belläň. Oňa 7-ni goşuň. 110-dan alnan jemi aýryň. Tapawuda 15-i goşuň. Netijä ýatdan bellän sanyňyzy goşuň. Alnan sany 2-ä bölüň. Netijeden 9-y aýryň. Tapawudy 3-e köpeldiň. Siz 150-ni aldyňyz.

7. 100-den kiçi sany ýatdan belläň. Oňa 12-ni goşuň. 130-dan alnan jemi aýryň.Tapawuda 5-i goşuň. Netijä ýatdan bellän sanyňyzy goşuň. Jemden 120-ni aýryň. Tapawudy 7-ä köpeldiň. 1-i aýryň. Galanyny 2-ä bölüň. 30-y goşuň. Siz 40-y aldyňyz.

8. Noldan tapawutly islendik sany ýatdan belläň. Ony ikeldiň, alnan sana 1-i goşuň. Ýene-de alnan sany 5-e köpeldiň. Ahyrky sifrden başga ählisini taşlaň. Galan sifri öz-özüne köpeldiň. Netijede, alnan sanyň sifrlerini goşuň. Siz 7-ni aldyňyz.

9. 100-den kiçi sany ýatdan belläň. Oňa 20-ni goşuň. 170-den bu alnan sany aýryň. Galan sandan 6-ny aýryň. Tapawuda ýatdan bellän sanyňyzy goşuň. Alnan sanyň sifrlerini goşuň. Alnan jemi öz-özüne köpeldiň. Netijeden 1-i aýryň. Alnan sany 2-ä bölüň, soňra 8-i goşuň. Siz 48-i aldyňyz.

10. Üçbelgili sany ýatdan belläň. Onuň sagyndan ýene-de şol sany gaýtalap ýazyň. Alnan sany 7-ä bölüň. Netijäni ýatdan bellän sanyňyza bölüň. Alnan paýy 11-e bölüň. Netijäni ikeldiň. Alnan sandaky sifrleri goşuň. Siz 8-i aldyňyz.

11. Noldan tapawutly 10-dan kiçi bir sany ýatdan belläň. Ony 2 esse ulaldyň we köpeltmek hasylynyň üstüne 1-i goşuň. Alnan sany 5-e köpeldiň, netijeden 2-ni aýryň. Alnan tapawudyň üstüne 301-i goşuň. Netijedäki ortaky sifri çyzyň we alnan ikibelgili sanyň üstüne 3-i goşuň. Siz 37-ni aldyňyz.

6. Üçbelgili sany bilmek

Üçbelgili sany ýatdan belläň. Häzirlikçe onuň soňky iki sifrini taşlaň. Birinji sifri bolsa ikeldip, onuň üstüne 5-i goşuň, soňra alnan jemi 5-e köpeldiň, bu köpeltmek hasylynyň üstüne ýatdan bellän sanyňyzyň ikinji sifrini goşuň we netijäni 10-a köpeldiň. Alnan köpeltmek hasylyna ýatdan bellän sanyňyzyň üçünji sifrini goşuň we alan netijäňizi maňa aýdyň. Men siziň haýsy sany ýatdan bellänligiňizi aýdyp bereýin.

Meselem, goý 387 ýatdan bellenen san bolsun. Ol san bilen ýokardaky amallary ýerine ýetireliň. Birinji sifri ikeldeliň: $3 \cdot 2=6$. Köpeltmek hasylynyň üstüne 5-i goşalyň: $6+5=11$. Jemi 5-e köpeldeliň: $11 \cdot 5 = 55$. Köpeltmek hasylynyň üstüne ýatdan bellän sanymyzyň ikinji sifrini goşalyň: $55+8=63$. Jemi 10-a köpeldeliň: $63 \cdot 10=630$. Köpeltmek hasylynyň üstüne ýatdan bellän sanymyzyň üçünji sifrini goşalyň: $630+7=637$. Bu alnan netije boýunça gözbagçy ýatdan bellenen sany aýdýar. Ol muny nähili edip bilýär?!

7. Nähili edip pozulan sifri bilmeli?

Ýoldaşyňyza köpbelgili islendik sany ýatdan bellemegi we ol sanyň üstünde aşakdaky amallary ýerine ýetirmekligini haýyş ediň:

Ýatdan bellän sanyňyzy ýazyň;

Ol sanyň sifrleriniň orunlaryny islendik tertipde çalşyryň;

Bu iki sanyň ulusyndan kiçisini aýryň;

Alnan tapawudyň noldan tapawutly bir sifrini pozuň;

Galan sifrleri islendik tertipde maňa aýdyň.

Jogap edip siz ýoldaşyňyza pozulan sifri aýdýarsyňyz.

Meselem, goý ýoldaşyňyzyň ýatdan bellän sany 3857 bolsun we ol aşakdaky hasaplamalary ýerine ýetiripdir diýeliň:

3857; 8735; 8735-3857=4878.

7 sifri çyzyp, ýoldaşyňyz size galan sifrleri aşakdaky tertipde aýdýar 8,4,8. Şu sifrler arkaly siz pozulan sifri kesgitleýärsiňiz. Onuň üçin siz näme etmeli?

8. Doglan gününi we aýyny bilmek

Dostuňuza bir kagyzda doglan gününi ýazmaklygy hödürläň hem-de aşakdaky amallary ýerine ýetirmekligi haýyş ediň:

– ýazylan sany ikeldiň;

– alnan netijäni 10-a köpeldiň;

– köpeltmek hasylyna 73-i goşuň;

– – jemi 5-e köpeldiň;

köpeltmek hasylynyň üstüne doglan aýyňyzyň tertip belgisini goşuň.

Alan netijäňizi maňa aýdyň. Aýdylan netije boýunça, siz oňa doglan gününi we aýyny aýdyp bilersiňiz.

Mysal. Siziň dostuňyz awgust aýynyň 17-sinde doglan bolsun.

17·2=34; 34·10=340; 340+73=413; 413·5=2065; 2065+8=2073.

Ýoldaşyňyz 2073-i aýdýar we siz onuň doglan gününi we aýyny aýdyp berýärsiňiz. Ony nähili bilmeli?

9. Gürrüňdeşiň ýaşyny nähili bilmeli?

Siz gürrüňdeşiňiziň näçe ýaşyndadygyny anyklamak üçin aşakdaky amallary hödürläň:

– tapawudy 1-den uly bolan iki sifri bir-biriniň yzyndan ýazyň;

– olaryň arasynda islendik üçünji sifri ýazyň;

– alnan üçbelgili sanyň sifrlerini ters tertipde ýazyp täze üçbelgili sany alyň;

– bu üçbelgili sanlaryň ulusyndan kiçisini aýryň;

– tapawutda alnan sanyň sifrlerini ters tertipde ýazyň;

– täze alnan sany tapawut bilen goşuň;

– jeme öz ýaşyňyzy goşuň we alnan jemi maňa aýdyň.

Siz onuň näçe ýaşyndadygyny dessine aýdýarsyňyz.

Meselem, siziň gürrüňdeşiňiz 23 ýaşynda bolsun. Ol aşakdaky amallary ýerine ýetirýär:

25
275
572

572–275=297
297+792=1089
1089+23=1112

Gürrüňdeşiňiz size 1112 sany aýdýar, siz onuň ýaşyny kesgitläp beryärsiňiz. Nähili edip ony kesgitleýärsiňiz?

10. Gürrüňdeşiňiziň doglan gününi, aýyny we ýaşyny nähili bilmeli?

Eger siz bu usulyň mazmunyna düşünseňiz, muňa meňzeş gözbagçylyklary özüňiz hem oýlap tapyp bilersiňiz.

Doglan aýyňyzyň tertip belgisini 100-e köpeldiň. Köpeltmek hasylyna doglan günüňizi goşuň. Jemi 2-ä köpeldiň we alnan netijäniň üstüne 8-i goşuň. Täze jemi 5-e köpeldiň we üstüne 4-i goşuň. Alnan sany 10-a köpeldip, üstüne 4-i goşuň. Soňra öz ýaşyňyzyň doly sanyny goşuň. Alan netijäňizi maňa aýdyň. Siz bu netije boýunça gürrüňdeşiňiziň doglan aýyny, gününi we ýaşyny kesgitleýärsiňiz. Nähili edip ony kesgitleýärsiňiz?

11. Maşgalanyň düzümini nähili bilmeli?

Eger aşakdaky amallary ýerine ýetirse, siz ýoldaşyňyzyň erkek we aýal doganlarynyň sanyny kesgitläp bilersiňiz:

– erkek doganlaryňyzyň sanynyň üstüne 3-i goşuň;
– jemi 5-e köpeldiň;
– köpeltmek hasylyna 20-ni goşuň;
– jemi 2-ä köpeldiň;
– alnan netijä aýal doganlaryňyzyň sanyny goşuň;
– jeme 5-i goşuň we alnan netijäni maňa aýdyň.

Bu netije boýunça siz onuň erkek we aýal doganlarynyň sanyny dessine aýdyp bilersiňiz.

Meselem, ýoldaşyňyzyň 4 erkek we 7 aýal dogany bar bolsun. Ol aşakdaky amallary ýerine ýetirýär:

$4+3=7$	$55\cdot2=110$
$7\cdot5=35$	$110+7=117$
$35+20=55$	$117+5=122$

122 sany ýoldaşyňyz size aýdýar we siz onuň aýal we erkek doganlarynyň sanyny aýdýarsyňyz. Siz ony nähili bilmekçi?

12. Telefon kitaby ulanylýan gözbagçylyk

Bu gyzykly gözbagçylyk aşakdaky ýaly ýerine ýetirilýär. Ýoldaşyňyza deň sifrleri bolmadyk üçbelgili sany ýazmagy hödürläň. Goý, ol 648 ýazypdyr diýeliň.

$$\begin{array}{r} 846 \\ -\ \underline{648} \\ 198 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 198 \\ +\ \underline{891} \\ 1089 \end{array}$$

Bu sanyň sifrlerini ters tertipde ýazyp, olaryň ulusyndan kiçisini aýyrmaklygy (eger tapawut iki sifrden dursa olaryň öňünde nol ýazylýar) tabşyryň. Alnan tapawutda-da sifrleri ters tertipde ýazyp, ikisini goşmaklygy haýyş ediň. Ýokarda görkezilen amallary ol size görkezmän, ýagny syryny açman ýerine ýetirýär. Netijäni siz bilýänsiňiz diýip gönüne-de getirmeýär. Soňra siz ýoldaşyňyza telefon kitabyndan ahyrky alnan netijäniň ilkinji üç sifrini (108) aňladýan sahypany açmaklygy haýyş edýärsiňiz ýoldaşyňyz 108-nji sahypany açyp siziň soňky tabşyrygyňyza garaşýar. Açylan sahypanyň ýokarsyndan (ýa-da aşagyndan) jemleýji sanyň (1089) ahyrky sifrine (9) deň bolan abonentiň familiýasyny tapmaklygy haýyş edýärsiňiz. Ol 9-njy abonenti tapýar, siz bolsa ol adamyň familiýasyny we onuň telefon belgisini aýdýarsyňyz! Siziň bilgirligiňiz ýoldaşyňyzyň aklyny haýran edýär: sebäbi ol kellesine gelen ilkinji sany saýlap aldy, ýöne siz telefonyň eýesiniň familiýasyny we telefon belgisini aýan etdiňiz. Gözbagçylygyň syry nämede?

13. Haýran galdyryjy ýatkeşlik

Kähalatlarda gözbagçylar adaty däl ýatkeşligi bilen tomaşaçylaryň aklyny haýran edýärler. Olar uzyn sözlemi, sanlaryň yzygiderligini we ş.m. ýatdan aýdyp bilýärler. Sizde hem ýoldaşlaryňyzy şeýle ýatkeşlik bilen haýran galdyrar ýaly ukyp bar. Bu gözbagçylygy aşakdaky ýaly amala aşyryp bolar. 50 sany kagyz böleklerini taýýarlap, olarda sanlary we harplary ýazmaly. Şeýlelikde, her kartoçkada uly san we onuň ýokarky çep burçunda latyn elipbiýindäki harp hem-de sifr ýazylýar. Kartoçkalary ýoldaşlaryňyza (tomaşaçylara) paýlap beriň we olara her kartoçkada haýsy sanlaryň ýazylandygyny bilýändigiňizi bildiriş edip aýdyň. Goý, olar size diňe kartoçkanyň harpyny we sifrini aýtsyn (*A*1, *C*4 we ş.m.), siz bolsa bada-bat kartoçkadaky ýazylan sany aýan edersiňiz.

Mysal üçin, bir tomaşaçy size *E*4 aýdanda, siz 10128224 sany aýtmaly.

A 24020	*B* 36030	*Ç* 48040	*D* 510050	*E* 612060
*A*1 34212	*B*1 46223	*Ç*1 58234	*D*1 610245	*E*1 712256
*A*2 44404	*B*2 56416	*Ç*2 68428	*D*2 7104310	*E*2 3124412
*A*3 54616	*B*3 66609	*Ç*3 786112	*D*3 8106215	*E*3 9126318
*A*4 64828	*B*4 768112	*Ç*4 888016	*D*4 9108120	*E*4 10128224
*A*5 750310	*B*5 870215	*Ç*5 990120	*D*5 10110025	*E*5 11130130
*A*6 852412	*B*6 972318	*Ç*6 1092224	*D*6 11112130	*E*6 12132036

*A*7 954514	*B*7 1074421	*Ç*7 1194328	*D*7 12114235	*E*7 13134142
*A*8 1056616	*B*8 1176524	*Ç*8 1296432	*D*8 13116340	*E*8 14136248
*A*9 1158718	*B*9 1278627	*Ç*9 1398536	*D*9 14118445	*E*9 15138354

Sanlaryň örän uzyn, sany hem 50 bolandygy üçin siziň sungatyňyz tomaşaçylary haýran galdyrar. Ýöne siz ähli 50 sany uzyn sanlary ýat tutmaly däl. Hakykat has ýönekeý. Gözbagçylygyň syry nämede?

14. Ajaýyp ýatkeşlik

Kagyz listine 20-25 sifri bolan uly san ýazýarsyňyz we tomaşaçylara şu sanyň ähli sifrini şu yzygiderlikde gaýtalap biljekdigiňizi duýduryarsyňyz. Biz yzygiderlikde hiç hili kanunalaýyklygyň ýokdugyna seretmezden siz gözbagçylygy ýokary derejede geçirýärsiňiz. Siz bu işi nähili edip amala aşyrdyňyz?

15. Nähili edip ýazylmadyk sanlaryň jemini bilmeli?

Siz wagtlaýynça diňe birisi ýazylan üç sanyň jemini aýan etmäge çalyşýarsyňyz. Gözbagçylyk şeýle ýerine ýetirilýär:

Siz ýoldaşyňyza islendik köpbelgili sany ýazmagy hödürleýärsiňiz: bu birinji goşulyjydyr. Goý, ol 84706 sany ýazsyn, onda ikinji we üçunji sanlara ýer goýup, doly ýazylmadyk üç sanyň jemini öňünden ýazýarsyňyz:

1-nji goşulyjy	84706
2-nji goşulyjy	...
3-nji goşulyjy	...
Jemi:	184705

Ondan soň ýoldaşyňyz ikinji sany ýazýar (birinji san näçe belgili bolsa, ikinji san hem şonça belgili bolmaly), üçünji goşulyjyny siz özüňiz ýazmaly:

1-nji goşulyjy	84706
2-nji goşulyjy	30485
3-nji goşulyjy	69514
Jemi:	184705

Jemiň dogry tapylandygy şübhesizdir. Gözbagçylygyň syry nämede?

16. Çalt kub kök almak

Kub kök almak boýunça gözbagçylyk tomaşaçylaryň birini sahna çagyryp, 1-den 100-e çenli islendik sany almagy we şol sanyň kubuny çalt hasaplap, netijäni size aýtmakdan başlanýar. Ondan soňra gözbagçy bada-bat şol sandan alnan kub köki aýan edýär.

Bu gözbagçylygy görkezmek üçin ilki bilen 1-den 10-a çenli sanlaryň kublaryny ýatdan bilmek zerurdyr:

$1^3=1$; $2^3=8$; $3^3=27$; $4^3=64$; $5^3=125$; $6^3=216$; $7^3=343$; $8^3=512$; $9^3=729$; $10^3=1000$.

Görnüşi ýaly, 2 we 3-den we 7 we 8-den beýleki sanlar öz kublarynyň ahyrky sifri bilen gabat gelýär. 2 we 3, 7 we 8 sanlaryň kubunyň ahyrky sifri 10 bilen kuba göterilýän sanyň tapawudyna deňdir. Bu maglumatlar çalt kub kök almak üçin ulanylýar. Goý,

tomaşaçy käbir sany kuba göterip size 250047 sany aýtsyn. Bu sanyň ahyrky sifri 7, şonuň üçin kub köküň ahyrky sifri 3 bolmalydyr. Gözlenýän sanyň birinji sifrini aşakdaky ýaly taparys. Kubuň ahyrky üç sifrini çyzýarys (onuň sifrleriniň sanyna bagly bolmazdan) we olaryň öňündäki sifrlere üns berýäris. Biziň alan ýagdaýymyzda bu san 250. 250 san kublar tablisasynda 6-nyň we 7-niň kublarynyň arasynda ýerleşýär. Olaryň kiçisi biziň mysalymyzda 6-dyr we ol kub köküň birinji sifridir. Şonuň üçin dogry jogap 63 bolar. Işiň özenine oňat düşünmek üçin ýene-de bir mysala seredeliň. Goý, 19683 san aýdylan bolsun. Onuň ahyrky sifri 3 bolandygy üçin, hut köküň ahyrky sifri 7 bolar. Ol sanyň ahyrky 3 sifrini çyzyp 19 sany alarys. 19 san 2-niň we 3-üň kublarynyň arasynda ýerleşýär. Şol sanlaryň kiçisi 2, diýmek, gözlenilýän kub kök 27 bolmalydyr.

Okyjylara, tomaşaçylara bu gözbagçylyk täsin görünýän bolsa-da, ýokary derejeli kökleri almagyň has ýeňil usullaryda bar. Olaryň iň ýeňillerinin birisi 5-nji derejeli kök almakdyr, sebäbi islendik san we onuň bäşinji derejesi hemişe şol bir sifr bilen tamamlanýar.

17. Fibonaççiniň sanlaryny goşmak

Üçünji sandan başlap her bir san öňündäki iki sanyň jemine deň bolan san yzygiderligine fibonaççiniň sanlary diýilýär:

8
5
13
18
31
49

80
129
209
338

Fibonaççiniň sanlary bilen baglanyşykly gözbagçylyk şeýle görkezilýär: gözbagçy tomaşaçylaryň birine iki sany sany bir-biriniň aşagyndan ýazmaklygy haýyş edýär. Mysal üçin 8 we 5 ýazylýar. Soňra bu sanlar bilen baglanyşykly 10 agzadan ybarat fibonaççiniň sanlary ýazylýar. Sanlar ýazylýan döwründe gözbagça ol sanlar görkezilmeýär. Soňra gözbagçy ýazylan sanlara seredip, bada-bat ol sanlaryň jemini aýdýar. Şol jemi tapmak üçin oňa diňe aşakdan dördünji sany 11-e ýatdan köpeltmek ýeterlikdir. Biziň yzygiderligimizde aşakdan 4-nji orunda 80-iň bolandygy üçin $80 \cdot 11 = 880$ gözlenilýän jem bolar.

18. Ýatdan bellenen san bilen geçirilýän amallaryň netijesini öňünden bilmek

Iň bir gadymy gözbagçylyklaryň biri-de ýatdan bellenen san bilen geçirilýän amallaryň netijesini öňünden bilmekdir. Bir adama bir sany ýatda bellemek, onuň üstünde birnäce amallary ýerine ýetirmek we netijesini gözbagça aýtmak teklip edilýär. Bu aýdylan san bolsa gözbagçynyň öň mälim eden sany bilen gabat gelýär. Gözbagçylyk şeýle ýerine ýetirilýär: tomaşaça bir sany ýatdan bellemek, ony ikeltmek, alnan netijä 8-i goşmak, bu jemi ikä bölmek we iň ahyrynda paýdan ýatdan bellenen sany aýyrmak teklip edilýär. Jogapda hemişe siziň hödürlän sanyňyzyň (8) ýarysy (4) emele geler. Eger tomaşaça 10-y goşmak teklip edilen bolsa jogapda 5 alnardy.

Şuňa meňzeş has gyzykly gözbagçylyklaryň biride tomaşaça doglan ýylyny ýazmakdan we onuň üstüne, onuň durmuşynda bolup geçen ýatdan çykmajak wakanyň bolan ýylyny goşmagy teklip etmekden başlanylýar. Emele gelen jemiň üstüne ol öz ýaşyny-da, ahyrynda ýatdan çykmajak wakadan soň geçen ýyl sanyny-da goşmaly bolýar. Tomaşaçylaryň arasynda diňe käbirleri agzalan 4 sanyň jemininiň hemişe üstümizdäki ýylyň 2 essesine deňdigine düşünip biler. Şonuň üçin siz öňünden alynmaly jemi bilersiňiz. Eger N_0-doglan ýyly, N_1-ýatdan çykmajak wakanyň bolan ýyly, N_2-üstümizdäki ýyl bolsa, onda

$$N_0+N_1+(N_2-N_0)+(N_2-N_1)=2N_2 \text{ bolar.}$$

Tomaşaçylar tarapyndan alnan jemler deňeşdirilip görlende, olaryň ählisiniň şol bir sandygy ýüze çykýar. Gözbagçylygy synlanlaryň köpüsinde tomaşaçynyň ýazan 4 sanyny siziň öňünden bilýändigiňiz barada nädogry pikir hem dörär. Hakykatda welin siz olaryň ýazan sanlarynyň birini-de bilmeýärsiňiz. Siz tomaşaçydan ýaş sanyny goşmagy teklip edeniňizde 31-nji dekabra çenli doljak ýaşyny almalydygyny ýatlatmagy unutmaň. Yogsam bolmasa, onuň doly ýaşy hasaplanylanda onuň siziň ýalňyşmagyňyza alyp gelmegi mümkindir.

Gözbagçylygy çylşyrymlaşdyrmak üçin alnan jemiň üstüne öň bilýän sanyňyzy, meselem, öýdäki adamlaryň sanyny-da goşdurmak bolar. Onuň üçin üstüňizdäki ýylyň 2 essesine ol sany öňünden goşup goýmak maksadalaýyk bolar. Şeýle edilse, gözbagçylygyň syrynyň çalt üstüniň açylmazlygy üçin oňaýly bolar. Ol gözbagçylygy gaýtalamaly bolan ýagdaý ýüze çykan mahalynda ýylyň iki essesiniň üstüne goşmak üçin başga sanlaryda ulanmak mümkin (mysal üçin, üstüňizdäki aýyň gün sany we ş.m.).

19. Dokuzlyk we onuň syrlary

Dokuzlyk bilen baglanyşykly gözbagçylyklaryň iň ajaýyplarynyň birine seredeliň. Görkezilýän döwründe tomaşaçydan hiç bir zadyň soralmaýandygy bu gözbagçylygyň gymmatyny has-da artdyrýar. Käbir kynçylyklara seretmezden, oňat türgenleşik geçirilen mahalynda, tomaşaçynyň ýatdan bellän sanyny aýan etmeklige mümkinçilik tapylýar. Bu gözbagçylygy görkezmekligi aşakdaky ädimler boýunça alyp gitmeli.

1. Siz bir tomaşaçydan 1-den 10-a (10 hem giryär) çenli islendik sany ýatdan bellemegi haýyş edýärsiňiz.

2. Ol sany 3-e köpeltmegi buýurýarsyňyz.

3. Köpeltmek hasylyny 2-ä bölmegi tabşyrýarsyňyz.

4. Alnan paýda garyşyk sanyň ýa-da bitin sanyň alnandygyny anyklamaly bolýar. Ol aşakdaky ýaly amala aşyrylýar: Ahyrky netijäni ýene-de bir gezek 3-e köpeltmegi haýyş edersiňiz. Eger tomaşaçy bu ädimi çalt ýerine ýetirse, onda netijäniň garyşyk san däldigi belli bolar. Eger tomaşaçy bu ädimi ýerine ýetirmekde ikirjiňlense, onda onuň garyşyk san bilen iş salyşýandygy barada netijä gelmek bolar. Kähalatda tomaşaçynyň «Sanyň drob bölegini näme etmeli?» diýip soramagy-da mümkindir. Tomaşaçynyň garyşyk san alandygyny aňan bolsaňyz şeýle diýip bilersiňiz: «Siz garyşyk san aldyňyz, şeýle dälmi? Şol sany uly tarapa tegelekläp, bitin san almagyňyzy haýyş edýärin. Mysal üçin, eger siz 10,5 alan bolsaňyz, onuň ornuna 11-i alyň. Soňra 3-e köpeltmegi amala aşyryň». Eger paý garyşyk san bolsa, ýatdan bellemeli «çözgütli san» 1. Eger paý bütin san bolsa, hiç zady ýatdan bellemeli däl.

5. Öňki görkezmäňize laýyk 3-e köpeldilenden soň, tomaşaça täzeden 2-ä bölmekligi tabşyrmaly.

6. Soňra ýene-de garyşyk sanyň ýa-da bütin sanyň emele gelendigini ýokardaky ýaly, anyklamak zerur. Eger garyşyk san alnan bolsa, edil öňki ýaly ol sany tegeleklemegi tabşyryň hem-de çözgütli san hökmünde 2-ni ýatdan belläň. Paý bütin san bolsa, hiç zady ýatdan bellemeli däl.

7. Netijä 2-ni goşmagy teklip ediň.

8. Jemden 11-i aýyrmaklygy soraň. Bilşiňiz ýaly, ahyrky iki amal 9-y aýyrmaklygy aňladýar, ýöne edilen artykmaç ädimler 9-lygyň syryny açmazlyk üçin ýerine ýetirilýär.

9. Eger tomaşaçy emele gelen sanyň kiçidigi üçin 11-i aýryp bolmajakdygyny aýdanynda, siz bada-bat onuň ilkibaşdaky ýatdan bellän sanyny aýdyp bilersiňiz. Siz çozgütli san diýip 1-i ýatlan bolsaňyz, onda onuň ýatdan bellän sany 1 bolmaly;

2-ni ýatlan bolsaňyz, onda onuň ýatdan bellän sanyda 2 bolmaly. Eger çözgütli sanlaryň ikisini-de ýatlan bolsaňyz, onda ýatdan bellenen san (1+2=3) 3-e deňdir. Eger hiç zat ýatlamadyk bolsaňyz, onda onuň ýatdan bellän sany 4 bolmaly (bu ýagdaýda 8-nji ädimde jemden 11 aýrylanda 0 alynýar).

Eger tomaşaçy ahyrky jemden 11-i aýyrmagy amala aşyrsa, onda onuň ýatdan bellän sanynyň 4-den uludygy gelip çykýar. Bu halda 4-i çözgütli san hökmünde ýatdan belläň we gözbagçylygy aşakdaky ýaly dowam etdiriň:

10. Ahyrky netijäniň üstüne 2-ni goşuň.

11. Jemden 11-i aýryň.

Eger bu aýyrmak amalyny ýerine ýetirmek mümkin bolmasa, onda «çözgütli sanlary (şol sanda soňky ýatdan bellenen çözgütli san 4-i hem) goşup ýatdan bellenen sany tapýarys. Eger tomaşaçy bu aýyrmak amalyny hem ýerine ýetirse, onda ýene-de bir 4-i çözgütli san hökmünde ýatdan belläp we olaryň ählisini goşup, ýatdan bellenen sany tapyp bilersiňiz. Göräýmäge bu gözbagçylyk örän çylşyrymly ýaly. Emma türgenleşik işleri geçirilse, bu gözbagçylygy ussatlyk bilen ýerine ýetirip bolýar. Mysal hökmünde 1, 5, 9 sanlar; 2, 6, 10 sanlar; 3,7 sanlar; 4,8 sanlar ýatdan bellenende ýerine ýetirilýän işlere syn edeliň.

1. 1	**1.** 5	**1.** 9 (ýatdan bellenen sanlar)
2. 1·3=3	**2.** 5·3=15	**2.** 9·3=27
3. 3:2=1,5	**3.** 15:2=7,5	**3.** 27:2=13,5
4. 1,5 ≈2·3=6 (1)	**4.** 7,5≈8·3=24 (1)	**4.** 13,5≈14·3=42 (1)
5. 6:2=3	**5.** 24:2=12	**5.** 42:2=21
3+2−11; 12+2−11=3	3+2−11; 21+2−11=12	12+2−11=3

Görnüşi ýaly, birinji halda 11-i aýyrmak mümkin däl. Diýmek, ýatdan bellenen çozgütli san (1) tomaşaçynyň ýatdan bellän sany. Ikinji halda birinji sapar 11-i aýyrmak mümkin, emma ikinji sapar mümkin däl. Diýmek, ýatdan bellenen çözgütli sanyň (1) we 4-üň jemi, ýagny 5 tomaşaçynyň ýatdan bellän sany. Üçünji halda ikinji gezek hem 11-i aýryp bolýar. Diýmek, ýatdan bellenen çözgütli sanyň (1) we iki sany 4-üň jemi 1+4+4=9 tomaşaçynyň ýatdan bellän sanydyr.

1. 2	**1.** 6	**1.** 10 (ýatdan bellenen sanlar)
2. 2·3=6	**2.** 6·3=18	**2.** 10·3=30
3. 6:2=3	**3.** 18:2=9	**3.** 30:2=15
4. 3·3=9	**4.** 9·3=27	**4.** 15·3=45

5. 9:2=4,5≈5 (2) **5.** 27:2=13,5≈14 (2) **5.** 45:2=22,5≈23 (2)
5+2−11; 14+2−11=5 5+2−11; 23+2−11=14 14+2−11=5

Görnüşi ýaly, birinji halda 11-i aýyrmak mümkin däl. Diýmek, ýatdan bellenen çozgütli san (2) tomaşaçynyň ýatdan bellän sany. Ikinji halda birinji sapar 11-i aýyrmak mümkin, emma ikinji sapar mümkin däl. Diýmek, ýatdan bellenen çözgütli sanyň (2) we 4-üň jemi, ýagny 6 tomaşaçynyň ýatdan bellän sany. Üçünji halda ikinji gezek hem 11-i aýryp bolýar. Diýmek, ýatdan bellenen çözgütli sanyň (2) we iki sany 4-üň jemi 2+4+4=10 tomaşaçynyň ýatdan bellän sanydyr.

1. 3	**1.** 7 (ýatdan bellenen sanlar)
2. 3·3=9	**2.** 7·3=21
3. 9:2=4,5≈5 (1)	**3.** 21:2=10,5≈11 (1)
4. 5 · 3=15	**4.** 11 · 3 = 33
5. 15 : 2=7,5 ≈ 8 (2)	**5.** 33 : 2 = 16,5 ≈ 17 (2)
8 + 2 − 11	17 + 2 − 11 = 8; 8 + 2 − 11.

Görnüşi ýaly, birinji halda 11-i aýyrmak mümkin däl. Diýmek, ýatdan bellenen çozgütli sanlaryň jemi 1 + 2 = 3 tomaşaçynyň ýatdan bellän sany. Ikinji halda birinji sapar 11-i aýyrmak mümkin, emma ikinji sapar mümkin däl. Diýmek, ýatdan bellenen çözgütli sanlaryň we 4-üň jemi, ýagny 1 + 2 + 4 = 7 tomaşaçynyň ýatdan bellän sany.

1. 4	**1.** 8 (ýatdan bellenen sanlar)
2. 4·3=12	**2.** 8·3=24
3. 12:2=6	**3.** 24:2=12
4. 6·3=18	**4.** 12·3=36
5. 18:2=9	**5.** 36:2=18
9+2−11=0;	18+2−11=9; 9+2−11=0

Görnüşi ýaly, birinji halda 11 aýrylanda 0 alyndy. Ýatdan bellenen çozgütli san ýok. Diýmek, tomaşaçynyň ýatdan bellän sany 4-e deň. Ikinji halda birinji sapar

11-i aýyrmak mümkin, emma ikinji saparda 11 aýrylanda 0 alyndy. Ýatdan bellenen çozgütli san ýok. Diýmek, tomaşaçynyň ýatdan bellän sany 4+4=8.

Göräýmäge bu gözbagçylygy ýerine ýetirmek örän kyn ýaly. Emma käbir türgenleşikden soňra bu ädimler siziň üçin hiç bir kynçylyk döretmez. Elbetde, 9-lygy aýyrmagy dürli usullar boýunça amala aşyryp bolar. Biz iň soňky netijä 2-ni goşduryp, soňra 11-i aýyrtdyk. Emma 5-i goşduryp, 14-i aýyrtmak ýa-da 3-i goşduryp, 12-ni aýyrtmak we ş.m. hem bolar. Munuň ýaly özgertmeler gözbagçylygyň syrynyň açylmazlygy üçin möhümdir. Bu gözbagçylygy birnäçe sapar görkezenden soňra siz buýruklary tomaşaçyda hiç hili güman döremez ýaly berip bilersiňiz. Şonda ol, öz jogaplary bilen sizi gerekli maglumatlar bilen üpjün edýänligini asla pikirine hem getirmez.

Agzalan gözbagçylygyň syry 9 sanyň häsiýetlerine esaslanandyr. 9-yň täsin aýratynlygy ulanylýan ýene-de birnäçe gözbagçylyklar bar. Mysal üçin, 1-nji we 3-nji sifrleri dürli bolan islendik üçbelgili sany ters tertipde ýazyp, ulusyndan kiçisini aýyrsak, biz hemişe ortada 9 we gyraky sifrleriniň jemi 9 bolan tapawudy alarys. Bu bolsa, diňe 1-nji ýa-da 3-nji sifri boýunça tapawudyň netijesini aýan etmäge mümkinçilik döredýär. Eger indi tapawudy ters tertipde ýazyp, bu iki sany goşsak, jem 1089-a deň bolar.

Sanlar bilen görkezilýän ýörgünli gözbagçylyklaryň biri aşakdakydan ybaratdyr. 1089 san öňünden bir list kagyza ýazylýar we tersine, öwrülip stoluň üstünde goýulýar. Tomaşaçy ýokarda görkezilen amallary ýerine ýetirip, 1089-a deň netijäni alandan soň, listi galdyryp jogabyny öň ýazandygyňyzy görkezýärsiňiz. Has gyzykly bolmagy üçin ilkinji gezek listi ters görkez-

meli. Onda ýazylan san 6801 bolar, bu bolsa nädogry jogapdyr. Ýüzüňize haýran galan ýaly görnüş berip, soňra listi nädogry alandygyňyz üçin ötünç soraň. Ony 180°-a öwrüp, dogry 1089 sany görkeziň.

20. Sanyň sifrler köküniň syrlary

Eger 98672 sanyň ähli sifrlerini goşsak, 32 san alnar; 32-niň sifrlerini goşup, 5 sany alarys. 5-e 98672 **sanyň sifrler köki** diýilýär. Sanyň sifrler köküni has çalt tapmak üçin sandaky dokuzlyklary taşlamak usuly ulanylýar. Goý, 87345691 sanyň sifrler köküni tapmak gerek bolsun. 8+7+3=18; 1+8=9 we 4+5=9 bolany üçin 8, 7, 3, 4, 5 sifrleri taşlaýarys. Soňra 6, 9, 1 sifrlerden 9-y taşlap we 6-a 1-i goşup 7-ni alýarys. Diýmek, 7 başdaky alan sanymyzyň sifrler köküdir.

Görkezilýän gözbagçylyklaryň köpüsi sifrler köki 9-a deň bolan sanlar bilen baglanyşyklydyr. Emma muňa garamazdan bu gözbagçylyklar tomaşaçyda «Jogaplar tötänleýin alyndy» diýen pikiri döredýär. Islendik san 9-a köpeldilenden soňra alnan köpeltmek hasylynyň sifrler köki 9-a deň bolýar. Tomaşaça sifrler köki 9-a deň bolan san alnar ýaly birnäçe amallary ýerine ýetirmek tabşyrylýar. Soňra alnan jogapdaky islendik sifriň (noldan başga) daşyny galam bilen aýlap bellik etmek we galan sifrleri islendik tertipde aýtmak hödürlenilýär. Hiç bir zady görmeýändigine garamazdan, gözbagçy daşy aýlanan sifri kynçylyksyz aýan edip biler. Onuň üçin tomaşaçynyň aýdan sifrlerini goşmaly, dokuzlyklary taşlamaly. Ahyrky sifr gözbagça aýdylanda ol eýýäm bu san köplüginiň sifrler köküni biler. Eger alnan kök dokuzlyk bolsa, onda daşy galam bilen aýlanan san 9-dyr. Başga ýagdaýlarda daşy aýlanan sifri

tapmak üçin 9-dan, alnan sifrler köküni aýyrmak ýeterlikdir. Sifrler köki 9-a deň sany almak maksady bilen geçirilip bilinjek hasaplamalaryň käbirlerine mysal hökmünde seredeliň.

1. Islendik sany (islendik uly san bolup biler) ýazyň we islendik tertipde sifrleriniň ýerlerini çalşyryp, täze san alyň. Ol sanlaryň ulusyndan kiçisini aýryň.

2. Islendik san ýazyň, onuň ähli sifrlerini goşuň we alnan jemi başdaky sandan aýryň.

3. Islendik san ýazyň, onuň sifrleriniň jemini tapyň ony 9-a köpeldiň we netijäni başdaky sana goşuň. Şonda bu jemiň sifrler köki berlen sanyň sifrler köküne deň bolar.

4. Haýsy-da bolsa bir san ýazyň, ony 9-a ýa-da 9-a bölünýän sana köpeldiň (ähli 9-a bölünýän sanlaryň sifrler köki dokuzdyr we tersine, sifrler köki 9 bolan islendik san 9-a bölünýändir).

5. Haýsy-da bolsa bir sany ýazyň we onuň sifrleriniň ornuny (islendik tertipde) üýtgediň. Ol sanlary goşuň, alnan netijäni kwadrata göteriň.

Eger sifrler köki 9 bolan sanlaryň alnyş usulyny tomaşaçylardan has gizlejek bolsaňyz, *esasy amalyň* (9-a köpeltmegiň) öň ýanyndan dürli sanlary girizip bilersiňiz. Mysal üçin, tomaşaça jübüsindäki teňňeleriň ýa-da pullaryň sanyny ýazmagy, ony otagdaky adam sanyna köpeltmegi, bu köpeltmek hasylynyň üstüne durmuşyndaky ýatdan çykmajak waka bolan ýyly goşmagy we ş.m., ahyrynda-da netijäni 9-a köpeltmekligi hödürläp bilersiňiz. Diňe ahyrky ýerine ýetirilen *esasy amalyň* sifrler köki 9 bolan sany almaga müm-

kinçilik berýändigini ýatdan çykarmaly däldir. Bu san alnan badyna siz tomaşaça islendik sifriň daşyny galam bilen aýlamagy hödürläp, ýokardaky beýan edilen usulda gözbagçylyk görkezip bilersiňiz.

21. Ýaşy bilmek

Käbir adamyň ýaşyny bilmekligiň gyzykly usullarynyň biri dokuzlyk sifrler köki bolan san bilen baglanyşyklydyr. Tomaşaça islendik sany ýatdan belläp, ony 9-a köpeltmek we alnan köpeltmek hasylyna öz ýaşyny goşmak hödürlenilýär. Ol ahyrky netijäni size aýdýar. Alnan jem boýunça tomaşaçynyň ýaşyny bilmek kyn däldir. Başda jemiň sifrler köküni tapmaly. Soňra ol köke birnäçe gezek dokuzlyklary goşmaly. Haçanda alnan san tomaşaçynyň ýaşyna laýygrak gelse, ony aýan etmeli. Şol hem tomaşaçynyň ýaşy bolar.

Goý, siz tomaşaça islendik sany ýazdyryp, ony 9-a köpeldenden soň alnan jem 2826 bolsun diýeliň. Ol sana özüniň 40 ýaşyny goşup, size 2866 sany aýdýar. Öz gezegiňizde siz şol sanyň sifrler köküniň 4-e deňdigini çalt tapmaly, 4-e dokuzlyklary goşup, 13, 22, 31, 40, 49 we ş.m. sanlary almaly. Adamyň keşbine seredip, 9 ýaş ýalňyşmagyň ähtimallygynyň örän kiçidigini göz öňünde tutup, tomaşaça laýyk gelýän ýaşy emele gelen yzygiderlikden saýlap almaly. Mysalymyzda tomaşaçynyň ýaşy hökmünde 40-y alýarys.

Hasapçylar we derňewçiler goşmagyň we köpeltmegiň dogrulygyny sifrler köküniň kömegi bilen barlaýarlar. Mysal üçin, eger ähli goşulyjylaryň sifrler köklerininiň jemininiň sifrler köki bilen jemiň sifrler köki deň bolmasa, onda hasaplamada ýalňyş goýberilendir. Eger deňeşdirilende ol kökler deň bolsa, goşmak dogry

ýerine ýetirilendir. Bu ýagdaýy aşakda beýan ediljek gözbagçylykda görkezeliň.

22. Goşmakly gözbagçylyk

Kimdir birine goşmaga degişli mesele düzmegi hödürläp, ähli goşulyjylary sütün görnüşinde biribiriniň aşagyndan ýazdyrmaly. Türgenleşenden soň siz ol ýazýança ähli ýazylan sanlaryň sifrler köküni tapyp we ýatdan belläp ýetişersiňiz. Soňra ters bakyp, goşmagy ýerine ýetirmegi haýyş etmeli. Eger tomaşaçy alnan jemdäki noldan tapawutly bir sifriň daşyny galam bilen aýlasa, galanlaryny bolsa islendik tertipde aýtsa, siz daşy aýlanan sifri aýan edip bilersiňiz. Onuň üçin siz ahyrky aýdylan sifrler toparynyň sifrler köküni tapmaly we ilkibaşdaky tapylan we ýatdan bellenen sifrler kökünden aýyrmaly. Eger ikinji kök birinjiden uly bolsa, aýyrmazdan öň birinji sifrler köküne dokuzlyk goşuň. Eger kökler deň bolsa, onda bellenen san dokuzlykdyr.

23. Köpeltmekli gözbagçylyk

Öňkä meňzeş gözbagçylygy köpeltmäge degişli ýumuşlary düzmek arkaly hem ýerine ýetirip bolar. Bu ýerde biz iki köpeldijiniň sifrler köklerініň köpeltmek hasylynyň sifrler köküniň, köpeltmek hasylynyň sifrler köküne deň bolýandygyna esaslanýarys. Kimdir birine 5 ýa-da 6 belgili uly sany ýazmagy we onuň aşagyndan başga bir uly sany ýazmagy teklip edýärsiňiz. Ol ýazýança siz ol köpeldijileriň sifrler köklerini hasaplap, soňra olaryň köpeltmek hasylynyň sifrler köküni tapyp ýatda saklaýarsyňyz. Indi siz arkaňyza ters öwrülip,

tomaşaça ýazan sanlaryny köpeltmegi haýyş edýärsiňiz. Soňra köpeltmek hasylynyň noldan başga islendik sifriniň daşyny galam bilen aýlap bellik etmekligi, galan sifrleri bolsa islendik tertipde aýtmaklygy teklip ediň. Edil öňki gözbagçylykdaky ýaly siz daşy aýlanan sifri, tomaşaçynyň aýdan sifrler toparynyň sifrler kökünden, öňki ýatlan sifrler köküňizi aýryp aýan edip bilersiňiz. Eger ikinji kök birinjiden uly bolsa, ýene-de aýyrmazdan öňürti birinji köke dokuzlygy goşmaly.

Jogaplar we çözülişler

5. Oýlanyp ýatdan bir san belläň!

1. Eger ýatdan bellenen san a bolsa, onda ýerine ýetirilen hasaplamalar $(3a+2)\cdot 3+a=10a+6$ ýaly bolar.

Görnüşi ýaly, ilkinji sifri ýatdan bellenen san, ikinji sifri bolsa 6-a deň bolan ikibelgili san alynýar. Eger bu ikibelgili sanyň birinji sifri çyzylsa, onda ýatdan bellenen san ýok edilýär. Şu ýerde gözbagçylygy görkezýäne tomaşaçynyň 6 sany alandygy aýan bolýar. Soňky ýerine ýetirdilýän amallar diňe gözbagçylygyň syryny açmazlyk üçin geçirdilýär.

2. Eger ýatdan bellenen san a bolsa, onda ýerine ýetirilen hasaplamalar $5a\cdot 2+14-8=10a+6$ ýaly bolar.

1 gözbagçylykdaky ýaly, ilkinji sifri ýatdan bellenen san, ikinji sifri bolsa 6-a deň bolan ikibelgili san alynýar. Birinji sifr çyzdyrylandan soňra tomaşaçyda 6-nyň alnandygy belli bolýar. Gözbagçynyň galan hereketleri düşnüklidir.

3. 1, 2, 3, ..., 9 sanlaryň islendigi bilen 29-y goşsak, 30-dan 38-e çenli sanlaryň haýsy hem bolsa biri alnar. Alnan sanyň soňky sifrini taşlap, 3-i alarys. Soňky ýe-

rine ýetirdilýän amallar diňe gözbagçylygyň syryny açmazlyk üçin geçirdilýär.

4. Eger ýatdan bellenen san a bolsa, onda ýerine ýetirilen hasaplamalar $5a \cdot 2 - a = 9a$ ýaly bolar. Bu sanyň sifrleriniň jemi (9-a köpeldilen sanyň sifrler köki) 9-a deňdir. $(9+2)^2=121$; $121-10=111$; $111:3=37$.

5. Eger ýatdan bellenen san a bolsa, onda ýerine ýetirilen hasaplamalar $(25a + 3) \cdot 4 = 100a + 12 = \overline{a12}$ ýaly bolar.

Bu üçbelgili sanyň birinji sifri çyzylandan soňra 12 alynýar.

$12^2=144$; $1+4+4=9$; $9+7=16$.

6. Goý, ýatdan bellenen ikibelgili san a bolsun. Onda aşakdaky ýaly amallar geçirilýär: $110-a-7+15+a=118$. Görnüşi ýaly, bu amallardan soňra tomaşaçynyň 118 alandygy gözbagça belli. $118:2=59$; $59-9=50$; $50 \cdot 3=150$.

7. Goý, ýatdan bellenen 100-den kiçi ikibelgili san a bolsun. Onda aşakdaky ýaly amallar geçirilýär: $130-a-12+5+a=123$. Görnüşi ýaly, bu amallardan soňra tomaşaçynyň 123 alandygy gözbagça belli.
$123-120=3$; $7 \cdot 3=21$; $21-1=20$; $20:2=10$; $10+30=40$.

8. Eger ýatdan bellenen san a bolsa, onda ýerine ýetirilen hasaplamalar $(2a+1) \cdot 5=10a+5$ ýaly bolar. Görnüşi ýaly, bu sanyň iň soňky sifri 5. Eger bu sanyň iň soňky sifrinden beýlekileri çyzylsa, onda diňe 5 galar. Soňky ýerine ýetirdilýän amallar diňe gözbagçylygyň syryny açmazlyk üçin geçirdilýär: $5 \cdot 5 = 25$; $2 + 5 = 7$.

9. Goý, ýatdan bellenen 100-den kiçi ikibelgili san a bolsun. Onda aşakdaky ýaly amallar geçirilýär:

$170-(a + 20)-6+a =144$. Görnüşi ýaly, bu amallar-

dan soňra tomaşaçynyň 144 alandygy gözbagça belli. $1+4+4=9$; $9\cdot 9 = 81$; $81-1=80$; $80:2=40$; $40+8=48$.

10. Üçbelgili san iki gezek ýazylyp alnan altybelgili sany $\overline{abcabc}$ görnüşde ýazyp bolar. Bu altybelgili sanyň üstünde aşakdaky ýaly özgertmeleri geciryäris:

$$\overline{abcabc}=100000a+10000b+1000c+100a+10b+c=$$

$$=100100a+10010b+1001c=1001\cdot(100a+10b+c)=$$

$$=1001\cdot\overline{abc};$$

$$1001\cdot\overline{abc}:7=143\overline{abc};\ 143\overline{abc}:\overline{abc}=143;\ 143:11=13;$$

$13\cdot 2=26$; $2+6=8$. Görnüşi ýaly, 10-njy gözbagçylykda sany aýan etmek ýörite tär esasynda amala aşyrylýar. Üçbelgili sanyň yzyndan ony gaýtalap ýazmak, şol oýlanan sany 1001-e köpeltmek diýmekdir (meselem, $356 \cdot 1001 = 356356$).

11. Eger ýatdan bellenen 10-dan kiçi san a bolsa, onda ýerine ýetirilen hasaplamalar aşakdaky ýaly bolar:

$$(2a+1)\cdot 5 - 2 + 301=3\cdot 100+10a + 4 = \overline{3a4}.$$

Görnüşi ýaly, bu sanyň ortaky sifrini çyzyp 34-i alarys. $34 + 3 = 37$.

Bu gözbagçylyklaryň ählisinde dürli usullaryň kömegi arkaly ýatdan bellenilen san hasaplamalaryň arasyndan çykardylýar we soňky hasaplamalar gözbagça aýan bolup başlaýar. Agzalanlary göz öňünde tutup, özüňiz ýatdan bellenilen sanlary tapmagyň täze mysallaryny oýlap tapyň.

6. Üçbelgili sany bilmek

Bu gözbagçylykda her bir sifr bilen nähili amallaryň ýerine ýetirilendigini ýene-de bir sapar yzarlalyň.

Ilkibaşda birinji sifri 2-ä, soňra 5-e, soňra 10-a köpeldipdik, ýagny jemläp aýdanda 2·5·10=100-e köpeldipdik. Ikinji sifri 10-a köpeldipdik. Üçünji sifr bolsa üýtgedilmän goşulypdy. Bulardan başga-da olaryň üstüne 5·5·10, ýagny 250 goşulypdy.

Diýmek, alnan sandan 250-ni aýyrsak, 100-e köpeldilen birinji sifr, goşmak 10-a köpeldilen ikinji sifr we goşmak üçünji sifr galar. Has takygy ýatdan bellenilen san galar. Bu ýerden ýatdan bellenilen sany bilmegiň syry düşnükli bolar: ähli amallar ýerine ýetirilenden soň netijeden 250-ni aýyrmaly. Şonda ýatdan bellenen san galar.

7. Nähili edip çyzylan sifri bilmeli?

Kim 9-a bölünijilik nyşanyny bilse, oňa islendik sanyň sifrleriniň jeminiň we edil şol sanyň özüni 9-a bölendäki galynda deňdigini bilýändir. Şonuň üçin şol bir sifrlerden, ýöne sifrleriniň orunlary üýtgedilip düzülen iki sanyň her biri 9-a bölünende alynýan galyndylar hemişe deň bolýar. Diýmek, birinji sandan ikinjini aýranda alynýan tapawut hökman 9-a galyndysyz bölünmeli (sebäbi deň galyndylar aýrylanda nola deň bolar). Aýdylanlardan ugur alsak, ýoldaşyňyz aýyrmagy ýerine ýetirip, 9-a bölünýän san alýar. Sebäbi size aýdylan 8,4,8 sifrler goşulanda 20-ä deň bolýar, onda çyzylan sifriň 7 boljakdygy ikuçsuzdyr. Ol 20 bilen goşulanda 9-a bölünýän 27 san alynýar.

8. Doglan gününi we aýyny bilmek

Gözlenilýän senäni (doglan güni) kesgitlemek üçin ahyrky netijeden 365-i aýyrmaly. Alnan tapawudyň ahyrky iki sifri doglan aýyny we öňdäki iki sifri

bolsa ol aýyň gününi aňladýar. Biziň mysalymyzda 2073 – 365 = 1708. 1708 sanyň üsti bilen awgust aýynyň 17-sini kesgitleýäris. Bu gözbagçylygyň mazmunyny düşündireliň. Goý, aýyň gününi K, belgisini N harplar bilen belgiläliň. Olaryň üstünde degişli amallary ýerine ýetireliň:

$$(2K\cdot 10+73)\cdot 5+N=100K+N+365.$$

Görnüşi ýaly, 365-i aýryp biz K ýüzlügi we N birligi alýarys.

9. Gürrüňdeşiň ýaşyny nähili bilmeli?

Gözbagçylykda hödürlenilýän amallary birnäçe gezek ýerine ýetirip hemişe ýaşyň üstüne şol bir sanyň, ýagny 1089-yň goşulýandygyna göz ýetirmek kyn däldir. Şonuň üçin size aýdylan netijeden 1089-y aýryp, söhbetdeşiňiziň ýaşyny bilip bilersiňiz. Gözbagçylygy birnäçe gezek görkezeniňizden soňra syr saklamak üçin ahyrky hasaplamalaryň görnüşini üýtgetmek maksadalaýyk bolar. Mysal üçin, 1089-y 9-a böldürenden soňra paýa ýaşy goşdurmak we ş.m.

10. Gürrüňdeşiňiň doglan gününi, aýyny we ýaşyny nähili bilmeli?

Alnan netijeden 444 sany aýyrmaly. Şonda alnan tapawudyň soňky iki sifri tomaşaçynyň ýaşyny, ortaky iki sifri onuň doglan gününi, başdaky iki sifri bolsa onuň doglan aýynyň tertip belgisini görkezer. Goý, tomaşaçy 1985-nji ýylyň oktýabr aýynyň 13-ünde doglan bolsun. Onda ol aşakdaky özgertmeleri ýerine ýetirer:

$10\cdot 100=1000$; $1000+13=1013$; $1013\cdot 2=2026$;
$2026+8=2034$; $2034\cdot 5=10170$; $10170+4=10174$;

$10174 \cdot 10 = 101740$; $101740 + 4 = 101744$;
$101744 + 24 = 101768$; $101768 - 444 = 10.13.24$.

Görnüşi ýaly, soňky iki sifri tomaşaçynyň ýaşyny, ortaky iki sifr onuň doglan gününi, başdaky iki sifr bolsa onuň doglan aýynyň tertip belgisini görkezýär.

11. Maşgalanyň düzümini nähili bilmeli?

Maşgalanyň düzümini bilmeklik üçin ahyrky netijeden 75-i aýyrmaly. Biziň mysalymyzda: $122 - 75 = 47$. Tapawudyň birinji sifri erkek doganlaryň, ikinjisi bolsa aýal doganlaryň sanyna deňdir.

Hakykatdan-da, eger erkek doganlaryň sanyny a, aýal doganlaryň sanyny bolsa b bilen belgilesek, onda biz aşakdaky amallary ýerine ýetirýäris:

$$[(a+3) \cdot 5 + 20] \cdot 2 + b + 5 = 10a + b + 75.$$

Görnüşi ýaly, 75 aýrylandan soňra ikibelgili san galýar. Ol ikibelgili sanyň onluklary a we birlikleri bolsa b deň.

Bu gözbagçylygy diňe aýal doganlaryň sanynyň 9-dan köp bolmadyk halatynda görkezmek mümkindir.

12. Telefon kitap ulanylýan gözbagçylyk

Bu gözbagçylygyň syry ýoldaşyňyzyň geçiren hasaplamalarynyň netijesiniň size öňünden mälimligindedir. Sebäbi islendik üçbelgili sanyň üstünde agzalan hasaplamalar ýerine ýetirilende netije hemişe birmeňzeş bolýar, ýagny elmydama 1089 alynýar. Muňa göz ýetirmek kyn däldir. Gözbagçylygy görkezmezden öň telefon kitabyny açyp, ýokardan ýa-da aşakdan 9-njy

setirde ýerleşýän telefon belgisine we onuň eýesiniň adyna, familiýasyna seretmek we ýatlamak uly mekirligi talap etmeýär.

13. Haýran galdyryjy ýatkeşlik

Bu gözbagçylygyň esasy syry, aýdyljak nyşandadyr. *A*1, *E*4 we ş.m. nyşan ýazylan kagyz ondaky ýazylan sany doly aýan edýär. Ilkibaşda siz *A*-nyň 20-ni, *B*-niň 30-y, *Ç*-niň 40-y, *D*-niň 50-ni, *E*-niň 60-y aňladýanlygyny ýatdan bilmeli. Harpyň ýanynda goýlan sifr hem şol harp bilen bilelikde käbir sany aňladýar.

Mysal üçin, *A*1 belgi 21-i, *Ç*3 belgi 43-i, *E*5 belgi bolsa 65-i aňladýar. Bu sanyň kömegi bilen siz käbir düzgüne esaslanyp, kartoçkada ýazylan uly sanlary düzýärsiňiz. Ol sanlaryň düzülişini mysallarda görkezeliň. Goý, size tomaşaçylaryň biri *E*4 belgini aýdan bolsun. Siziň öňüňizde şu belgä degişli kartoçkada ýazylan sany kesgitlemek durýan bolsun. Bu belgä 64 degişli. Bu san bilen siz aşakdakylary ýerine ýetirmeli: 1) onuň sifrlerini goşmaly: 6+4=10; 2) ony ikeldýärsiňiz: 64·2=128; 3) onuň uly sifrinden kiçisini aýyrmaly: 6−4=2; 4) ol sanlary köpeltmeli: 6·4=24; ähli alnan netijeleri biri-biriniň yzyndan ýazmaly: 10128224.

Alnan san kartoçkadaky ýazylan sandyr. Geçirilen hasaplamalary gysgaça şeýle belgilenýär: +, 2, −, ·, ýagny goşmak, ikeltmek, aýyrmak we köpeltmek.

*D*3 kartoçkada haýsy sanyň ýazylandygyny kesgitläliň:

*D*3−53; 5+3=8; 53·2=106; 5−3=2; 5·3=15. Gözlenilýän san 8106215.

*B*8 kartoçkada haýsy sanyň ýazylandygyny kesgitläliň:

*B*8–38; 3+8=11; 38·2=76; 8–3=5; 8·3=24. Gözlenilýän san 1176524.

Bu mekir gözbagçylygyň syryny açmak örän kyn. Şoňa görä-de bu gözbagçylyk tomaşaçylary haýran galdyrýar.

14. Ajaýyp ýatkeşlik

Bu gözbagçylygyň syry ýönekeý we gülkünç. Siz öz tanyşlaryňyzyň birnäçesiniň telefon belgilerini yzygider ýazmaly.

15. Nähili edip ýazylmadyk sanlaryň jemini bilmeli?

Eger bäşbelgili sanyň üstüne 99999 goşulsa, ýagny 100000–1, onda sanyň öňünde birlik emele geler, ýöne ahyryndaky sifr 1 birlik kemeler. Gözbagçylyk hem oňa esaslanandyr. Ýatdan birinji goşulyja 99999-y goşup, 84706+99999, siz alynmaly 3 sanyň jemini, ýagny 184705 ýazýarsyňyz. Siz diňe ikinji we üçünji goşulyjylaryň jemininň 99999 bolmagy barada aladalanmaly bolarsyňyz. Şonuň üçin siz üçünji goşulyjy ýazylanda ýatdan ikinji sanyň her bir sifrini dokuzlykdan aýyrmaly. Biziň mysalymyzda ikinji goşulyjy 30485; şonuň üçin siz 69514 ýazmaly. 30485+69514=99999.

Şonuň üçin öňünden ýazylan netije hökman ýerine ýetmeli.

17. Fibonaççiniň sanlaryny goşmak

Bu gözbagçylygyň syryna düşünmek ol diýen kyn däldir. Goý, Fibonaççiniň birinji we ikinji sanlary *a* we *b* bolsun.

Onda biz 10 agzadan ybarat bolan aşakdaky Fibonaççiniň sanlaryny alarys:

$$a$$
$$b$$
$$a+b$$
$$a+2b$$
$$2a+3b$$
$$3a+5b$$
$$5a+8b$$
$$8a+13b$$
$$13a+21b$$
$$21a+34b.$$

Bu sanlary goşup, 55a+88b aňlatmany alarys. Bu aňlatmany 11-e bölsek, aşakdan 4-nji agzanyň alynjakdygy görünýär:

$$(55a+88b):11=5a+8b.$$

XII-XIII asyrlarda ýaşan belli italýan matematigi Leonardo Fibonaççiniň ady aşakdaky ajaýyp yzygiderlik bilen baglanyşykly uly meşhurluga eýedir:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Bu yzygiderlik $u_1=1$, $u_2=1$, $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ ($n>1$ bolan islendik natural san üçin) şertler bilen kesgitlenilýär. Bu yzygiderligiň agzalaryna Fibonaççiniň sanlary diýilýär.

Fibonaççiniň sanlary kombinatrikada, geometriýada ýygy-ýygydan duş gelýär. Fibonaççiniň sanlaryň gyzykly häsiýetleri bardyr. Olaryň käbirlerini belläp geçeliň:

1. $u_1^2+u_2^2+u_3^2+...+u_n^2=u_n u_{n+1}$;

2 $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = u_{n+2}u_{n-1} - u_n u_{n-1} = (-1) = (-1)^n$;

3. $u_{m+k} = u_{k-1}u_m + u_k u_{m+1}$.

Fibonaççiniň sanlarynyň bu häsiýetlerini matematiki induksiýa metody bilen subut edip bolýar.

Fibonaççiniň sanlarynyň her bir üçünji agzasy sandyr, her bir dördünji agzasy üçe bölünýändir we her bir on bäşinji agzasy bolsa nol bilen tamamlanýandyr. Fibonaççiniň sanlarynyň iki goňşy agzasy özara ýönekeýdir, diňe m natural san n natural sana bölünýän mahalynda u_m agza u_n agza bölünýändir.

Fibonaççiniň sanlarynyň bölünijiligi dykgatly öwrenilende 5 sana aýratyn ornuň degişlidigi ýüze çykarylypdyr. Meselem, eger p ýönekeý san $5t \pm 1$ görnüşe eýe bolsa, onda u_{p-1} agza p bölünýändir.

1786–1856-njy ýyllarda ýaşap geçen fransuz matematigi Ž. Bine Fibonaççiniň sanlaryny n belgä görä funksiýa görnüşinde aňlatmagyň aşakdaky formulasyny tapypdyr:

$$u_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Ž. Bineniň bu formulasynyň kömegi bilen Fibonaççiniň sanlarynyň yzygiderliginiň islendik agzasyny tapyp bolýar.

20. Sanyň sifrler köküniň syrlary

1. Islendik sanyň meselem, altybelgili 937264 sanyň sifrleriniň ýerlerini islendik tertipde çalşyryp altybelgili 426793 sany alýarys we olaryň ulusyndan kiçisini aýyrýarys:

$$\begin{array}{r} 937264 \\ -\ 426793 \\ \hline 510471 \end{array}$$

Tapawudyň sifrler köki hökman 9-a deň bolýar. Şu maglumatdan peýdalanyp, dürli gözbagçylyklary geçirmek bolar. Meselem, gürrüňdeşiňize islendik sany alyp, onuň sifrleriniň ornuny islendik tertipde üýtgetmegi we ilkibaşdaky hem-de soňky alnan sanlaryň ulusyndan kiçisini aýyrmagy, tapawuda islendik sifri goşmagy we netijäni aýtmagy tabşyrýarsyňyz. Alnan netije boýunça siz ýatdan bellenen sifri tapýarsyňyz.

2. Islendik sany meselem, 659327 sany alyp, ol sandan onuň sifrleriniň jemini, ýagny 6+5+9+3+2+7=32 aýyrýarys:

$$\begin{array}{r} 659327 \\ -\ \quad 32 \\ \hline 659295 \end{array}$$

Şu ýagdaýda hem tapawudyň sifrler köki 0-a deň bolar. Ýokardaky mysaldaka meňzeş şu maglumaty ulanyp, dürli gözbagçylyklary geçirip bolar.

22. Goşmakly gözbagçylyk

Goý, goşmaga degişli aşakdaky mysal alnan bolsun.

$$\begin{array}{r} 238213 \\ +\ 625198 \\ \hline 863411 \end{array}$$

Birinji goşulyjynyň sifrler köki 1-e, ikinji goşulyjynyňky 4-e deň. Onda jemiň sifrler köki 5-e deň bol-

maly. Goý, jemdäki 6 sifriň daşy galam bilen aýlanyp, 8, 3, 4, 1, 1 gözbagça aýdylan bolsun. Soňky sanlaryň sifrler köki 8-e deň. Jemiň sifrler köki bolan 5-iň üstüne 9-y goşup ondan 8-i aýyrýarys.

Diýmek, daşy galam bilen aýlanan sifr 6-a deň.

Ulanylan edebiýatlar

1. «Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Kazan döwlet uniwersitetiniň hormatly doktorynyň diplomynyň gowşurylyş dabarasyndaky çykyşy».

2. «Ylym we tehnika baradaky ýokary geňeşiň Magtymguly adyndaky Türkmen döwlet uniwersitetinde geçirilen göçme mejlisi».

3. *G. M. Berdimuhamedow.* «Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr».

4. *G. M. Berdimuhamedow.* «Ösüşiň täze belentliklerine tarap».

5. *G. M. Berdimuhamedow.* «Eserler ýygyndysy» I jilt.

6. *Гарднер Ме.* Математические чудеса и тайны. – Москва: Наука, 1967.

7. *Кордемский Б.А.* Математическая смекалка. – Москва: Наука, 1965.

8. *Перельман Я. И.* Занимательные задачи и опыты. – Москва: Детская литература, 1972.

9. *Перельман Я.И.* Занимательная алгебра. – Москва: Наука, 1967.

10. *Фирсова Л.М.* Игры и развлечения. – Москва: Молодая гвардия, 1989.

11. *Хайдаров Б., Хемраев Ч.* Математикадан класдан дашары ишлер. Чәрҗев, 1998.

12. *Bekbulatow M., HaýdarowB., Öwezow A.* Matematiki gözbagçylyklar we olaryň syrlary. – Türkmenabat, 2002.

13. *B. Haýdarow we başgalar.* Matematikadan sofizmler. – Türkmenabat, 2004.

14. *Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С.* Математическая шкатулка.–Москва: Просвещение, 1988.

15. *Мазаник А. А.* Реши сам.–Минск: Народная асвета, 1972.

16. *Петраков И. С.* Математические кружки и КВН в школе.– Математика в школе, 1978, № 3.

17. *Балк И.Б., Балк Г.Д.* Математика после уроков. – Москва, 1971.

18. *Дышинский Е.А.* Игротека математического кружка.–Москва, 1972.

19. *Брадис В.М., Харчева А.К., Минковский В.Л.* Ошибки в математических рассуждениях.–Москва, 1959.

20. *Шустеф Ф.М.* Материал для внеклассной работы по математике. – Минск, 1968.

21. *Кордемский Б. А.* Математическая смекалка. – Москва, 1957.

22. *Аменицкий Н.Н., Сахаров И.П.* Забавная арифметика.– Москва, 1991.

23. *Игнатьев Е.И.* В Царстве смекалки.–Москва, 1981.

24. *Поляк Г.Б.* Занимательные задачи.–Москва, 1943.

25. *Широков В.Ф.* Сборник арифметических задач на соображение.–Москва, 1949.

Mazmuny

Giriş 7

I BAP

Degişme we logiki hasiýetli meseleler 9
Çözülişler we jogaplar 24

II BAP

Hasaplamaga, deňleme düzmäge we göterimlere degişli meseleler 41
Çözülişler we jogaplar 58

III BAP

Matematiki sofizmler 75
Sofizmler 76
Jogaplar 86
Geometrik sofizmler 89
Jogaplar 102

IV BAP

Matematiki gözbagçylyklar 105
Jogaplar we çözülişler 136
Ulanylan edebiýatlar 148

Baba Kömekow, Amanguly Orazgulyýew,
Gurbannazar Gurbangulyýew,
Orazmuhammet Aşyrow, Annageldi Kaşaňow,
Hajymuhammet Geldiýew, Azatgeldi Öwezow

TÄSIN MATEMATIKANYŇ SYRLARY

Orta, orta hänär we ýokary okuw mekdepleri üçin okuw gollanmasy

Redaktor	*A. Aşyrowa*
Surat redaktory	*G. Orazmyradow*
Teh. redaktory	*T. Aslanowa*
Suratçy	*G. Klýuýewa*
Neşir üçin jogapkär	*T. Gulamow*