**G. Şadurdyýew, A. Babaýew, A. Ýegenow,
O. Garagulow, B. Haýdarow**

ALGEBRA WE ELEMENTAR MATEMATIKA

Mugallymçylyk mekdepleri üçin synag okuw kitaby

*Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi*

**Aşgabat
"Ylym" neşirýaty
2011**

UOK 512+510:378
Ş 14

Şadurdyýew G. we başg.
Ş 14 **Algebra we elementar matematika.** Mugallymçylyk mekdepleri üçin synag okuw kitaby. – A.: "Ylym" neşirýaty, 2011. - 240 sah.

TDKP №23 KBK 22.14+22.10 ýa 73

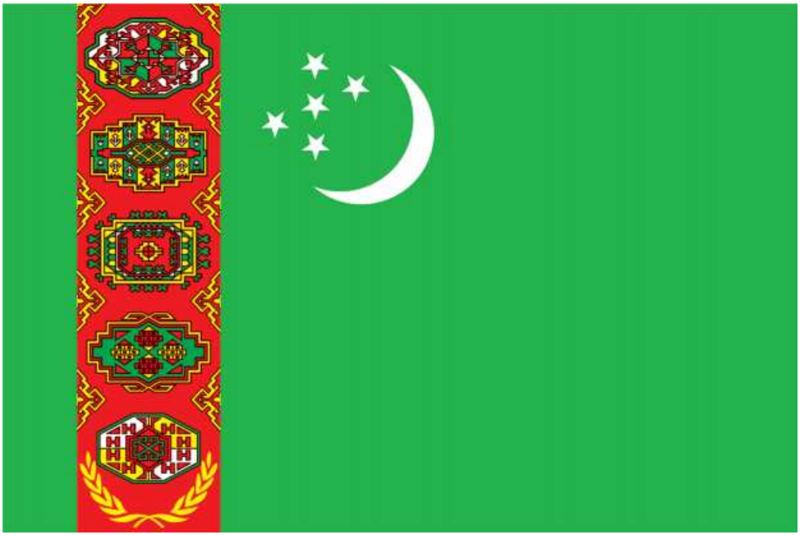
Redaktor *M. Jemilow*
Surat redaktory *T. Aslanowa*
Teh. redaktory *T. Aslanowa*
Suratçy *Ý. Peskowa*
Neşir üçin jogapkär *T. Gulamow*

Ýygnamaga berildi 05.05.2010. Çap etmäge rugsat edildi 04.02.2011.
Ölçegi 60x90 $^{1}/_{16}$. Ofset kagyzy. Edebi garnitura.
Ofset çap ediliş usuly. Çap listi 15,0. Hasap-neşir listi 9,0.
Neşir №5. Sargyt №00. Sany 600.

Türkmenistanyň Ylymlar akademiýasynyň "Ylym" neşirýaty.
744000 Aşgabat, Türkmenbaşy şaýoly, 18.

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

I bap

Birinji derejeli deňlemeler, birinji derejeli iki we üç näbellili deňlemeler ulgamy

§1. Birinji derejeli deňlemeler

$a \neq 0$ bolanda $ax + b = 0$ görnüşli deňlemä bir näbellili birinji derejeli deňleme diýilýär.

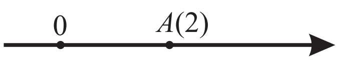
a we b islendik sanlar bolanda $ax+b=0$ görnüşli deňlemä bir näbellili çyzykly deňleme diýilýär.

Birinji derejeli deňleme çyzykly deňlemedir, ýöne çyzykly deňleme birinji derejeli deňleme bolman hem biler. Mysal üçin, $2x+3=7$, $0{,}3x=0$, $\frac{x}{2} + 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$ deňlemeler bir näbellili çyzykly deňlemelerdir. Bu deňlemeleriň ilkinji ikisi birinji derejeli deňlemelerdir, üçünji deňleme bolsa birinji derejeli deňleme däldir.

Bir näbellili birinji derejeli deňlemäniň diňe bir çözüwi bar.

$ax+b=0$ $(a \neq 0)$ deňlemäniň çözüwine koordinata göni çyzygynda $A(-\frac{b}{a})$ nokat degişlidir.

Mysal. $8x-16=0$, $x=2$.



Çyzykly deňlemäniň çözüwi bolman hem biler $(0 \cdot x=5)$ ýa-da tükeniksiz köp çözüwi bolup biler $(0 \cdot x=0)$.

$a \neq 0$ we $b \neq 0$ bolanda $ax + by = c$ görnüşli deňlemä iki näbellili birinji derejeli deňleme diýilýär. Mysal üçin, $8x-3y=2$; $y=4x-9$ deňlemeler iki näbellili birinji derejeli deňlemelerdir. Iki näbellili birinji derejeli deňlemäniň tükeniksiz köp çözüwi bardyr. Mysal üçin, $x+y=15$ deňlemäniň çözüwleri $x_1=1$, $y_1=14$; $x_2=2$, $y_2=13$; $x_3=100$, $y_3=-85$ we ş.m. bolar.

Eger a we b islendik sanlar bolsa (noldan tapawutly bolmagy hökman däl), onda $ax+by=c$ deňlemä iki näbellili çyzykly deňleme diýilýär. Şeýle deňlemäniň çözüwi bolman biler ($0 \cdot x+0 \cdot y=5$).

$ax+by+cz=d$ görnüşli deňlemä üç näbellili birinji derejeli deňleme diýilýär. Mysal üçün, $15x+10y+8z=164$; $2x-3y+z=7$ deňlemeler üç näbellili birinji derejeli deňlemelerdir. Bu deňlemeleriň tükeniksiz köp çözüwi bardyr.

x-iň we y-iň ornuna käbir sanlar goýlup, berlen deňlemeden z-iň bahasy tapylýar.

Mysal üçin, $x=2$, $y=5$ bahalary $15x+10y+8z=164$ deňlemede ornuna goýup z-i tapýarys: $15 \cdot 2+10 \cdot 5+8z=164$, $80+8z=164$, $z=10,5$. x-iň we y-iň ornuna başga sanlar goýlup z-iň beýleki bahalary tapylýar.

Gönükmeler

1. a we b-niň haýsy bahalrynda $ax + b = 0$ deňlemäniň:

a) çözüwi ýok;

b) ýeke-täk çözüwi bar;

ç) tükeniksiz köp çözüwi bar?

2. a we b-niň haýsy bahalarynda $ax+b=0$ deňlemäniň çözüwi:

a) nola deň; b) otrisatel; ç) položitel.

3. Bir näbellili birinji derejeli üç sany deňlemäni düzüň we olary çözüň.

4. Bir näbellili çyzykly, ýöne birinji derejeli däl dört sany deňlemäni düzüň we olary çözüň.

§2. Birinji derejeli iki näbellili deňlemeler

M e s e l e. Iki sanyň jemi 10-a deň. Ol sanlary tapmaly.

Meseläniň şertinden görnüşi ýaly, sanlar bize näbelli, diňe olaryň jemi belli. Birinji sany x we ikinji sany y bilen belgilesek, onda $x+y=10$ deňligi alarys, x we y näbelli (üýtgeýän) ululyklardyr. Iki näbellisi bolan şeýle deňlige iki näbellili çyzykly deňleme diýilýär. Iki näbellili çyzykly deňlemelere mysallar getireliň: $5x+2y=10$; $2x-3y=1$; $x-y=12$ we ş.m.

K e s g i t l e m e: $ax+by=c$ görnüşli deňlemä iki näbellili çyzykly deňleme diýilýär. Bu ýerde x we y näbelli ululyklar, a, b we c – käbir sanlar.

Iki näbellili çyzykly deňlemäniň çözüwi diýip, şol deňlemäni dogry san deňligine öwürýän sanlaryň jübütine aýdylýar.

Meselem, $x+y=10$ deňlemäniň çözüwi: $x=6$, $y=4$; $x=8$, $y=2$; $x=7$, $y=3$ we $x=5$, $y=5$ sanlar jübüti bolýar. Bu jübütler gysgaça (6; 4), (8; 2), (7; 3) we (5; 5) ýaly ýazylýar. Şeýle ýazgyda näbelli ululyklaryň bahasynyň haýsysynyň birinji, haýsysynyň ikinji orunda durmalydygyny bilmek zerurdyr. Üýtgeýän x we y ululykly çyzykly deňlemäniň çözüwleriniň ýazgysynda x-iň bahasy birinji, y-iň bahasy bolsa ikinji orunda ýazylýar.

Şeýlelikde, $ax+by=c$ deňlemäniň çözüwi, x we y näbelli ululyklaryň bahalarynyň jübüti bolýar we ol $(x_0; y_0)$ görnüşde ýazylýar.

Iki näbellili deňlemeler hem bir näbellili deňlemeler ýaly aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1) eger deňlemede goşulyjylaryň alamatlaryny üýtgedip, olary deňlemäniň bir böleginden beýleki bölegine geçirsek, onda berlen deňlemä deňgüýçli bolan deňleme emele geler;

2) eger deňlemäniň iki bölegini hem nola deň bolmadyk şol bir sana köpeltsek ýa-da bölsek, onda berlen deňlemä deňgüýçli bolan deňleme emele geler.

Meselem, $3x+2y=6$ (1) deňleme berlen bolsun. Deňlemeleriň häsiýetlerinden peýdalanyp, bu deňlemede näbelli ululygyň birini beýlekisiniň üsti bilen aňladalyň (y ululygy x bilen). Ýagny $3x$ goşulyjynyň alamatyny üýtgedip deňlemäniň sag bölegine geçireliň. Onda $2y=-3x+6$ görnüşli deňleme alarys. Şol deňlemäniň iki bölegini hem 2-ä bölüp, öňki (1) deňlemä deňgüýçli deňleme alarys:

$$y=-1{,}5x+3 \qquad (2)$$

(1) we (2) deňlemeler deňgüýçlüdirler; $y=-1{,}5x+3$ deňlemeden peýdalanyp (1) deňlemäniň tükeniksiz köp çözüwini tapmak bolar. Onuň üçin bolsa, x-e erkin baha berip, y-iň oňa degişli bahasyny hasaplamak ýeterlikdir.

Eger $x=2$ bolsa, onda $y=-1{,}5\cdot 2+3=0$.

Eger $x=1$ bolsa, onda $y=-1{,}5\cdot 1+3=1{,}5$ we ş.m.

(2;0), (1;1,5) sanlaryň jübütleri (1) deňlemäniň çözüwleridir.

Gönükmeler

1. Deňlemeleriň birnäçe çözüwini görkeziň:

a) $5x-2y=5$; b) $7x+2y=6$; ç) $3x+7y=0$; d) $x-y=7$.

2. y-gi x-iň üsti bilen aňladyp, deňlemäniň üç sany çözüwini tapyň:

a) $2x+y=7$; b) $5x+3y=-10$; ç) $3x+0,8y=5$.

3. Çözüwleri aşakdaky sanlar jübüti bolan deňlemäni düzüň:

a) $x=-5$ we $y=7$; b) $x=9$ we $y=-6$; ç) $x=0$ we $y=10$.

§3. Birinji derejeli iki näbellili deňlemeler ulgamy we olaryň çözüwi

Şeýle meselä seredeliň:

Mesele. Iki şahada 12 guş otyr. Şahalaryň birinde beýleki şahadakydan 2 guş köp. Her şahada näçe guş bar?

Meseläni çözmek üçin birinji şahadaky guşlaryň sanyny x arkaly, ikinji şahadaky guşlaryň sanyny bolsa y arkaly belgiläliň. Onda meseläniň şertine görä $x+y=12$ we $x-y=2$ deňlemeleri alarys. Bu deňlemeleriň ikisinde hem näbelli ululyklar guşlaryň şol bir mukdaryny aňladýar. Şoňa görä ol deňlemelere bilelikde seretmeli bolar. Bu bolsa deňlemeler ulgamyny emele getirmekdir. Ol aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\begin{cases} x+y=12, \\ x-y=2. \end{cases} \qquad (1)$$

Deňlemeleriň çep tarapyndaky ýaý şekil olaryň bile çözülýändigini aňladýar.

$x=7$ we $y=5$ sanlaryň (1) ulgamyň iki deňlemesini hem kanagatlandyrýandygyny görýäris:

$$\begin{cases} 7+5=12, \\ 7-5=2. \end{cases}$$

Bu halda 7 we 5 sanlara (1) ulgamyň çözüwi diýilýär we ony (7; 5) ýaly ýazmak kabul edilendir.

Näbelli ululyklaryň ulgamyň her bir deňlemesini dogry deňlige öwürýän bahalarynyň jübütine ulgamyň çözüwi diýilýär.

Deňlemeler ulgamyny çözmek diýmek, onuň ähli çözüwlerini tapmak ýa-da çözüwleriniň ýokdugyny görkezmek diýmekdir.

Ýokardaky garalan mysalda (7; 5) sanlar jübüti (1) ulgamyň çözüwidir.

Gönükmeler

1. (1; –1), (2;1), (1;1) jübütleriň haýsylary deňlemeler ulgamynyň çözüwi:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 4x - 3y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 4y = 9, \\ 6x + y = 5? \end{cases}$

2. Üýtgeýän ululyklaryň: a) $x=2$, $y=5$; b) $x=0$, $y=3$ bahalar jübüti çözüwi bolýan deňlemeler ulgamyny düzmeli.

§4. Çyzykly deňlemeler ulgamyny çözmegiň usullary

1. Ornuna goýmak usuly.

1-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözmeli:

$$\begin{cases} 3x + y = 13, \\ 5x - 2y = 18. \end{cases} \qquad (1)$$

Birinji deňlemeden y-i x arkaly aňladalyň: $y=13-3x$. Ulgamyň ikinji deňlemesinde y-iň ornuna $13-3x$ aňlatmany goýup alarys:

$$\begin{cases} y = 13 - 3x, \\ 5x - 2(13 - 3x) = 18. \end{cases} \qquad (2)$$

Ulgamyň ikinji deňlemesinde diňe bir näbelli ululyk bar. Ol deňlemäni çözeliň:

$$5x-26+6x=18,$$
$$11x=44,$$
$$x=4.$$

x-iň bahasyny $y=13-3x$ deňlemede ornuna goýup, y-iň bahasyny taparys:

$$y=13-3\cdot4=1,$$
$$y=1.$$

(4;1) sanlar jübüti deňlemeleriň ikisiniň hem çözüwidir. Oňa barlamak arkaly göz ýetirip bilersiňiz.

Şol bir çözüwleri bolan iki näbellili deňlemeler ulgamyna deňgüýçli deňlemeler ulgamy diýilýär. (1) we (2) deňlemeler ulgamlary deňgüýçlüdirler. Çözüwi bolmadyk deňlemeler ulgamlary hem deňgüýçli hasaplanylýar.

Biziň (1) deňlemeler ulgamyny çözmekde peýdalanan usulymyza ornuna goýmak usuly diýilýär. Ol usulda deňlemeler ulgamyny çözmek üçin:

1) deňlemeleriň haýsy bolsa-da birinde bir näbelli beýleki näbelli arkaly aňladylýar;

2) alnan aňlatma ulgamyň beýleki deňlemesinde ol näbelliniň ornuna goýulýar;

3) alnan bir näbellili deňleme çözülýär;

4) ornuna goýmak arkaly ikinji näbelliniň bahasy tapylýar.

2-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözmeli:

$$\begin{cases} 7x+6y=6, \\ 3x+4y=9. \end{cases}$$

Ikinji deňlemede x-i y arkaly aňladalyň: $3x=9-4y$, $x=\dfrac{9-4y}{3}$.

Birinji deňlemede x-iň ornuna $\dfrac{9-4y}{3}$ aňlatmany goýalyň:

$$7\cdot\frac{9-4y}{3}+6y=6.$$

Alnan bir näbellili deňlemäni çözeliň:

$$7\cdot(9-4y)+3\cdot6y=3\cdot6;$$
$$63-28y+18y=18;$$
$$-10y=-45;$$
$$y=4,5.$$

$x = \dfrac{9 - 4y}{3}$ deňlemede y-iň ornuna 4,5-i goýup alarys.

$$x = \frac{9 - 4y}{3} = -3.$$

Jogaby: $x=-3$; $y=4,5$ ýa-da (–3; 4,5).

Gönükme

Deňlemeler ulgamyny çözmeli:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 2x + y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x = 2y = 9, \\ 7x - 5y = -3; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} 8x = 2y = 12, \\ 4x - 3y = -2. \end{cases}$

2. Goşmak usuly.

Deňlemeler ulgamy goşmak usuly bilen çözülende hem onuň deňlemeleriniň birinde diňe bir näbelli bolar ýaly edip özgertmeli.

1-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny goşmak usuly bilen çözmeli:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 2, \\ 3x - 5y = 28. \end{cases} \qquad (1)$$

Ulgamyň deňlemelerinde y-iň koeffisiýentleri garşylykly sanlardyr. Ol deňlemeleriň çep we sag böleklerini agzama-agza goşup, bir näbellili deňleme alarys: $5x=30$. (1) ulgamyň deňlemeleriniň birini $5x=30$ deňleme bilen çalşyryp alarys:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 2, \\ 5x = 30. \end{cases} \qquad (2)$$

(2) deňlemeler ulgamy (1) deňlemeler ulgamyna deňgüýçlüdir.

(2) ulgamy çözeliň:

$$5x=30,$$
$$x=6.$$

x-iň bahasyny $2x+5y=2$ deňlemede ornuna goýup alarys:

$$2\cdot6+5y=2,$$
$$5y=-10,$$
$$y=-2.$$

(1) ulgamyň çözüwi $x=6$, $y=-2$ ýa-da (6;–2) bolar.

2-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny goşmak usuly bilen çözmeli:

$$\begin{cases} x + 2y = 7, \\ 2x - 3y = -21. \end{cases}$$

Deňlemeler ulgamyny çözmek üçin haýsy hem bolsa bir näbelliniň koeffisiýentlerini garşylykly bolar ýaly edip deňläliň, onuň üçin birinji deňlemäniň iki bölegini hem –2-ä köpeldeliň. Ikinji deňlemäni üýtgewsiz galdyrýarys. Şonda deňlemelerde x-iň koeffisiýentleri garşylykly sanlar bolar:

$$\begin{cases} -2x - 4y = -14, \\ 2x - 3y = -21. \end{cases}$$

Indi deňlemeleriň çep we sag böleklerini agzama-agza goşsak, bir näbellili deňleme alnar:

$$-7y = -35;$$
$$y = 5.$$

Birinji deňlemede y-iň ornuna 5-i goýup, x-iň bahasyny taparys:

$$x + 2 \cdot 5 = 7;$$
$$x = -3.$$

Jogaby: $x = -3$; $y = 5$ ýa-da $(-3;5)$.

3-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny goşmak usuly bilen çözmeli:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0, \\ 6x + 2y = 13. \end{cases}$$

Birinji deňlemäni 2-ä, ikinji deňlemäni bolsa 3-e köpeltsek, deňlemelerde y-iň koeffisiýentleri garşylykly sanlar bolar:

$$\begin{cases} 8x - 6y = 0, \\ 18x + 6y = 39. \end{cases}$$

Bu ýerden:

$$26x = 39,$$
$$x = 1{,}5.$$

x-iň bahasyny $4x - 3y = 0$ deňlemede goýup alarys: $y = 2$.

Jogaby: $x = 1{,}5$, $y = 2$ ýa-da $(1{,}5;2)$.

Biz deňlemeler ulgamyny goşmak usuly bilen çözmegiň mysallaryna garadyk. Ol usul bilen deňlemeler ulgamyny çözmek üçin:

1) ulgamyň deňlemelerini, olarda näbellileriň biriniň koeffisiýentleri garşylykly sanlar bolar ýaly edip, haýsy hem bolsa bir sana köpeltmeli;

2) ulgamyň deňlemeleriniň çep we sag böleklerini agzama-agza goşmaly;

3) alnan bir näbellili deňlemäni çözmeli;

4) näbelli ululygyň tapylan bahasyny deňlemeleriň birinde ornuna goýup, ikinji näbelliniň bahasyny tapmaly.

Eger deňlemeler ulgamynda näbellileriň haýsy hem bolsa biriniň koeffisiýentleri garşylykly sanlar bolsa, onda ulgamy çözmek gösgöni deňlemeleri agzama-agza goşmakdan başlanýar.

Gönükme

Deňlemeler ulgamyny goşmak usulynda çözmeli:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 6x - 2y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 11, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} 3x + 4y = 11, \\ 2x + 3y = 8. \end{cases}$

3. Grafiki usul.

Iki näbellili çyzykly deňlemeleriň ulgamyny onuň deňlemeleriniň grafiklerinden peýdalanyp hem çözmek bolar. Onuň üçin ulgamyň deňlemeleriniň her biriniň grafigini aýry-aýrylykda gurup, olaryň kesişme nokadynyň koordinatalaryny tapmaly.

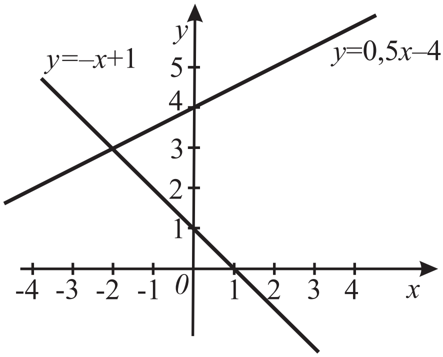
1-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny grafiki usulda çözmeli:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - 2y = - 8. \end{cases}$$

Deňlemeleriň her birinde y-i x arkaly aňladyp, $y = kx + b$ görnüşli deňlemeleri alarys:

$$\begin{cases} y = - x + 1, \\ y = 0,5x - 4. \end{cases}$$

Koordinatalar tekizliginde ulgamyň deňlemeleriniň grafiklerini guralyň (*1-nji surat*). Onuň üçin x ululyga baha berip y taparys we alnan $(x_1; y_1)$ we $(x_2; y_2)$ nokatlar boýunça göni çyzyklary geçireris.



1-nji surat

k-koeffisiýent dürli (-1 we 0,5) bolany üçin bu çyzykly funksiýalaryň grafikleri bir nokatda kesişer. Göni çyzyklaryň kesişme nokadynyň $x=-2$ we $y=3$ koordinatalary ulgamyň deňlemeleriniň ikisini hem kanagatlandyrýar. Bu göni çyzyklar (–2;3) nokatda kesişýärler. Diýmek, (–2;3) jübüt berlen ulgamyň çözüwidir. Biziň deňlemeler ulgamyny çözmekde ulanan usulymyza grafiki usul diýilýär. Grafiki usul, köplenç, deňlemäniň kökleriniň ýakynlaşan bahalaryny tapmaga mümkinçilik berýär.

Iki näbellili çyzykly deňlemeler ulgamynyň deňlemeleriniň grafikleri göni çyzyklardyr. Eger ol göni çyzyklar kesişýän bolsa, ýagny burç koeffisiýentleri $k_1 \neq k_2$ bolsa, onda ulgamyň ýeke-täk çözüwi bardyr, eger göni çyzyklar parallel bolsalar, ýagny burç koeffisiýentleri $k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$ bolsa, onda ulgamyň çözüwi ýokdur, eger göni çyzyklar gabat gelýän bolsalar, ýagny $k_1 = k_2, b_1 = b_2$ bolsa, onda ulgam tükeniksiz köp çözüwe eýedir.

2-nji mysal. Deňlemeler ulgamynyň näçe çözüwiniň bardygyny görkezmeli:

$$\begin{cases} 2x - y = -1, \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

Deňlemeleriň her birinde y-i x arkaly aňladalyň:

$$\begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = 2x - 2; \end{cases} \qquad \begin{matrix} k_1 = 2, & b_1 = 1; \\ k_2 = 2, & b_2 = -2. \end{matrix}$$

Göni çyzyklaryň burç koeffisiýentleri deň, Oy okuny kesýän nokatlary dürli bolany üçin $y=2x+1$ we $y=2x-2$ çyzykly funksiýalaryň grafikleri parallel göni çyzyklardyr.

Şoňa görä-de, berlen deňlemeler ulgamynyň çözüwi ýokdur.

3-nji mysal. Deňlemeler ulgamynyň näçe çözüwi bar:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 8, \\ 10x + 4y = 16? \end{cases}$$

Deňlemelerde y-i x arkaly aňladyp, iki deňleme üçin hem şol bir $y=-2{,}5x+4$ çyzykly funksiýany alarys:

$$\begin{cases} y = -2{,}5x + 4, \\ y = -2{,}5x + 4. \end{cases} \qquad \begin{matrix} k_1 = -2{,}5 & b_1 = 4; \\ k_2 = -2{,}5 & b_2 = 4. \end{matrix}$$

Bu bolsa $5x+2y=8$ we $10x+4y=16$ deňlemeleriň grafikleriniň gabat gelýändigini görkezýär. Diýmek, deňlemeler ulgamy tükeniksiz köp çözüwe eýedir. Ýokardaky mysallardan görnüşi ýaly aşakdakylary belläp bolar:

$k_1 \neq k_2$ bolsa göni çyzyklar kesişýärler;
$k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$ bolsa göni çyzyklar paralleldirler;
$k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$ bolsa göni çyzyklar gabat gelýärler.

Gönükmeler

1. Deňlemeler ulgamyny ornuna goýmak usuly bilen çözmeli:

a) $\begin{cases} y - 2x - 1 = 0, \\ 7x - y = 9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x - 3y = 13, \\ x - 2y = 5; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} x + y = 6, \\ 3x - 5y = 2. \end{cases}$

2. Deňlemeler ulgamyny goşmak usuly bilen çözmeli:

a) $\begin{cases} y = x - 5, \\ x - y = -6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = -6, \\ 2x - 5y = 10; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} 3x + 6y = 2, \\ 2x + 4y = 5. \end{cases}$

3. Deňlemeler ulgamyny grafiki usul bilen çözmeli:

a) $\begin{cases} 4x - y = 0, \\ x - y = -6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = -6, \\ 2x - 5y = 10; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} 3x + 6y = 2, \\ 2x + 4y = 5. \end{cases}$

§5. Ikinji tertipli kesgitleýjiler we olaryň kömegi bilen iki näbellili çyzykly deňlemeler ulgamyny çözmek

a we *b* iki sanyň jemini "+" belgisinden peýdalanyp "*a*+*b*" ýaly ýazýarys. Iki sanyň tapawudyny ýazmak üçin bolsa "–" belgisinden peýdalanýlýar. *ad–bc* tapawudy ýazmagyň şeýle görnüsi hem bardyr:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{1}$$

(1) aňlatma *a,b,c*, *d* dört sany (*a,b*) we (*c,d*) iki setiri hem-de $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ we $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ iki sütüni bolan tablisa görnüşinde ýazylandyr. Bu aňlatma tutuşlygyna *ad–cb* tapawudy ýazmak üçin ulanylýar we oňa ikinji tertipli kesgitleýji diýilýär.

Diýmek, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Meselem,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) - (-3) \cdot (-5) = -12 - 15 = -27.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - (-3) \cdot (-2) = 6 - 6 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a \cdot a - 1 \cdot 1 = a^2 - 1.$$

a, *b*, *c*, *d* sanlara (1) kesgitleýjiniň elementleri diýilýär.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \qquad (2)$$

deňlemeler ulgamynyň esasy kesgitleýjisi diýip, x we y näbellileriň koeffisiýentlerinden düzülen aşakdaky kesgitleýjä aýdylýar:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Bu esasy kesgitleýjini grek Δ (“delta” diýip okalýar) harpy bilen belläris:

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1.$$

(2) deňlemeler ulgamynyň birinji kömekçi kesgitleýjisi diýip,

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

kesgitleýjä aýdylýar. Ol berlen deňlemeler ulgamynyň esasy kesgitleýjisiniň birinji sütünini bu ulgamyň azat agzasynyň sütüni bilen çalsyrmak arkaly alynýar. Birinji kömekçi kesgitleýjini Δ_x bilen belgiläris. Δ_x belginiň aşaky x indeksi (belgisi) (2) deňlemeler ulgamyndaky x-iň koeffisiýentlerinden düzülen esasy Δ kesgitleýjidäki birinji $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ sütüniň azat agzalaryň $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ sütüni bilen çalşyrylandygyny görkezýär.

$$\Delta_x = c_1b_2 - c_2b_1$$

bolýandygy äşgärdir.

(2) deňlemeler ulgamynyň ikinji kömekçi kesgitleýjisi, bu ulgamyň esasy kesgitleýjisiniň ikinji sütünini azat agzalarynyň sütüni bilen çalyşmak arkaly alynýar:

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Bu kesgitleýjini Δ_y bilen belläp alarys:

$$\Delta_y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Mysal.

$$\begin{cases} -x + 2y = -5, \\ -7x + 3y = -13 \end{cases}$$

deňlemeler ulgamy üçin:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 3 - (-7)\cdot 2 = -3 + 14 = 11,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -13 & 3 \end{vmatrix} = (-5)\cdot 3 - (-13)\cdot 2 = -15 + 26 = 11,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -7 & -13 \end{vmatrix} = (-1)(-13) - (-7)(-5) = 13 - 35 = -22.$$

Δ, Δ_x we Δ_y kesgitleýjileriň (1) deňlemeler ulgamy çözülende nähili ulanylýandygyny mysallarda göreris.

Eger $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$

deňlemeler ulgamynyň esasy kesgitleýjisi nola deň bolmasa, onda bu deňlemeler ulgamynyň ýeke-täk çözüwi bardyr:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Meselem, ýokarda garalyp geçilen

$$\begin{cases} -x + 2y = -5; \\ -7x + 3y = -13, \end{cases}$$

ulgam üçin $\Delta=11$, $\Delta_y=11$, $\Delta_y=-22$. $\Delta\neq0$ bolany üçin ulgamyň ýeke-täk çözüwi bardyr:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{11}{11} = 1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-22}{11} = -2.$$

Şeýlelikde:

1) $\Delta \neq 0$ bolanda (2) ulgamyň diňe bir çözüwi bar;

2) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y$ bolanda (2) ulgamyň tükeniksiz köp çözüwi bar;

3) $\Delta = 0$ we Δ_x, Δ_y kesgitleýjileriň iň bolmanda biri noldan tapawutly bolsa, onda (2) ulgamyň çözüwi ýokdur.

§6. Üç näbellili çyzykly deňlemeler ulgamy we olaryň çözüliş usullary

Üç näbellili çyzykly deňlemeler ulgamy aşakdaky görnüşde berilýär:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Bu ýerde x, y, z – näbelli ululyklar.

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$ – berlen sanlar.

Bir näbellili we iki näbellili deňlemeleriň ähli häsiýetleri üç näbellili deňlemeler ulgamy üçin hem kesgitlenendir. Şonuň üçin berlen ulgamy çözmekde iki näbellili deňlemeler ulgamyny çözmekde ulanylan usullardan peýdalanmak bolar.

1-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözmeli:

$$\begin{cases} 15x + 10y + 8z = 164, \\ x + y + z = 16, \\ z = 2y. \end{cases}$$

Ulgamy ornuna goýmak usuly bilen çözeliň. Onuň üçin 1-nji we 2-nji deňlemelerde $z=2y$ ornuna goýmany ulanalyň:

$$\begin{cases} 15x + 10y + 8 \cdot 2y = 164, \\ x + y + 2y = 16; \end{cases} \qquad \begin{cases} 15x + 26y = 164, \\ x + 3y = 16. \end{cases}$$

Netijede, iki näbellili deňlemeler ulgamyny alarys. Ol ulgamyň 2-nji deňlemesinden $x = 16 - 3y$ tapyp ony 1-nji deňlemede ornuna goýup, $15 \cdot (16 - 3y) + 26y = 164$ bir näbellili deňlemäni alarys. Alnan deňlemäni çözeliň:

$240 - 45y + 26y = 164$, $-19y = 164 - 240$, $-19y = -76$, $y = 76:19$, $y = 4$.

y-iň bahasyny $x=16-3y$ aňlatmada ornuna goýup, $x=16-3\cdot4=16-12=4$ bahany taparys. $z=2y$ aňlatmadan bolsa $z=2\cdot4=8$ bahany taparys.

Diýmek, üç näbellili deňlemeler ulgamyň ýeke-täk çözüwi bar: $x=4$, $y=4$, $z=8$.

2-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözmeli:

$$\begin{cases}7x+6y+7z=100,\\ x-2y+z=0,\\ 3x+y-2z=0.\end{cases}$$

Ulgamy goşmak usuly bilen çözeliň. Onuň üçin 2-nji deňlemäni 3-e köpeldeliň we netijäni 1-nji deňlemä goşalyň:

$$\begin{array}{r}+\begin{cases}7x+6y+7z=100,\\ 3x-6y+3z=0,\end{cases}\\ \hline 10x \qquad +10z=100\end{array}$$

ýa-da $x+z=10$.

3-nji deňlemäni 2-ä köpeldeliň we netijäni 2-nji deňlemä goşalyň:

$$\begin{array}{r}+\begin{cases}x-2y+z=0,\\ 6x+2y-4z=0\end{cases}\\ \hline 7x \qquad -3z=0.\end{array}$$

Goşulyp alnan deňlemeler şeýle ulgamy emele getirýär:

$\begin{cases}x+z=10,\\ 7x-3z=0.\end{cases}$ Bu ulgamy çözüp, $x=3$; $z=7$ bahalary taparys.

Tapylan bahalary 3-nji deňlemede ornuna goýup alarys:

$9+y-14=0$, $y=14-9$, $y=5$.

Jogaby: $x=3$, $y=5$, $z=7$.

3-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözmeli:

$$\begin{cases}x+y=a,\\ x+z=b,\\ y+z=c.\end{cases}$$

Ulgamyň ähli deňlemelerini agzama-agza goşup we 2-ä bölüp alarys:

$$2x+2y+2z=a+b+c,$$

$$x+y+z=\frac{a+b+c}{2}.$$

Bu deňlikden yzygiderli 3-nji, 2-nji we 1-nji deňlemeleri aýryp alarys:

$$\begin{cases} x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2}, \\ - \\ y+z=c, \end{cases}$$
$$x=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2}.$$

$$\begin{cases} x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2}, \\ - \\ y+z=b, \end{cases}$$
$$y=\frac{a+b+c}{2}-b=\frac{a-b+c}{2}.$$

$$\begin{cases} x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2}, \\ - \\ x+y=a, \end{cases}$$
$$z=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{-a+b+c}{2}.$$

Jogaby: $x=\dfrac{a+b+c}{2};\ y=\dfrac{a-b+c}{2};\ z=\dfrac{-a+b+c}{2}.$

4-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözmeli:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=-9, \\ x_1-x_2+3x_3=2, \\ 3x_1-6x_2-x_3=25. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ -12x_2 - 16x_3 = 52, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ -8x_3 = 8. \end{cases}$$

Bu ýerden $x_1 = 2$; $x_2 = -3$; $x_3 = -1$ alarys.

5-nji mysal. I we II tekjede 27 kitap, I we III tekjede 25 kitap, II we III tekjede 26 kitap bar bolsa, her tekjede näçe kitap bar?

Çözülişi:

Gysgaça ýazalyň:

I – x kitap, II – y kitap, III – z kitap.

Şerte görä:

$$\begin{cases} x + y = 27, \\ x + z = 25, \\ y + z = 26. \end{cases}$$

$x + y = 27$; $x + z = 25$; $y + z = 26$ deňlemeleri agzama-agza goşup aşakdaky deňligi alarys:

$2x + 2y + 2z = 78$. Bu deňligiň iki bölegini hem ikä böleliň.

$$\begin{cases} x + y + z = 39, \\ x + y = 27 \end{cases}$$

ulgamyň birinji deňlemesinden ikinjini aýryp $z = 12$ alarys.

$y + z =$ý26 deňlemede z-e derek 12-ni goýup $y = 14$ alarys.

$x + y = 27$ deňlemede y-e derek 14-i goýup $x = 13$ alarys.

Jogaby: 13, 14, 15.

Gönükme

Deňlemeler ulgamyny çözmeli:

a) $\begin{cases} x + y + z = -2, \\ x - y + 2z = -7, \\ 2x + 3y - z = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z = 7, \\ 2x - y + z = 2, \\ 3x - 5y + 2z = -7; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} x - 3y + z = 7, \\ 3x + y - 2z = 3, \\ x + 7y - 4z = 0. \end{cases}$

§7. Üç näbellili çyzykly deňlemeler ulgamlarynyň çözüwleriniň geometrik manysy

Üç näbellili çyzykly deňlemeler ulgamy giňişlikde üç tekizligi berýär. Üç tekizligiň giňişlikde özara mümkin bolan ýerleşiş hallaryna garalyň.

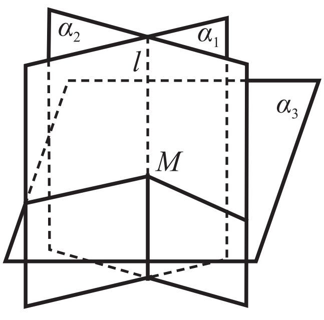
1. Üç tekizligiň hemmesi dürli.

2. Iki tekizlik gabat gelýär, üçünji bolsa olardan tapawutlanýar.

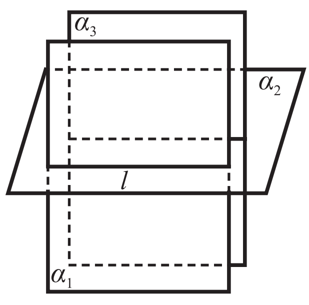
3. Tekizligiň üçüsi-de gabat gelýär.

Şu mümkin bolan hallaryň her birine aýratyn garalyň.

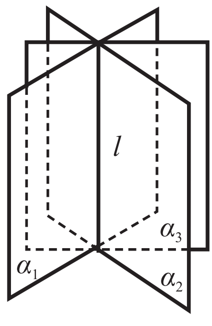
1. Eger tekizlikleriň haýsy hem bolsa ikisi – α_1 we α_2 kesişýän bolsalar, onda üç halyň bolmagy mümkindir: 1) üçünji α_3 tekizlik α_1 we α_2 tekizlikleriň kesişme l çyzygyny kesýär (*2-nji surat*). 2) α_3 tekizlik l çyzyga parallel we olaryň umumy nokady ýok (*3-nji surat*); 3) α_3 tekizlik l çyzygy öz içine alýar (*4-nji surat*). Eger-de kesişýän tekizlikler bolmasa, onda 4-nji hal bolýar- tekizlikleriň üçüsi-de paralleldir (*5-nji surat*).



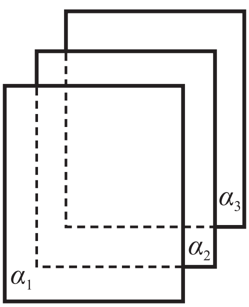
2-nji surat



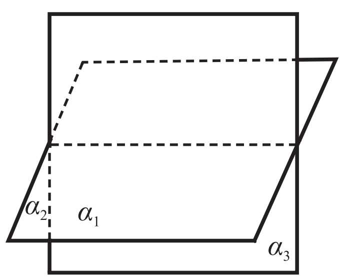
3-nji surat



4-nji surat



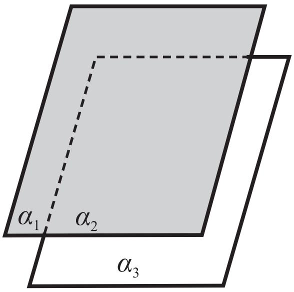
5-nji surat



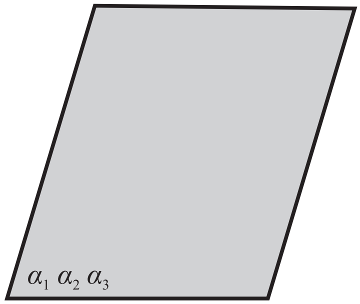
6-njy surat

2. Bu ýagdaýda iki halyň bolmagy mümkin: 5) α_3 üçünji tekizlik gabat gelýän α_1 we α_2 tekizlikleri kesýär (*6-njy surat*). 6) α_3 tekizlik gabat gelýän α_1 we α_2 tekizliklere parallel we olar bilen umumy nokady ýok (*7-nji surat*). 6-njy we 7-nji suratlarda gabat gelýän tekizlikler ştrihlenendir.

3. Tekizlikleriň üçüsi-de gabat gelýän bolsa, onda 7-nji hal bolýar (*8-nji surat*).



7-nji surat



8-nji surat

1-nji halda ulgamyň bir çözüwi, 3, 5 we 7 hallarda tükeniksiz köp çözüwi bar, 2, 4, we 6 hallarda çözüwleriň köplügi boş köplükdir.

Alnan netijeler amatlylyk üçin tablisada berlendir.

		Hal	**Kesişme**
a) Tekizlikleriň üçüsi-de dürli	3 tekizlik bir nokatda kesişýärler	1	Nokat
	2 tekizlik üçünji tekizlige parallel bolan göni çyzyk boýunça kesişýärler	2	Boş köplük
	2 tekizlik üçünji tekizlikde ýatýan göni çyzyk boýunça kesişýärler	3	Göni çyzyk
	Tekizlikler parallel.	4	Boş köplük
b) Iki tekizlik gabat gelýär, üçünji bolsa olardan tapawutlanýar	Gabat gelýän tekizlikler üçünji bilen kesişýärler	5	Göni çyzyk
	Gabat gelýän tekizlikler üçünjä parallel	6	Boş köplük
ç) Tekizlikleriň üçüsi-de gabat gelýär		7	Tekizlik

San göni çyzygyna we san tekizligine meňzeşlikde, R^3 san giňişligine – tertiplenen üç hakyky sanlar köplügine garamak mümkindir. Şonda üýtgeýän üç ululykly deňlemäniň (deňlemeler ulgamynyň) her bir çözüwine R^3 san giňişliginiň nokady hökmünde garamak mümkindir. Şu nukdaýnazardan 3 we 5 hallar 7 haldan tapawutlanýarlar. 3 we 5 hallarda ulgamyň çözüwler köplügi san giňişligindäki göni çyzykdyr, 7 halda bolsa san giňişligindäki tekizlikdir.

Gönükmeler

Deňlemeler ulgamyny çözmeli.

1. $\begin{cases} x - 2y + 3z = -1, \\ 2x + y - 5z = 9, \\ 4x - 3y + z = 7. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 3x + 5y + z = -10, \\ x + y + 3z = -10. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x - y - z = 5, \\ 2x + y - 3z = 3, \\ x - 4y - 6z = 7. \end{cases}$

§8. Üçünji tertipli kesgitleýjiler we olaryň kömegi bilen deňlemeler ulgamyny çözmek

Üçünji tertipli kesgitleýji aşakdaky ýaly berilýär:

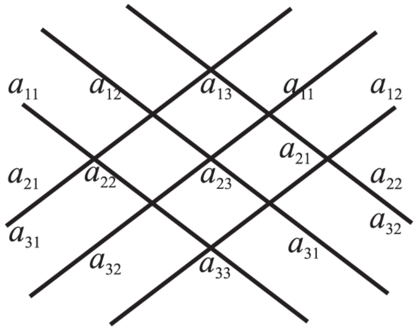
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu ýerde a_{11} – birinji setirde, birinji sütünde duran elementi, a_{23} – ikinji setirde, üçünji sütünde duran elementi aňladýar we ş.m

Üçünji tertipli kesgitleýjini hasaplamagyň iki usulyna seredeliň.

Kesgitleýjiniň aňlatmasynyň yzyndan onuň birinji, ikinji sütünlerini göçürip ýazmaly.

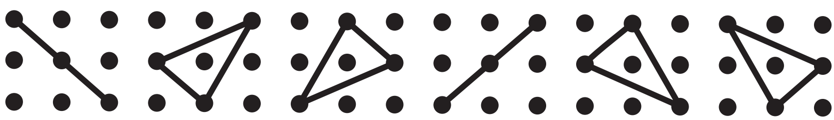
9-njy suratda görkezilen usulda üç elementiň üstünden göni çyzyklar geçirmeli. Çepe ýapgyt her bir göni çyzygyň üstünde ýatan elementleriň köpeltmek hasylyny öz alamaty bilen almaly. Saga ýapgyt her bir göni çyzygyň üstünde ýatýan elementleriň köpeltmek hasylyny bolsa, onuň ters alamaty bilen almaly.



9-njy surat

Meselem,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 + 48 - 4 - 30 + 24 - 4 = 49.$$



10-njy surat

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ kesgitleýjini hasaplamak ikinji usulda (*10-njy surat*)

aşakdaky ýaly ýerine ýetirilýär:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Mysal. Kesgitleýjini hasaplamaly:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot(-1)+1\cdot1\cdot5+3\cdot4\cdot3-5\cdot(-2)\cdot3-$$

$$-3\cdot1\cdot(-1)-4\cdot1\cdot2=4+5+6+30+3+8=70.$$

Aşakdaky üç näbellili çyzykly deňlemeler ulgamyny üçünji tertipli kesgitleýjileriň kömegi bilen çözeliň:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=d_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=d_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=d_3. \end{cases} \tag{1}$$

Eger (1) ulgamyň esasy kesgitleýjisi

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

noldan tapawutly bolsa, onda bu ulgamyň ýeke-täk çözüwi bar. (1) ulgamyň çözüwini tapmak üçin Δ kesgitleýjiniň 1-nji, 2-nji, 3-nji sütünini azat agzalar bilen çalşyryp

$$\triangle x=\begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \triangle y=\begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \triangle z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & d_3 \end{vmatrix}$$

kesgitleýjileri alarys. Bu kesgitleýjileri ýokarda beýan eden usullarymyzyň islendigi bilen hasaplap, (1) ulgamyň çözüwlerini aşakdaky görnüşde taparys:

$$x=\frac{\triangle_x}{\triangle}, \quad y=\frac{\triangle_y}{\triangle}, \quad z=\frac{\triangle_z}{\triangle}. \quad (\triangle\neq 0)$$

(1) ulgamy çözmegiň bu usulyna Krameriň usuly diýilýär.

Kesgitleýjiler nazaryýetiniň esaslaryny Şweýsariýaly alym G. Krameriň (1704-1752) işlänligi sebäpli, çyzykly deňlemeler ulgamyny kesgitleýjiler arkaly çözmek usulyna Krameriň usuly diýilýär.

Mysallar.

1. Ulgamy çözmeli:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2, \\ x + 3y - 2z = 1, \\ 4x - 5y - 3z = -15. \end{cases}$$

Çözülişi:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -64 \neq 0 \qquad \triangle x = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -15 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -64$$

$$\triangle y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -15 & -3 \end{vmatrix} = -128 \qquad \triangle z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -15 \end{vmatrix} = -192$$

$$x = \frac{\triangle x}{\triangle} = \frac{-64}{-64} = 1,\ y = \frac{\triangle y}{\triangle} = \frac{-128}{-64} = 2,\ z = \frac{\triangle z}{\triangle} = \frac{-192}{-64} = 3.$$

Diýmek, $x=-1, y=2, z=3$.

2. Ulgamy çözmeli:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ 5x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 15, \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 3. \end{cases}$$

Çözülişi.

Ulgamyň esasy kesgitleýjisini hasaplalyň:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & -4 & 10 \\ 3 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Diýmek, ulgamyň ýa-ha çözüwi ýok, ýa-da tükeniksiz köp çözüwi bar. Muny anyklamak üçin Δ_x-i hasaplalyň:

$$\triangle x = \begin{vmatrix} 17 & 2 & 2 \\ 15 & -4 & 10 \\ 3 & -5 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Delta_x \neq 0$ bolany üçin Δ_y, Δ_z hasaplamagyň zerurlygy ýok.
$\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$. Ulgamyň çözüwi ýok.

Gönükmeler

Deňlemeler ulgamyny üçünji tertipli kesgitleýjileriň kömegi bilen çözmeli:

1. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 20, \\ x - 2y + 2z = 2, \\ 5x + y - 3z = -2. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 4x + 2y - z = 15, \\ x - y + z = 2, \\ 5x + y - 3z = 14. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 2x - y + 4z = 5, \\ 3x + y - z + 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1, \\ 5x - 6y - 4z = 3; \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8, \\ 2x + 4y - 5z = 11, \\ 4x - 3y + 2z = 1. \end{cases}$

II bap

Deňsizlikler we deňsizlikler ulgamy

§1. San deňsizlikleri we olaryň häsiýetleri

Biz *a* we *b* islendik sanlary deňeşdirip bileris we =, <, > belgileri peýdalanyp, deňeşdirme netijesini deňlik ýa-da deňsizlik görnüşinde ýazyp bileris. *a* we *b* erkin sanlar üçin aşakdaky gatnaşyklaryň biri we diňe biri ýerine ýetýär:

$$a = b,\ a < b,\ a > b.$$

Mysallara seredeliň.

1. $\frac{5}{8}$ we $\frac{4}{7}$ droblary deňeşdirmeli. Onuň üçin olary umumy maýdalawja getireliň: $\frac{5}{8} = \frac{35}{56}$; $\frac{4}{7} = \frac{32}{56}$; $35 > 32$ bolany üçin $\frac{5}{8} > \frac{4}{7}$.

2. 3,6748 we 3,675 onluk droblary deňeşdirmeli. Birlikler, ondan birler, ýüzden birler razrýadlaryndaky sifrler gabat gelýärler, müňden birler razrýadynda birinji drobda 4-lik sifr, ikinji drobda 5-lik sifr ýazylypdyr, ýagny $4 < 5$ bolany üçin, $3,6748 < 3,675$.

3. $\frac{9}{20}$ ady droby 0,45 onluk drob bilen deňeşdireliň. $\frac{9}{20}$ droby onluk droba öwrüp, $\frac{9}{20} = 0,45$ alarys.

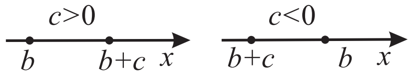
4. –15 we –23 otrisatel sanlary deňeşdirmeli. Birinji sanyň moduly ikinji sanyň modulyndan kiçi. Diýmek, birinji san ikinji sandan uludyr, ýagny $-15 > -23$.

Sanlaryň anyk görnüşine baglylykda biz ol sanlary deňeşdirmekde şol ýa-da beýleki usullary peýdalandyk. Ýöne sanlary deňeşdirmegiň ähli hallaryny içine alýan usuly ulanmak amatlydyr. Ol usul sanlaryň tapawudyny düzmekden we onuň položitel sandygyny, otrisatel sandygyny ýa-da nola deňdigini anyklamakdan ybaratdyr.

Kesgitleme. Eger $a - b$ tapawut položitel san bolsa, onda a san b sandan uludyr, eger $a - b$ tapawut otrisatel san bolsa, onda a san b sandan kiçidir.

Eger $a–b$ tapawut nola deň bolsa, onda a we b sanlar deňdir.

Koordinata göni çyzygynda uly san sagda ýatan nokat bilen, kiçi san bolsa çepde ýatan nokat bilen şekillendirilýär. Goý, a we b sanlar käbir sanlar bolsun, $a–b$ tapawudy c harpy bilen belgiläliň. $a - b = c$ bolýandygy üçin, $a = b + c$. Eger c – položitel san bolsa, onda $b+c$ koordinataly nokat b koordinataly nokatdan sagda ýatýar, eger c – otrisatel san bolsa, onda $b+c$ koordinataly nokat b koordinataly nokatdan çepde ýatýar (*11-nji surat*). Diýmek, eger $a > b$ bolsa, onda a koordinataly nokat b koordinataly nokatdan sagda ýatýar, eger $a < b$ bolsa çepde ýatýar.



11-nji surat

Getirilen kesgitlemäni mesele çözmekde nähili peýdalanmalydygyny görkezeliň.

1-nji mesele. a-nyň islendik bahasynda $(a–3)(a–5)<(a–4)^2$ deňsizligiň dogrudygyny subut etmeli.

Deňsizligiň çep we sag bölekleriniň tapawudyny düzeliň we ony özgerdeliň:

$(a–3)(a–5)-(a–4)^2 = a^2-3a-5a+15-a^2+8a-16=–1.$

a – islendik bahasynda garalýan tapawut otrisateldir. Diýmek, a-nyň islendik bahasynda $(a–3)(a–5)<(a-4)^2$ deňsizlik dogrudyr.

2-nji mesele. Islendik iki sanyň kwadratlarynyň jeminiň olaryň ikeldilen köpeltmek hasylyndan kiçi däldigini subut etmeli.

Goý, a we b erkin sanlar bolsun. $a^2+b^2\geq 2ab$ bolýandygyny subut etmek talap edilýär. Deňsizligiň çep we sag bölekleriniň tapawudyny özgerdeliň:

$$a^2+b^2-2ab=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

$(a^2+b^2)-2ab$ tapawudy biz käbir aňlatmanyň kwadraty görnüşinde ýazdyk, a we b islendik bolanda $(a–b)^2\geq 0$ bolýandygy üçin, $a^2+b^2\geq 2ab$ deňsizlik hem a we b islendik bahasynda dogrudyr.

San deňsizlikleriň häsiýetlerini aňladýan teoremalara garalyň.

***1-nji teorema.* Eger $a>b$ bolsa, onda $b<a$; eger $a<b$ bolsa, onda $b>a$.**

Hakykatdan-da, eger $a–b$ tapawut položitel san bolsa, onda $b–a$ tapawut otrisatel sandyr we tersine.

***2-nji teorema.* Eger $a<b$ we $b<c$ bolsa, onda $a<c$.**

$a-c$ tapawudyň otrisatel sandygyny subut edeliň. Bu tapawuda b we $–b$-ni goşalyň we goşulyjylary toparlalyň: $a–c=a–c+b-b=$ $=(a-b)+(b-c)$.

Şerte görä $a<b$ we $b<c$. Şoňa görä-de, $a–b$ we $b–c$ goşulyjylar otrisatel sanlardyr. Diýmek, olaryň jemi hem otrisatel sandyr. Şeýlelikde, $a<c$.

Eger $a>b$ we $b>c$ bolsa, onda $a>c$ bolýandygy ýokardaka meňzeşlikde subut edilýär. Bu häsiýetleriň geometrik manysyny çyzgyda şekillendirmek bolar (*12-nji surat*).

12-nji surat

3-nji teorema. **Eger $a<b$ we c islendik san bolsa, onda $a+c<b+c$.**

$(a+c)–(b+c)$ tapawudy özgerdeliň: $(a+c)–(b+c)=a–b$.

Şerte görä $a<b$, şoňa görä-de, $a–b$ – otrisatel sandyr. Diýmek, $(a+c)–(b+c)$ tapawut hem otrisateldir. Şeýlelikde, $a+c<b+c$. Diýmek, eger dogry deňsizligiň iki bölegine-de şol bir san goşulsa, onda dogry deňsizlik alnar.

4-nji teorema. **Eger $a<b$ we c položitel san bolsa, onda $ac<bc$. Eger $a<b$ we c otrisatel san bolsa, onda $ac>bc$.**

$a<b$ bolýandygy sebäpli, $a–b$ otrisatel sandyr.

Eger $c>0$ bolsa, onda $c(a–b)$ köpeltmek hasyly otrisateldir, diýmek, $ac<bc$. Eger $c<0$ bolsa, onda $c(a–b)$ köpeltmek hasyly položiteldir, diýmek, $ac>bc$.

Bölmegi bölüjä ters bolan sana köpeltmek bilen çalşyrmak bolýandygy sebäpli, ýokardaky ýaly häsiýet bölmek üçin hem dogrudyr. Şeýlelikde, eger dogry deňsizligiň iki bölegi-de şol bir položitel sana köpeldilse ýa-da bölünse, onda dogry deňsizlik alnar.

Eger dogry deňsizligiň iki bölegi-de şol bir otrisatel sana köpeldilse ýa-da bölünse we deňsizligiň belgisi garşylykly belgä çalşyrylsa, onda dogry deňsizlik alnar.

Netije. **Eger a we b – položitel san we $a<b$ bolsa, onda $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.**

$a<b$ deňsizligiň iki bölegini-de ab položitel sana böleliň: $\frac{a}{ab}<\frac{b}{ab}$.

Droby gysgaldyp alarys: $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$, ýagny $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

Deňsizlikleriň garalyp geçilen häsiýetleriniň peýdalanylyşyna mysal getireliň.

Mysal.

Eger $54{,}2 < a < 54{,}3$ bolýandygy mälim bolsa, onda tarapy a bolan deňtaraply üçburçlugyň perimetrine baha bermeli.

Tarapy a bolan deňtaraply üçburçlugyň perimetri $P = 3a$ formula bilen hasaplanylýar. $54{,}2 < a$ we $a < 54{,}3$ deňsizlikleriň her biriniň iki bölegini-de 3-e köpeldeliň we netijäni ikigat deňsizlik görnüşinde ýazalyň:

$54{,}2 \cdot 3 < 3a < 54{,}3 \cdot 3$. $\qquad 162{,}6 < 3a < 162{,}9$.

Diýmek, berlen üçburçlugyň P perimetri 162,6 *mm*-den uludyr, emma 162,9 *mm*-den kiçidir.

Gönükme

Deňsizligi subut etmeli:

a) $\frac{c^2+1}{2} \geq c$; ç) $a^2 - 6a + 14 > 0$; e) $\frac{c}{c^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

b) $b^2 + 70 > 16b$; d) $a^2 - a \leq 50a^2 - 15a + 1$;

§2. San deňsizliklerini goşmak we köpeltmek

San deňsizliklerini agzama-agza goşmak we köpeltmek baradaky teoremalara garalyň.

***5-nji teorema.* Eger $a < b$ we $c < d$ bolsa, onda $a+c < b+d$.**

$a<b$ deňsizligiň iki bölegine-de c sany goşup, $a+c < b+c$ alarys. $c<d$ deňsizligiň iki bölegine-de b sany goşup, $b+c<b+d$ alarys. $a+c<b+c$ we $b+c < b+d$ deňsizliklerden $a+c < b+d$ gelip çykýar.

Ikiden köp deňsizlikler agzama-agza goşulanda hem teorema dogrudyr. Şeýlelik bilen, eger birmeňzeş belgili dogry deňsizlikler agzama-agza goşulsa, onda dogry deňsizlik alnar.

***6-njy teorema.* Eger $a < b$ we $c < d$ bolsa, bu ýerde a, b, c we d položitel sanlar, onda $ac < bd$.**

$a < b$ deňsizligiň iki bölegini-de c sana köpeldip, $ac<bc$ alarys. $c<d$ deňsizligiň iki bölegini-de b položitel sana köpeldip, $bc<bd$ alarys. $ac < bc$ we $bc < bd$ deňsizliklerden $ac < bd$ gelip çykýar. Ikiden köp deňsizlikler agzama-agza köpeldilende hem teorema dogrudyr. Şeýlelik bilen, eger çep we sag bölekleri položitel sanlar bolan birmeňzeş belgili dogry deňsizlikler agzama-agza köpeldilse, onda dogry deňsizlik alnar.

Eger $a<b$ we $c<d$ deňsizliklerdäki a, b, c we d sanlaryň arasynda otrisatelleri bar bolsa, onda $ac < bd$ deňsizlik nädogry deňsizlik bolýandygyny belläliň. Meselem, $-3 < -2$ we $-5 < +6$ dogry deňsizlikleri agzama-agza köpeldip, $15 < -12$ deňsizligi alarys, ol bolsa dogry deňsizlik däldir.

Netije. **Eger *a* we *b* sanlar položitel we $a < b$ bolsa, onda $a^n < b^n$ (*n* – natural san).** Subut edilen häsiýetler jeme, tapawuda, köpeltmek hasylyna we paýa baha bermek üçin peýdalanylýar.

Goý, $15 < x < 16$ we $2 < y < 3$ bolýandygy mälim bolsun. $x+y$ jeme, $x-y$ tapawuda, xy köpeltmek hasylyna we $\frac{x}{y}$ paýa baha bermeli.

1. $x+y$ jeme baha bereliň.

Deňsizlikleri agzama-agza goşmak baradaky teoremany $15 < x$ we $2 < y$ deňsizliklere, soňra $x < 16$ we $y < 3$ deňsizlikleri ulanyp, $17 < x+y$ we $x+y < 19$ alarys. Netijäni $17 < x+y < 19$ iki gat deňsizlik görnüşde ýazmak bolar. Gysgaça ýazylyşy:

$$\begin{array}{r} 15 < x < 16 \\ + \\ 2 < y < 3 \\ \hline 17 < x+y < 19. \end{array}$$

2. $x-y$ tapawuda baha bereliň.

Onuň üçin $x-y$ tapawudy $x+(-y)$ jem görnüşinde ýazalyň. Ilki $-y$ aňlatma baha bereliň. $2 < y < 3$ bolýandygy üçin, $-2 > -y > -3$, ýagny $-3 < -y < -2$. Indi deňsizlikleri agzama-agza goşmak baradaky teoremany ulansak:

$$\begin{array}{r}
15 < x < 16 \\
+ \\
-3 < -y < -2 \\
\hline
12 < x - y < 14.
\end{array}$$

3. *xy* köpeltmek hasylyna baha bermeli:

$$\begin{array}{r}
15 < x < 16 \\
\times \\
2 < y < 3 \\
\hline
30 < xy < 48.
\end{array}$$

4. $\frac{x}{y}$ paýa baha bermeli. Onuň üçin $\frac{x}{y}$ paýy $x \cdot \frac{1}{y}$ köpeltmek hasyly görnüşinde ýazalyň.

$$\begin{array}{r}
15 < x < 16 \\
\times \\
\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \\
\hline
5 < \frac{x}{y} < 8.
\end{array}$$

Ilki $\frac{1}{y}$ aňlatma baha bereliň, $2 < y < 3$ bolany üçin $\frac{1}{2} > \frac{1}{y} > \frac{1}{3}$, ýagny $\frac{1}{3} > \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$.

Gönükmeler

1. $6 < x < 7$ we $10 < y < 12$ bolýandygyny bilip, baha bermeli:

a) $x+y$; b) $x–y$; ç) xy; d) $\frac{y}{x}$.

2. $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ we $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ bolýandygyny bilip baha bermeli:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; b) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$; ç) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$; d) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$.

§3. San aralyklary

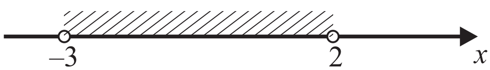
Koordinata göni çyzygynyň üstünde –3 we 2 koordinataly nokatlary belläliň (*13-nji surat*). Eger nokat olaryň arasynda ýerleşen bolsa, onda oňa –3-den uly we 2-den kiçi san degişlidir.

13-nji surat

Tersine hem dogrudyr: eger x san $-3<x<2$ şerti kanagatlandyrýan bolsa, onda ol –3 we 2 koordinataly nokatlaryň arasynda ýatan nokat bilen şekillendirilýär.

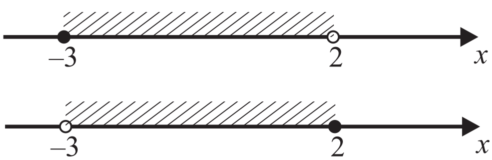
$-3<x<2$ şerti kanagatlandyrýan ähli sanlaryň köplügine san aralygy ýa-da ýöne –3-den 2-ä çenli aralyk diýýärler we şeýle belgilenýär: (–3;2); okalyşy:

„–3-den 2-ä çenli aralyk“. Ol aralyk çyzgy bilen şekillendirilýär (*14-nji surat*).



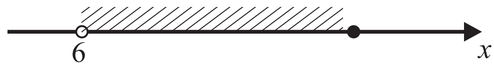
14-nji surat

$-3\le x<2$ we $-3<x\le 2$ ikigat deňsizlikleri ýerine ýetirýän sanlaryň köplügini [–3;2) we (–3;2] görnüşde belgilenýär we şeýle okalýar: „–3-i öz içine alyp, –3-den 2-ä çenli aralyk“; „2-ni öz içine alyp, –3-den 2-ä çenli aralyk“ (*15-nji surat*).



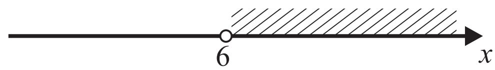
15-nji surat

Koordinata göni çyzygynyň üstünde 6 koordinataly nokady belläliň (*16-njy surat*). Eger x san 6-dan uly bolsa, onda ol şol nokatdan sagda ýatan nokat bilen şekillendirilýär.



16-njy surat

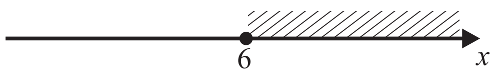
$x > 6$ şerti kanagatlandyrýan ähli x sanlaryň köplügi 6 koordinataly nokatdan sagda ýerleşen ýarym göni çyzyk bilen şekillendirilýär (*17-nji surat*).



17-nji surat

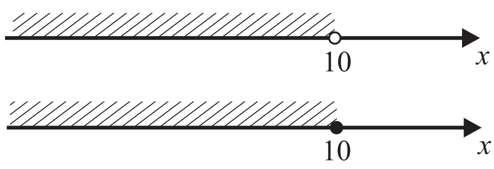
Ol köplügi 6-dan plýus tükeniksizlige çenli aralyk diýýärler we şeýle belgilenilýär: $(6; +\infty)$.

$x \geq 6$ deňsizligi kanagatlandyrýan sanlaryň köplügi 6 koordinataly nokady öz içine alyp, ýarym göni çyzyk bilen şekillendirilýär (*18-nji surat*).



18-nji surat

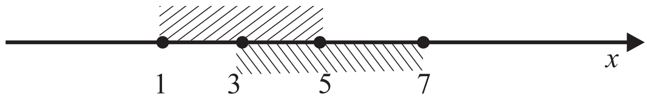
Ony şeýle belgileýärler: $[6; +\infty)$, okalyşy: „6-ny öz içine alyp, 6-dan $+\infty$-e çenli aralyk“. $x < 10$ we $x \leq 10$ deňsizlikleri şekillendireliň (*19-njy surat*).



19-njy surat

Bu köplükler degişlilikde $(-\infty;10)$ we $(-\infty;10]$ görnüşde bellenilýär, okalyşy: „minus tükeniksizlikden 10-a çenli aralyk“, „10-y öz içine alyp, minus tükeniksizlikden 10-a çenli aralyk“.

Hakyky sanlaryň köplügi tutuş koordinata göni çyzygy bilen şekillendirilýär. Ol şeýle belgilenýär: $(-\infty; +\infty)$.



20-nji surat

Çyzgyda [1;5] we [5;7] aralyklar şekillendirilen (*20-nji surat*). [3;5] aralyk olaryň umumy bölegidir. Käbir A we B köplükleriň umumy bölegini düzýän köplüge ol köplükleriň kesişmesi diýilýär we – $A \cap B$ ýaly bellenilýär. Onda:

$$[1;5] \cap [3;7] = [3;5].$$

$[0;4] \cap [8;10] = \varnothing$ (*21-nji surat*).

21-nji surat

Gönükme

San aralyklarynyň kesişmesini we birleşmesini tapmaly:

a) $(-3;+\infty)$ we $(4;+\infty)$;
b) $(-\infty;2)$ we $(0;+\infty)$;
ç) $(-\infty;6)$ we $(-\infty;9)$;
d) [1;5] we [0;8].

§4. Üýtgeýän bir ululykly deňsizlikleriň çözülişi

$5x-11 > 3$ deňsizlik üýtgeýän x ululygyň käbir bahalarynda dogry san deňsizligine öwrülýär, beýleki bahalarynda bolsa dogry san deňsizlige öwrülmeýär. Meselem: $x = 4$ bolanda $5x-11 > 3$ deňsizlik $5 \cdot 4 - 11 > 3$ dogry deňsizlige, $x = 2$ goýsak, onda dogry däl $5 \cdot 2 - 11 > 3$ deňsizlige öwrülýär. 4 san $5x - 11 > 3$ deňsizligiň çözüwi ýa-da şol deňsizligi kanagatlandyrýar diýilýär. Meselem: 100; 180; 1000 sanlaryň deňsizligiň çözüwleridigini barlamak kyn däldir. 2; 0,5; –5 sanlar şol deňsizligiň çözüwleri däldir.

Kesgitleme. Üýtgeýän bir ululykly deňsizligiň çözüwi diýip, ony dogry san deňsizligine öwürýän üýtgeýän ululygyň bahasyna aýdylýar.

Deňsizligi çözmek – onuň hemme çözüwini tapmak ýa-da olaryň ýokdugyny subut etmek diýmekdir.

Şol bir çözüwleri bolan deňsizliklere deňgüýçli deňsizlikler diýilýär. Çözüwleri ýok bolan deňsizlikler hem deňgüýçli deňsizlikler hasaplanýar.

Deňsizlikler çözülende aşakdaky häsiýetler peýdalanylýar:

1) Eger deňsizligiň bir böleginden goşulyjy garşylykly alamaty bilen beýleki bölegine geçirilse, onda oňa deňgüýçli bolan deňsizlik alnar.

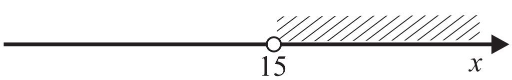
2) Eger deňsizligiň iki bölegi-de şol bir položitel sana köpeldilse ýa-da bölünse, onda oňa deňgüýçli bolan deňsizlik alnar.

Eger deňsizligiň alamaty garşylykly alamata öwrülip, onuň iki bölegi-de şol bir otrisatel sana köpeldilse ýa-da bölünse, onda oňa deňgüýçli bolan deňsizlik alnar. Meselem: $18+6x>0$ deňsizlik $6x>-18$ deňsizlige deňgüýçlüdir, $6x>-18$ deňsizlik bolsa $x>-3$ deňsizlige deňgüýçlüdir.

Deňsizlikleriň görkezilen häsiýetlerini san deňsizlikleriň häsiýetlerine daýanyp, subut etmek bolar. Deňsizlikleriň çözülişine mysallar getireliň.

1-nji mysal. $16x>13x+45$ deňsizligi çözmeli.

$16x-13x>45$, $3x>45$, $x>15$, $(15;+\infty)$ (*22-nji surat*).



22-nji surat

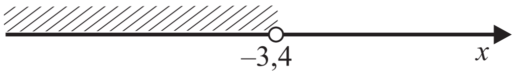
2-nji mysal. $15x-23(x+1)>2x+11$ deňsizligi çözmeli.

$15x-23x-23>2x+11$

$15x-23x-2x>11+23$

$-10x>34$

$x < -3{,}4$, $(-\infty; -3{,}4)$ (*23-nji surat*).



23-nji surat

3-nji mysal. $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} < 2$ deňsizligi çözmeli.

$\frac{x}{3} \cdot 6 - \frac{x}{2} \cdot 6 < 2 \cdot 6$, $2x - 3x < 12$, $-x < 12$, $-x > 12$, $(-12; +\infty)$.

Garalyp geçilen mysallaryň her birinde biz berlen deňsizligi $ax > b$, ýa-da $ax < b$ (bu ýerde a we b käbir sanlar) görnüşdäki deňgüýçli deňsizlik bilen çalyşdyk. Şeýle görnüşdäki deňsizliklere üýtgeýän bir ululykly çyzykly deňsizlikler diýilýär.

Getirilen mysallarda biz üýtgeýän ululygyň ýanyndaky koeffisiýenti nola deň bolmadyk çyzykly deňsizlikleri aldyk. Deňsizlikler çözülen mahalynda biziň $0 \cdot x > b$ ýa-da $0 \cdot x < b$ görnüşdäki çyzykly deňsizlige duş gelmegimiz mümkindir. Şeýle görnüşdäki deňsizligiň, diýmek, degişli başdaky deňsizligiň-de ýa çözüwleri ýokdur, ýa-da islendik san olaryň çözüwidir.

4-nji mysal. $2(x+8) - 5x < 4 - 3x$ deňsizligi çözmeli.

$2x + 16 - 5x < 4 - 3x$

$2x - 5x + 3x < 4 - 16$

$0 \cdot x < -12$

$0 < -12$ deňsizligiň dogry däldigi üçin deňsizligiň çözüwi ýokdur. Diýmek, oňa deňgüýçli bolan berlen deňsizligiň hem çözüwi ýokdur.

Gönükme

Deňsizligi çözmeli:

a) $4(2 - 3x) - (5 - x) > 11 - x$;

b) $2(3 - z) - 3(2 + z) \leq z$;

ç) $2{,}5(2 - z) - 1{,}5(y - 4) \leq 3 - y$;

d) $x - 2 \geq 4{,}7(x - ý2) - 2{,}7(x - 1)$;

e) $3{,}2(a - 6) - 1{,}2a \leq 3(a - 8)$.

§5. Üýtgeýän bir ululykly deňsizlikler ulgamynyň çözülişi

Mesele. Pyýada obadan 20 *km* uzaklykda ýerleşen demir ýol duralgasyna tarap çykyp ugrapdyr. Eger pyýada tizligini 1 *km/sag* artdyrsa, onda ol 4 sagatda 20 *km*-den köp uzaklygy geçer. Eger tizligini 1 *km/sag* azaltsa, onda ol 5 sagatda duralga ýetip hem bilmez. Pyýadanyň tizligi näçe?

Goý, pyýadanyň tizligi x *km/sag* bolsun. Eger pyýada $(x+1)$ *km/sag* tizlik bilen gitse, onda 4 sagatda ol $4(x+1)$ *km* geçer. Meseläniň şerti boýunça $4(x+1)>20$. Eger pyýada $(x–1)$ *km/sag* tizlik bilen gitse, onda 5 sagatda $5(x–1)$ *km* geçer. Meseläniň şerti boýunça $5(x–1)<20$ x-iň $4(x+1)>20$ deňsizlik, şeýle hem $5(x–1)<20$ deňsizlik dogry bolandaky bahasyny tapmak, ýagny ol deňsizlikleriň umumy çözüwini tapmak talap edilýär. Şeýle halatlarda deňsizlikler ulgamyny çözmek gerek diýip aýdylýar we $\begin{cases} 4(x+1) > 20 \\ 5(x-1) < 20 \end{cases}$ ýazgy peýdalanylýar.

Ulgamyň her bir deňsizligini oňa deňgüýçli bolan deňsizlik bilen çalşyryp $\begin{cases} x > 4, \\ x < 5 \end{cases}$ ulgamy alarys.

Diýmek, x-iň bahasy $4<x<5$ şerti kanagatlandyrmalydyr.

Jogaby: pyýadanyň tizligi 4 *km/sag*-dan uly, emma 5 *km/sag*-dan kiçidir.

Kesgitleme. Üýtgeýän bir ululykly deňsizlikler ulgamynyň çözüwi diýip, üýtgeýän ululygyň ulgamyň deňsizlikleriniň her biriniň dogry bolan mahalyndaky bahasyna aýdylýar.

Ulgamy çözmek – onuň ähli çözüwini tapmak ýa-da olaryň ýokdugyny subut etmek diýmekdir.

Deňsizlikler ulgamynyň çözülişiniň mysallaryna garalyň.

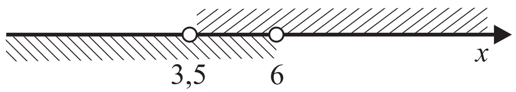
1-nji mysal. Deňsizlikler ulgamyny çözmeli: $\begin{cases} 2x - 1 > 6, \\ 5 - 3x > -13. \end{cases}$

Alarys: $\begin{cases} 2x > 7, \\ -3x > -18. \end{cases}$ Bu ýerden: $\begin{cases} x > 3,5, \\ x < 6. \end{cases}$

$x > 3{,}5$ we $x < 6$ deňsizlikleriň her birini kanagatlandyrýan x-iň bahalary ulgamyň çözüwleridir (*24-nji surat*).

$(3{,}5; +\infty) \cap (-\infty; 6) = (3{,}5; 6)$ ýa-da $3{,}5 < x < 6$.

Jogaby: (3,5; 6).

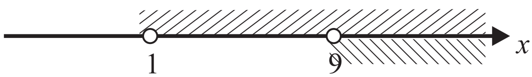


24-nji surat

2-nji mysal. Deňsizlikler ulgamyny çözmeli: $\begin{cases} 3x - 2 > 25, \\ 1 - x < 0. \end{cases}$

Alarys: $\begin{cases} 3x > 27, \\ -x < -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 9, \\ x > 1\ . \end{cases}$ $(9;+\infty)$, $(1;+\infty)$.

$(9; +\infty) \cap (1; +\infty) = (9; +\infty)$ (*25-nji surat*).

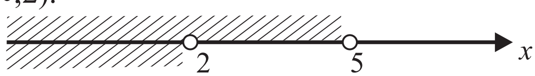


25-nji surat

3-nji mysal. Deňsizlikler ulgamyny çözmeli: $\begin{cases} 2 - x > 0, \\ 0,2x - 1 < 0. \end{cases}$

Alarys: $\begin{cases} -x > -2, \\ 0,2x < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2, \\ x < 5. \end{cases}$ $(-\infty;2)$, $(-\infty;5)$.

$(-\infty;2) \cap (-\infty;5) = (-\infty;2)$ (*26-njy surat*).
Jogaby: $(-\infty;2)$.



26-njy surat

4-nji mysal. Deňsizlikler ulgamyny çözmeli: $\begin{cases} 1 - 5x > 11, \\ 6x - 18 > 0. \end{cases}$

Alarys: $\begin{cases} -5x > 10, \\ 6x > 18; \end{cases}$ $\begin{cases} x < -2, \\ x > 3. \end{cases}$ $(-\infty; -2), (3; +\infty)$.

$(-\infty;-2)\cap(3; +\infty)=\varnothing$ (*27-nji surat*).
Jogaby: çözüwi ýok.

27-nji surat

5-nji mysal. Ikigat deňsizligi çözmeli: $-1 < 3 + 2x < 3$.

Ikigat deňsizlik deňsizlikler ulgamynyň başgaça ýazgysydyr:

$$\begin{cases} 3 + 2x > -1, \\ 3 + 2x < 3. \end{cases}$$

Ony çözüp, $-2<x<0$ bolanda iki deňsizligiň hem dogrudygyny taparys.

Şu mysalda ýazgyny aşakdaky ýaly alyp barmak amatlydyr:
$-1<3+2x<3$, $-4<2x<0$, $-2<x<0$.

Gönükmeler

Deňsizlikler ulgamyny çözmeli.

1. $\begin{cases} 2 - \dfrac{5 + x}{7} < 1 - \dfrac{9 - x}{14}, \\ 12 - \dfrac{1}{3}(47 - \dfrac{60}{x}) < 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{2} < \dfrac{x - 3}{3} < 2, \\ \dfrac{13x - 1}{2} > 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{5a + 8}{3} - a < 2a, \\ 1 - \dfrac{6 - 15a}{4} \geq a. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2p - \dfrac{p - 2}{5} > 4, \\ \dfrac{p}{2} - \dfrac{p}{8} \leq 6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{5a+8}{3} - a < 2a, \\ 1 - \dfrac{6-15a}{4} \geq a. \end{cases}$

Jogaplary: **1.** $(4\frac{1}{3};\infty)$; **2.** $(2{,}7;6)$; **3.** $(\frac{1}{13};9)$; **4.** $(2;16)$; **5.** $\left[\frac{2}{11};2\right]$.

§6. Aralyklar (interwallar) usulyny ulanyp deňsizlikleri çözmek

Kwadrat deňsizlikleri kwadrat funksiýanyň grafiklerine salgylanmazdan hem çözmek mümkindir.

Mysal üçin, $-3x^2+5x+2<0$ deňsizligi çözmeli bolsun, $y=-3x^2+5x+2$ kwadrat funksiýa seredeliň. Bu funksiýanyň $x=-\frac{1}{3}$ we $x_2=2$ iki sany noly bar bolany sebäpli ony $y=-3(x+\frac{1}{3})(x-2)$ ýaly ýazyp bolar. x_1 we x_2 sanlar bu funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny üç bölege, ýagny $(-\infty;-\frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{3};\ 2)$ we $(2;\ +\infty)$ aralyklara bölýär. Bu aralyklaryň her birinde seredilýän funksiýanyň alamatynyň üýtgemejekdigi äşgärdir. $(x+\frac{1}{3})$ we $(x-2)$ köpeldijileriň şol aralyklardaky alamatlaryna baglylykda funksiýanyň bu aralyklarda alýan alamatlaryny görkezýän tablisa düzeliň.

	$\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{3};2\right)$	$(2;+\infty)$
$x+\frac{1}{3}$	–	+	+
$x-2$	–	–	+
$y=-3(x+\frac{1}{3})(x-2)$	–	+	–

Bu tablisanyň soňky setirinden $y=-3x^2+5x+2$ funksiýanyň $(-\infty; -\frac{1}{3})$ we $(2; +\infty)$ aralykda otrisatel, $(-\frac{1}{3};2)$ aralykda bolsa položitel bahalara eýe bolýandygy görünýär. Diýmek, $-3x^2+5x+2<0$ deňsizligiň çözüwlerini $(-\infty; -\frac{1}{3})$ we $(2; +\infty)$ aralyklaryň birikmesi görnüşinde ýazyp bolar:

$$x\in(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (2;+\infty).$$

Deňsizligi çözmegiň ýokarda beýan edilen usulyna **aralyklar usuly** diýilýär. Aralyklar usuly bilen has çylşyrymly deňsizlikleri hem çözüp bolar. Mysal hökmünde deňsizligiň çep bölegi çyzykly ikagzalaryň, kwadrat üçagzalaryň köpeltmek hasyly hem-de gatnaşyklary görnüşinde berlen hala garamak bolar:

$$(x+3)(2x^2-3)<0;$$
$$(x-5)(x+1)(x+2)>0;$$
$$\frac{(x-1)(x^2-2x+5)}{3x-1}<0 \text{ we ş.m.}$$

Bu deňsizlikler rasional deňsizliklerdir. Aralyklar usuly ulanylanda aşakdaky tassyklamalardan ugur alynmalydyr.

1) $(x\pm x_1)$ ikagzalar $(-\infty; x_1)$ we $(x_1; +\infty)$ aralyklaryň her birinde öz alamatlaryny üýtgewsiz saklaýarlar.

2) ax^2+bx+c kwadrat üçagzanyň iki sany nollary bar bolanda, ony:

$a(x-x_1)(x-x_2)$ görnüşde ýazyp bolýandygy sebäpli $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$ we $(x_2; +\infty)$ aralyklaryň her birinde bu üçagza öz alamatyny üýtgewsiz saklaýar.

3) ax^2+bx+c kwadrat üçagzanyň ýeke-täk noly bar bolanda, ony $a(x-x_1)^2$ görnüşde ýazyp bolýandygy sebäpli $(-\infty; x_1)$ we $(x_1; +\infty)$ aralyklaryň her birinde bu üçagza öz alamatyny üýtgewsiz saklaýar.

4) ax^2+bx+c kwadrat üçagzanyň nollary ýok bolsa, onda tutuş $(-\infty;+\infty)$ aralykda bu üçagza öz alamatyny üýtgewsiz saklaýar.

Indi aralyklar usuly bilen rasional deňsizlikleriň çözülişiniň mysallaryna garalyň:

1-nji mysal. $(x+5)(x+1)(x-2) < 0$ deňsizligi çözmeli.

$y = (x+5)(x+1)(x-2)$ funksiýa seredeliň. Onuň kesgitleniş ýaýlasy $(-\infty;+\infty)$ san aralygydyr. $(x+5)$, $(x+1)$ we $(x-2)$ köpeldijileriň nollary bolan $x_1 = -5$, $x_2 = -1$ we $x_3 = 2$ sanlar funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny dört bölege, ýagny $(-\infty; -5)$, $(-5; -1)$, $(-1; 2)$ we $(2; +\infty)$ aralyklara bölýär. Bu aralyklaryň her birinde seredilýän funksiýanyň alamatynyň üýtgemejekdigi äşgärdir. $(x+5)$, $(x+1)$ we $(x-2)$ köpeldijileriň şol aralyklardaky alamatlaryna baglylykda funksiýanyň bu aralyklarda alýan alamatlaryny görkezýän tablisa düzeliň.

	$(-\infty; -5)$	$(-5; -1)$	$(-1; 2)$	$(2; +\infty)$
$(x+5)$	–	+	+	+
$(x+1)$	–	–	+	+
$(x-2)$	–	–	–	+
$y=(x+5)(x+1)(x-2)$	–	+	–	+

Bu tablisanyň soňky setirinden $y = (x+5)(x+1)(x-2)$ funksiýanyň $(-\infty; -5)$ we $(-1; 2)$ aralyklarda otrisatel, $(-5; -1)$ we $(2; +\infty)$ aralyklarda bolsa položitel bahalara eýe bolýandygyny görýäris. Diýmek, $(x+5)(x+1)(x-2) < 0$ deňsizligiň çözüwleri $(-\infty; -5)$ we $(-1; 2)$ aralyklaryň birikmesi görnüşinde ýazyp bolar: $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; 2)$.

2-nji mysal. $(x^2+4x+4)(3x+2)(1-x) < 0$ deňsizligi çözmeli.

(x^2+4x+4) kwadrat üçagzanyň $x_1 = -2$ noly bar bolany sebäpli berlen deňsizligi: $(x+2)^2(3x+2)(1-x) < 0$ görnüşde ýazyp bolar.

Indi $y = (x+2)^2(3x+2)(1-x)$ funksiýa seredeliň.

	$(-\infty;-2)$	$(-2; -\frac{2}{3})$	$\left(-\frac{2}{3}; 1\right)$	$(1;+\infty)$
$(x+2)^2$	+	+	+	+
$(3x+2)$	–	–	+	+
$(1-x)$	+	+	+	–
$y=(x+2)^2(3x+2)(1-x)$	–	–	+	–

Onuň kesgitleniş ýaýlasy (–∞; +∞) aralykdyr. $(x+2)^2$, $(3x+2)$ we $(1-x)$ köpeldijileriň nollary bolan $x_1=-2$, $x_2=-\frac{2}{3}$ hem-de $x_3=1$ sanlar funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny $(-\infty; -2)$, $(-2; -\frac{2}{3})$, $(-\frac{2}{3}; 1)$ we $(1; +\infty)$ aralyklara bölýär. Bu aralyklaryň her birinde seredilýän funksiýanyň alamaty üýtgemeýär. Argumentiň bahalary şol aralyklaryň birinden beýlekisine geçende, funksiýanyň alamatynyň üýtgeýşini görmek üçin aşakdaky tablisany düzeliň.

Bu tablisanyň soňky setirinden $(x+2)^2(3x+2)(1-x)<0$ deňsizligiň çözüwleriniň

$x\in(-\infty;-2)\cup(-2;-\frac{2}{3})\cup(1;+\infty)$ bolýandygyny görmek bolýar.

3-nji mysal. $\frac{(2-x)(x^2+1)}{x+4}>0$ deňsizligi çözmeli.

x^2+1 kwadrat üçagzanyň nollary ýokdur, $(2-x)$ we $(x+4)$ ikagzalaryň nollary bolsa, $x_1=-4$ we $x_2=2$ sanlardyr.

$y=\frac{(2-x)(x^2+1)}{x+4}$ funksiýa seredeliň. Bu funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy $(-\infty; -4)\cup(-4; +\infty)$ bolar, sebäbi $x_1=-4$ san onuň kesgitleniş ýaýlasyna degişli däldir. $x_1=-4$ we $x_2=2$ sanlar funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny $(-\infty; -4)$; $(-4; 2)$ we $(2; +\infty)$ aralyklara bölýär. Argumentiň bahalary bu aralyklaryň birinden beýlekisine geçende, funksiýanyň alamatynyň üýtgeýşini görmek üçin aşakdaky tablisany düzeliň.

	$(-\infty; -4)$	$(-4; 2)$	$(2; +\infty)$
$2-x$	+	+	–
x^2+1	+	+	+
$x+4$	–	+	+
$y=\frac{(2-x)(x^2+1)}{x+4}$	–	+	–

Bu tablisanyň soňky setirinden $\frac{(2-x)(x^2+1)}{x+4}$ deňsizligiň çözüwleriniň $x \in (-4;\ 2)$ bolýandygyny görünýär.

Gönükmeler

Aralyklar usulyndan peýdalanyp deňsizligi çözmeli.

1. $(x+1)(x+3)>0$.

2. $x^2-x-2<0$.

3. $(2x-4)(3x+6)(x-7)>0$.

4. $\frac{(x-2)(x+3)}{x+7} \geq 0$.

5. $\frac{(x-2)(x+2)(x-3)}{(x-3)(x+4)(x-8)} \geq 0$.

§7. Näbellisi modul belgisiniň içinde bolan deňlemeler

a sanyň moduly şeýle tapylýar: $|a| = \begin{cases} a \geq 0, \text{ bolsa } a; \\ a < 0, \text{ bolsa } -a. \end{cases}$

1-nji mysal. Deňlemäni çözmeli:

$|3x-5|=2$.

Çözülişi.

Eger $|a|=2$ bolsa, onda $a=2$ ýa-da $-a=2$.

Bu berlen deňlemäniň aşakdaky deňlemelere deňgüýçlüdigini aňladýar:

$3x-5=2$ we $-(3x-5)=2$.

$3x-5=2$ deňlemeden $x_1=\frac{7}{3}$ tapýarys.

$-(3x-5)=2$ deňlemeden $x_2=1$ tapýarys.

Jogaby: $x_2=1,\ x_1=\frac{7}{3}$.

2-nji mysal. Deňlemäni çözmeli:

$|2x-8|=3x+1.$

Çözülişi.

$2x-8>0$ bolsa, onda $|2x-8|=2x-8$ bolar we berlen deňleme $2x-8=3x+1$ görnüşe geler.

Muny aşakdaky görnüşde ýazmak bolar: $\begin{cases} 2x-8 \geq 0, \\ 2x-8=3x+1. \end{cases}$

$2x-8=3x+1$ deňlemäni çözüp $x=-9$ alýarys. x-iň bu bahasynda $2x-8\geq 0$ deňsizlik ýerine ýetmeýär. Diýmek, x-iň tapylan bahasy deňlemäniň köki bolup bilmeýär. Eger $2x-8<0$ bolsa, onda $|2x+8|=-(2x-8)$ bolar we berlen deňleme $8-2x=3x+1$ görnüşe geler.

Muny şeýle ýazmak bolar: $\begin{cases} 2x-8<0, \\ 8-2x=3x+1. \end{cases}$

$8-2x=3x+1$ deňlemeden $x=\frac{7}{5}$ tapýarys.

$\frac{7}{5}-8<0$ deňsizlik dogry. Diýmek, $x=\frac{7}{5}$ berlen deňlemäniň köki bolýar.

Jogaby: $x=\frac{7}{5}$.

Gönükmeler

Deňlemäni çözmeli.

1. $|3x-4|=\frac{1}{2}$.

2. $|x-2|=3$.

3. $|2x-3|=1$.

4. $|2x-x^2-3|=1$.

5. $|x^2-3x+3|=2$.

§8. Näbellisi modul belgisiniň içinde bolan deňsizlikler we olaryň çözülişi

Näbellisi modul içinde bolan deňsizlikleri çözmek üçin modulyň kesgitlemesi ulanylýar; $|f(x)|=\begin{cases} \text{eger } f(x) \geq 0 \text{ bolsa, onda } f(x), \\ \text{eger } f(x) < 0 \text{ bolsa, onda } -f(x). \end{cases}$

Käbir ýagdaýlarda hakyky sanyň modulynyň geometrik manysyndan peýdalanmak amatlydyr. $|a|$ belgili koordinata göni çyzygynda hasap başlangyjy bolan O nokatdan a nokada çenli aralygy aňladýar. $|a–b|$ koordinata göni çyzygynda a we b nokatlaryň arasyndaky uzaklygy aňladýar.

Deňsizlik çözülende aşakdaky teorema esaslanyp deňsizligiň iki bölegini hem kwadrata götermek usulyndan peýdalanmak bolýar.

Teorema. **Eger $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalar x-ň islendik bahalarynda diňe položitel bahalary kabul edýän bolsa, onda $f(x)>g(x)$ we $(f(x))^2>(g(x))^2$ deňsizlikler deňgüýçlüdir.**

Bu teorema modully deňsizlikleri çözmekde ulanylýar.

Goý, $|f(x)|>|g(x)|$ deňsizligi çözmeli bolsun.

$f(x)$ we $g(x)$-iň kesgitleniş ýaýlasynda x-iň islendik bahasynda $|f(x)|\geq 0$, $|g(x)|\geq 0$, $f(x)^2=(f(x))^2$ we $g(x)^2=(g(x))^2$ gatnaşyklar dogry bolany üçin berlen deňsizlik

$(f(x))^2>(g(x))^2$ deňsizlige deňgüýçlüdir.

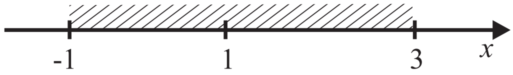
1-nji mysal.

$|x–1|<2$ deňsizligi çözmeli.

Çözülişi.

1-nji usul. $|x–1|$-e koordinata göni çyzygyndaky x we 1 nokatlaryň arasyndaky uzaklyk hökmünde seretmek bolar (*28-nji surat*).

Diýmek, bize koordinata göni çyzygyndan 1 nokatdan 2 birlikden az daşlaşan x-iň ähli nokatlaryny görkezmek gerek.



28-nji surat

Koordinata göni çyzygynyň üsti bilen deňsizligiň çözüwler köplüginiň (–1;3) interwaldygyny görmek bolýar.

2-nji usul. Deňsizligiň iki bölegini hem kwadrata göterip, oňa deňgüýçli bolan $(x–1)^2 < 4$ deňsizligi alarys.

$x^2–2x–3 < 0$ deňsizligi çözüp, $–1 < x < 3$ bölegini alarys.

3-nji usul. Sanyň modulynyň kesgitlemesine görä:

$$|x–1|= \begin{cases} \text{eger } x-1 \geq 0 \text{ bolsa}, x-1, \\ \text{eger } x-1 < 0 \text{ bolsa}, -(x-1). \end{cases}$$

Şonuň üçin berlen deňsizligi

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-1 < 2; \end{cases} \begin{cases} x-1 < 0, \\ -(x-1) < 2. \end{cases}$$

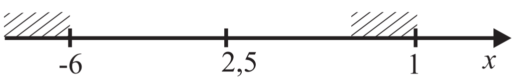
deňsizlikler ulgamy bilen çalşyrmak bolar. Birinji ulgamdan $1 \leq x < 3$, ikinji ulgamdan $–1 < x < 1$. Bu çözüwleri birikdirip alarys: (–1,3).

2-nji mysal.

$|2x+5| \geq 7$ deňsizligi çözmeli.

Çözülişi.

Berlen deňsizlikden: $|x+2,5| \geq 3,5$. Bize koordinata göni çyzygyndan –2,5 nokatdan 3,5 birlikden uly ýa-da şoňa deň aralykdaky x-iň ähli nokatlaryny görkezmek gerek (*29-njy surat*).



29-njy surat

Koordinata göni çyzygyň kömegi bilen $x \leq –6$; $x \geq 1$ çözüwi tapýarys.

3-nji mysal.

$|2x – 1| \leq |3x + 1|$ deňsizligi çözmeli.

Çözülişi.

Deňsizligiň iki bölegini hem kwadrata göterip, oňa deňgüýçli bolan $(2x – 1)^2 \leq (3x + 1)^2$deňsizligi alarys. Soňky deňsizligi özgerdip $(5x^2 + 10x) \geq 0$ alarys.

Deňsizligi çözüp, alarys: $(–\infty;0) \cup (2;+ \infty)$.

4-nji mysal.

$|2x+4| \leq 3x+2$ deňsizligi çözmeli.

Çözülişi.

Eger $(2x+4) \geq 0$ bolsa, onda deňsizlik $2x+4 \leq 3x+2$ görnüşe eýe bolar. $2x+4 < 0$ bolsa, onda $|2x+4| = -(2x+4)$ bolar we deňsizlik $-(2x+4) \leq (3x+2)$ görnüşe geler. Şeýdip berlen deňsizligi iki sany deňsizlikler ulgamy bilen çalşyrmak bolar.

$$\begin{cases} 2x + 4 \geq 0, \\ 2x + 4 \leq 3x + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 4 < 0, \\ -(2x + 4) \leq 3x + 2. \end{cases}$$

Birinji ulgamdan $x \geq 2$ tapýarys. Ikinji ulgamyň çözüwi ýok. Diýmek deňsizligiň çözüwler köplügi $[2;+\infty)$ şöhle bolar.

Näbellisi modul belgisi içinde bolan deňsizlikleri çözmegiň aşakdaky usulyna seredeliň.

Goý, bir näbellili iki deňsizlik berilsin:

$$f(x) > 0, \tag{1}$$

$$g(x) > 0. \tag{2}$$

(1) deňsizligiň çözüwler köplügini A, (2) deňsizligiň çözüwler köplügini B bilen belläliň.

Eger bir wagtda (1) we (2) deňsizlikleri kanagatlandyrýan sanlaryň köplügini tapmaly bolsa, onda A we B köplükleriň kesişmesini tapmaly diýilýär: $C = A \cap B$.

(1) we (2) deňsizlikler figuraly ýaý bilen birleşdirilýär:

$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ we oňa deňsizlikler ulgamy diýilýär.

Eger (1) ýa-da (2) deňsizlikleriň çözüwler köplügini tapmaly bolsa, onda A we B köplükleriň birleşmesini tapmaly: $D = A \cap B$.

(1) we (2) deňsizlikler kwadrat ýaý bilen aşakdaky ýaly ýazylýar we oňa deňsizlikleriň toplumy diýilýär:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{array}\right.$$

Diýmek, haçan-da kesişme gözlenýän bolsa, onda oňa „ulgam” diýilýär. Haçan-da birleşme gözlenýän bolsa – „toplum” diýilýär.

Bu düşünjeleri tablisada aýdyň şekillendirmek bolar.

Ulgam	Toplum
Kesişme	Birleşme
Deňsizlikler „we” sözi bilen baglanyşdyrylan	Deňsizlikler „ýa-da” sözi bilen baglanyşdyrylan

Mysal işlenende, köplenç, ulgam we toplum düşünjeleriniň kombinasiýasy ulanylýar, şeýle ýagdaýda ýalňyşlyklar bolmazlygy üçin ýokarda girizen bellemelerimizden örän ünsli peýdalanmaly.

Näbellisi modul belgisi içinde bolan deňsizlikleri adaty usulda çözmek üçin modulyň kesgitlemesinden peýdalanylýar. Ol düzgün aşakdakydan durýar:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{eger } x \geq 0 \text{ bolsa}, \\ -x, \text{eger } x < 0 \text{ bolsa}. \end{cases}$$

Modulyň kesgitlemesine görä, üýtgeýän ululygyň alyp bilýän bahalarynyň köplügi kesişmeýän bölek köplüklere bölünýär, bu bölek köplükleriň her birinde modul belgisi içinde bolan funksiýa öz alamatyny saklaýar.

Modulyň kesgitlemesi ulanylandan soň, berlen deňsizligiň çözülişi deňsizlikleriň toplumynyň çözülişine getirilýär. Aýdanlarymyza mysal getireliň.

Deňsizligi çözmeli: $|x-1|+|x-2|>3+x$.

San okuny kesişmeýän aralyklara böleliň:

$(-\infty;\ 1)$, $[1;\ 2)$, we $[2;\ +\infty)$. Bu aralyklaryň her birinde x–1 we x–2 aňlatmalar alamatyny saklaýarlar. Moduly açmak bilen aşakdaky deňsizlikleriň toplumyny alarys:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 1, \\ -(x-1)-(x-2) > 3+x, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ (x-1)-(x-2) > 3+x, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 2, \\ (x-1)+(x-2) > 3+x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ýokarky ulgamyň çözüwi $(-\infty;1)\cap(-\infty;0)=(-\infty;0)$ aralyk bolar, ortaky ulgamyň çözüwi ýok, aşakdaky ulgamyň çözüwi $[2;+\infty)\cap(6;+\infty)=(6;\infty)$ aralyk bolar.

Tapylan aralyklary birleşdirip deňsizlikler toplumynyň çözüwini alarys: $(-\infty;0)\cup(6;\infty)$.

Jogaby: $(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$.

Deňsizligi şeýle usulda çözmek köp sany aralyklara seretmek arkaly amala aşyrylýar. Mundan başga-da $||3^x+4x-9|-8|$ görnüşli modullary açmak kynçylyklaryny döredýär.

Näbellisi modul belgisi içinde bolan deňsizlikleri aşakdaky ýönekeý teoremadan peýdalanyp çözmek amatlydyr:

Teorema:

1) $|f(x)|\le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\le g(x), \\ f(x)\ge -g(x). \end{cases}$

2) $|f(x)|\ge g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge g(x), \\ f(x)\le -g(x). \end{cases}$

Bu teorema moduly açmak bilen ýeňil subut edilýär.

Goý, x_0 mysal üçin, $|f(x)|\le g(x)$, deňsizligiň çözüwi bolsun, ýagny

$$|f(x_0)|\le g(x_0). \quad (3)$$

Onda $g(x_0)\ge 0$. Eger $f(x_0)\ge 0$ bolsa, onda $|f(x_0)|=f(x_0)$ we (3) deňsizlik aşakdaky görnüşe eýe bolar:

$$f(x_0)\le g(x_0) \quad (4)$$

Ýöne $f(x_0)\ge 0$ we $g(x_0)\ge 0$ bolany üçin,

$$f(x_0)\ge -g(x_0) \quad (5)$$ bolar.

Bu bolsa (4) we (5) deňsizliklerden x_0-yň

$$\begin{cases} f(x)\le g(x), \\ f(x)\ge -g(x) \end{cases}$$

ulgamyň çözüwidigi gelip çykýar. Eger $f(x_0)\le 0$ bolsa, onda $|f(x_0)|=-f(x_0)$ we (3) deňsizlik $-f(x_0)\le g(x_0)$ görnüşe eýe bolýar, bu bolsa (5) deňsizlige deňgüýçlüdigini görkezýär. (4) deňsizlik bu ýagdaýda $f(x_0) \leq 0,\ g(x_0) \geq 0$ şertlerden gelip çykýar.

Teoremanyň 2-nji bölegini özbaşdak subut ediň. Ýokardaky teorema „≤” berk däl deňsizlik „<” berk deňsizlige çalşyrylanda hem dogrudyr.

Teoremadan peýdalanyp mysallar çözeliň.

1. Deňsizligi çözmeli:

$$2|x+1| \geq x+4.$$

Çözülişi:

$$2|x+1| \geq x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 \geq x+4, \\ 2x+2 \leq -x-4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq -2. \end{cases}$$

Jogaby: $[2;\infty) \cup (-\infty;-2]$.

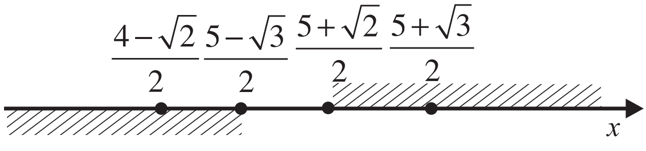
2. Deňsizligi çözmeli:

$$|x-2| \leq 2x^2-9x+9.$$

Çözülişi:

$$|x-2| \leq 2x^2-9x+9 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \leq 2x^2-9x+9, \\ x-2 \geq -2x^2+9x-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-10x+11 \geq 0, \\ 2x^2-8x+7 \geq 0. \end{cases}$$

Çözüwler köplügini dürli reňkler bilen ştrihläp alarys (*30-njy surat*).



30-njy surat

3. Deňsizligi çözmeli:

$$|x-1|+|-2|>3+x.$$

Çözülişi. Teoremany iki gezek ulanalyň:

$$|x-1|+|x-2|>3+x \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>3+x-|x-2|, \\ x-1<-3-x-|x-2|, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-2|>4, \\ |x-2|>2x+2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x-2>4, \\ x-2<-4, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x-2>2x+2, \\ x-2<-2x-2, \end{array}\right. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x-2>4, \\ x-2<-4, \\ x-2>2x+2, \\ x-2<-2x-2. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x>6, \\ x<-2, \\ x<-4, \\ x<0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>6, \\ x<0. \end{array}\right.$$

Jogaby:$(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$.

Häzire çenli çözen mysallarymyzy moduly açmak arkaly çözmek hem kyn däldir. Indiki çözjek mysalymyzy bolsa şol usul bilen çözmek kyn bolýar, ony ýokardaky teoremadan peýdalanyp çözmek amatlydyr.

4. Deňsizligi çözmeli:

$$|3^x+4x-9|-8|\leq 3^x-4x-1.$$

Çözülişi. Teoremany iki gezek ulanmak arkaly alarys:

$$|3^x+4x-9|-8|\leq 3^x-4x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |3^x+4x-9|\leq 3^x-4x+7, \\ |3^x+4x-9|\geq -3^x-4x+9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3^x+4x-9\leq 3^x-4x+7, \\ 3^x+4x-9\geq -3^x-4x+7, \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x+4x-9\geq -3^x+4x+9, \\ 3^x+4x-9\leq 3^x-4x+9, \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x\leq 2, \\ 3^x\geq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x\geq 9, \\ x\leq 0, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\leq 2, \\ x\geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 2, \\ x\leq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Şeýlelikde, ulgamyň çözüwi aşakdaky köplük bolar:

$$[0;2]\cap((-\infty;0]\cup[2;+\infty)) = \{0;2\}.$$

Jogaby: $\{0;2\}$.

Gönükmeler

1. Deňsizligi çözmeli:

a) $|34+21x+x^2|<-1$;
d) $|4-3x|\leq\frac{1}{2}$;
b) $|2x-3|>1$;
e) $|2x-1|<|x+3|$.
ç) $|3-x|+|2x+4|-|x+1|=2x+4$;

2. Deňsizligi çözmeli:

a) $|2x-x^2-3|>1$;
d) $|x^2+4x+3|>x+3$;
b) $|x^2-3x+3|\leq 2$;
e) $|x^2-6x+8|\leq 4-x$.
ç) $|x^2+x-2|>\left|1+\frac{x}{5}\right|$;

III bap

Rasional görkezijili derejeler

§1. Kök barada düşünje

Taraplary a *sm* bolan kwadratyň meýdany a^2 bilen hasaplanýar:

$$S=a^2.$$

Mysal üçin, $a=2, 3, 4$ bolanda degişlilikde, $S_1=2^2=4$, $S_2=3^2=9$, $S_3=4^2=16$.

Eger kwadratyň tarapyny 2 esse artdyrsak, meýdany 4 esse artar. Eger kwadratyň tarapyny 3 esse artdyrsak, onda onuň meýdany 9 esse artar.

Tarapy a *sm* bolan kubuň göwrümi $V=a^3$ formula bilen hasaplanýar: $a=2,3,4$ *sm* bolanda kubuň göwrümini tapmaly. $V_1=2^3=8$ (sm^3), $V_2=3^3=27$ (sm^3), $V_3=4^3=64$ (sm^3) bolar.

Mesele: Kubuň tarapyny 2 esse artdyrsak, onuň göwrümi näçe esse artar?

Meseläni çözmek üçin başdaky kubuň göwrümini $V_1 = a^3$ diýip alsak, onda tarapy $2a$ bolan kubuň göwrümi $V_2 = (2a)^3 = 8a^3 = 8V_1$ bolar, bu ýerde V_1 – başdaky kubuň göwrümi, V_2 – tarapyny 2 esse artdyryp alnan kubuň göwrümidir. Alnan düşünjeler boýunça şeýle görnüşdäki tablisany düzmek bolar:

Kw.tarapy	**Meýdany**	**Gatnaşygy**
a	a^2	1
$2a$	$4a^2$	4
$3a$	$9a^2$	9
$n\ a$	$n^2\ a^2$	n^2

Tarapy	**Kubuň göwrümi**	**Gatnaşygy**
a	a^3	1
$2a$	$8a^3$	8
$3a$	$27a^3$	27
$n\ a$	$n^3\ a^3$	n^3

Derejä götermek amalyna ters amala kök almak diýilýär.

$a^3 = 27;\ a = \sqrt[3]{27} = 3;$

$y^5 = -32;\ y = \sqrt[5]{-32} = -2.$

Kesgitleme. a sandan alnan n-nji derejeli kök diýlip, n-nji derejesi a sana deň bolan sana aýdylýar.

$\sqrt[n]{a} = x;\ x^n = a.$

Položitel sandan alnan jübüt derejeli köküň hakyky sanlar bolan iki garşylykly bahasy bardyr.

$\sqrt{49} = \pm 7$, sebäbi $(\pm 7)^2 = 49;$

$\sqrt[4]{81} = \pm 3$, sebäbi $(\pm 3)^4 = 81.$

Täk derejeli köküň alamaty kök aşagyndaky sanyň alamatyna deňdir.

$\sqrt[3]{64} = 4$, sebäbi $4^3 = 64;$

$\sqrt[5]{-32} = -2$, sebäbi $(-2)^5 = -32.$

Otrisatel sandan alnan jübüt derejeli kök hakyky san bolup bilmez.

$\sqrt{-9} \neq \pm 3$, sebäbi $(\pm 3)^2 \neq -9$.

Şeýle köklere hyýaly sanlar diýilýär.

Kesgitleme. Otrisatel däl sandan alnan jübüt derejeli köküň otrisatel däl bahasyna arifmetik kök diýilýär.

Meselem, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt[4]{81}=3$.

Geljekde diňe arifmetik köke seretjekdiris.

Gönükmeler

1. Aňlatmanyň manysy barmy:

a) $\sqrt[3]{-19}$; ç) $\sqrt[7]{-0,28}$; e) $\sqrt[4]{-5}$;

b) $\sqrt[5]{(-3)^3}$; d) $\sqrt[8]{(-2)^3}$; ä) $\sqrt[10]{(-7)^2}$?

2. Aňlatmanyň bahasyny tapyň:

a) $\sqrt[5]{-32}$; ç) $\sqrt[5]{-1}$; e) $\sqrt[5]{32}+\sqrt[8]{-8}$;

b) $-4\sqrt[8]{27}$; d) $-2\sqrt[4]{81}$; ä) $\sqrt[4]{625}-\sqrt[8]{-125}$.

§2. *n*-nji derejeli arifmetik köküň häsiýetleri

1-nji teorema. **Otrisatel däl köpeldijileriň köpeltmek hasylyndan *n*-nji derejeli kök şol köpeldijilerden alnan *n*-nji derejeli kökleriň köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny $a \geq 0$, $b \geq 0$ bolsa, onda**

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \tag{1}$$

deňlik dogrudyr.

Subudy.

Goý, $a \geq 0$**,** $b \geq 0$ bolsun, onda $\sqrt[n]{ab}$ we $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ aňlatmalaryň manysy bardyr. Indi $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$ we $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab.$ şertleriniň ýerine ýetýändigini görkezeliň. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ aňlatmanyň bahasy otrisatel däldir, sebäbi arifmetik köküň kesgitlemesine görä $\sqrt[n]{a} \geq 0$ we $\sqrt[n]{b} \geq 0$. Şeýle hem natural görkezijili derejäniň häsiýetine görä

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a}) \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab.$$

Diýmek, n-nji derejeli köküň kesgitlemesi boýunça $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ deňlik dogrudyr.

1-nji mysal. $\sqrt[4]{16 \cdot 625}$ aňlatmanyň bahasyny tapalyň.

Köpeltmek hasylyndan alnan kök baradaky teoremadan alarys:

$\sqrt[4]{16 \cdot 625} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{625} = 2 \cdot 5 = 10.$

2-nji teorema. **Köpeldijileriň sany ikiden köp bolan ýagdaý üçin dogrudyr:**

$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots \cdot a_k} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \sqrt[n]{a_k}$ ($k \geq 2$ islendik natural san).

Netije. **Bu deňligi sagdan çepe okamak bilen, biz birmeňzeş görkezijili kökleri köpeltmegiň düzgünini alarys:**

$$\sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}.$$

Birmeňzeş görkezjili kökleri köpeltmek üçin, köküň görkezijisini öňküligine galdyryp, kök aşagyndaky aňlatmalaryň köpeltmek hasylyndan kök almak ýeterlikdir.

2-nji mysal. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6.$

3-nji teorema. **Sanawjysy otrisatel däl we maýdalawjysy položitel san bolan drobdan alnan *n*-nji derejeli kök sanawjydan alnan şol derejeli köküň maýdalawjydan alnan şol derejeli köke bölünmeginden ýeten paýa deňdir.**

$a \geq 0$ we $b > 0$, bolanda

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \qquad (2)$$

Subudy.

(2) deňligi subut etmek üçin

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$$

deňligiň dogrudygyny görkezmek ýeterlikdir.

Droby derejä götermegiň düzgüni we n-nji derejeli köküň kesgitlemesi boýunça alarys:

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}.$$

Şeýlelikde, teorema subut edildi**.**

$a \geq 0$ we $b > 0$ diýlip edilýän talap diňe n jübüt bolanda esaslydyr. Eger-de n täk bolsa, onda (2) formula a we b sanlaryň otrisatel bahalary üçin hem dogrudyr.

3-nji mysal. $\sqrt{\frac{16}{25}}$ aňlatmanyň bahasyny tapalyň.

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}.$$

4-nji mysal. $\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$ aňlatmanyň bahasyny tapalyň.

$$\sqrt[3]{-\frac{64}{27}} = \frac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Netije. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ **deňligi sagdan çepe okamak bilen, birmeňzeş görkezijili kökleri bölmegiň düzgünini alarys:**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Birmeňzeş görkezijili kökleri bölmek üçin, köküň görkezijisini öňküligine galdyryp, kök aşagyndaky aňlatmalaryň paýyndan kök almak ýeterlikdir.

5-nji mysal. $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3.$

4-nji teorema. **Görkezijisi köküň görkezijisine galyndysyz bölünýän položitel sanyň derejesinden kök almak üçin derejäniň esasyny öňküligine galdyryp, kök aşagyndaky aňlatmanyň görkezijisini köküň görkezijisine bölmek ýeterlikdir.**

Subudy.

Goý, a erkin položitel san, m we n natural sanlar, özi hem m san n sana galyndysyz bölünýän bolsun. Onda

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad (3)$$

bolýandygyny subut edeliň. Derejäni derejä götermegiň düzgüni esasynda alarys:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{mn}{n}} = a^m.$$

6-njy mysal. $\sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4; \sqrt[4]{3^8} = 3^2 = 9.$

5-nji teorema. **Otrisatel däl sandan alynýan köki derejä götermek üçin, köküň görkezijisini üýtgetmän, kök aşagyndaky sany şol derejä götermek ýeterlikdir, ýagny $a \geq 0$ bolanda**

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (4)$$

Hakykytdan-da,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \sqrt[n]{a}}_{m} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{m \text{ sany}}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Eger n täk san bolsa, onda (4) formula $a<0$ bolanda hem dogrudyr.

7-nji mysal. $\left(\sqrt[4]{2}\right)^3 = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}.$

8-nji mysal. $\left(\sqrt[3]{-3}\right)^2 = \sqrt[3]{(-3)^2} = \sqrt[3]{9}.$

6-njy teorema. **Eger köküň görkezijisini we kök aşagyndaky aňlatmanyň dereje görkezijisini şol bir natural sana köpeltseň ýa-da olaryň umumy köpeldijisine bölseň, onda otrisatel däl sandan alynýan köküň ululygy üýtgemez.**

Başga sözler bilen aýdylanda:

Eger $\boldsymbol{a \geq 0}$ **we** $\boldsymbol{m}$**,** $\boldsymbol{n}$**,** $\boldsymbol{k}$ natural sanlar bolsa, onda

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \qquad (5)$$

k san m* we *n sanlaryň umumy bölüjisi bolsa, onda

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{k}]{a^{\frac{m}{k}}} \qquad (6)$$

(5) formulany subut etmek üçin

$$\left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^n = a^m$$

bolýandygyny görkezmek ýeterlikdir.

Köki derejä götermegiň düzgüni boýunça

$$\left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^n = \sqrt[nk]{a^{mkn}}.$$

Derejäniň ***mnk*** görkezijisiniň köküň ***nk*** görkezijisine galyndysyz bölünýändigi üçin 3-nji teorema görä $\sqrt[nk]{a^{mkn}} = a^m$. Diýmek, $\left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^n = a^m$. Bu bolsa $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ aňladýar.

(6) formula hem (5) formula meňzeş subut edilýär.

9-njy mysal. $\sqrt[4]{5} = \sqrt[8]{5^2}$; $\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[9]{7^6}$; $\sqrt[15]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^2}$.

7-nji teorema. **Kökden kök almak üçin, kök aşagyndaky sany üýtgetmän, bu kökleriň görkezijilerini köpeltmek ýeterlikdir, ýagny**

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a^n}, \ (a \geq 0).}$$

Subudy.

4-nji teorema boýunça

$$\left(\sqrt[mn]{a}\right)^n = \sqrt[mn]{a^n}.$$

5-nji teorema görä kökün görkezijisini we kök aşagyndaky sanyň görkezijisini olaryň umumy köpeldijisine bölseň, kökün ululygy üýtgemez. Şonuň üçin $\sqrt[nm]{a^n} = \sqrt[m]{a}$. Şeýlelikde, $(\sqrt[nm]{a})^n = \sqrt[m]{a}$. Emma kökün kesgitlemesine görä, bu $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ aňladýar.

10-njy mysal. $\sqrt{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{3}$; $\sqrt[5]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[15]{5}$.

***8-nji teorema.* $\boldsymbol{0 \le a < b}$ şerti kanagatlandyrýan islendik $\boldsymbol{a}$ we $\boldsymbol{b}$ sanlar üçin $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}}$ deňsizlik dogrudyr.**

Subudy.

Teoremany tersinden subut etmek usuly bilen subut edeliň. Goý, $\sqrt[n]{a} \ge \sqrt[n]{b}$ deňsizlik dogry bolsun.Onda san deňsizlikleriniň häsiýetine görä $(\sqrt[n]{a})^n \ge (\sqrt[n]{b})^n$, ýagny $a \ge b$ bolýar. Bu bolsa $a < b$ şerte garşy gelýär. Diýmek, $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

11-nji mysal. $\sqrt[3]{4}$ we $\sqrt[5]{8}$ sanlary deňeşdireliň.

$\sqrt[3]{4}$ we $\sqrt[5]{8}$ sanlary deň görkezijili kökler görnüşinde aňladalyň:

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[15]{4^5} = \sqrt[15]{256}, \quad \sqrt[15]{8} = \sqrt[15]{8^3} = \sqrt[15]{512}.$$

512>256 deňsizlikden 7-nji teorema esasynda alarys:

$$\sqrt[15]{512} > \sqrt[15]{256}.$$

Diýmek, $\sqrt[3]{4} < \sqrt[5]{8}$.

12-nji mysal. $x^8 > 2$ deňsizligi çözeliň.

Bu deňsizlik $x^8 - 2 > 0$ deňsizlige deňgüýçlüdir.

Deňsizligi aralyklar usuly bilen çözüp, aşakdaky jogaby alarys:

$$(-\infty; -\sqrt[8]{2}) \cup (\sqrt[8]{2}; \infty).$$

Gönükmeler

1. Hasaplaň:

a) $\sqrt[3]{24\cdot 9}$; b) $\sqrt[5]{48\cdot 162}$; ç) $\sqrt[4]{\dfrac{125}{0,2}}$.

2. Aňlatmanyň bahasyny tapyň:

a) $\sqrt[3]{75\cdot 45}$. b) $\sqrt[4]{54\cdot 24}$; ç) $\sqrt[3]{\dfrac{54}{0,25}}$.

3. Droblaryň bahasyny tapyň:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; b) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{96}}$; ç) $\dfrac{\sqrt[4]{2500}}{\sqrt[4]{4}}$.

4. Hasaplaň:

a) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$; b) $\sqrt[4]{32\cdot 3}\cdot\sqrt[4]{8\cdot 27}$.

§3. Drob görkezijili dereje we onuň häsiýetleri

Eger n bitin san bolsa, $a\neq 0$ bolanda a^n aňlatmanyň manysynyň bardygyny bilýäris. Meselem, $(-3)^5$ aňlatma her biri –3 bolan bäş köpeldijiniň köpeltmek hasylyny aňladýar. 2^{-6} san 2^6 derejä ters bolan sany aňladýar.

Indi görkezijisi bitin san däl-de, drob san bolan dereje diýen düşünjäni girizeliň.

Eger m san n-e bölünse (ýagny eger $\dfrac{m}{n}$ bitin san bolsa), onda

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ deňlik (bu ýerde $a>0$, m – bitin san we n – natural san)

dogrudyr. Bu arifmetik köküň kesgitlemesinden gelip çykýar. Meselem, $\sqrt[7]{51^{21}} = 5^{\frac{21}{7}} = 5^3$, çünki $(5^3)^7 = 5^{21}$.

Eger $\dfrac{m}{n}$ – drob san bolsa şu deňlik ýerine ýetýär diýsek, onda

bitin görkeziji üçin dogry häsiýetleriň ählisi položitel esasly drob görkeziji üçin hem ýerine ýeter.

Eger *a* – položitel san, $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$ – drob san (*m* – bitin san, *n* – natural san) bolsa, onda $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$.

Kesgitlemä laýyklykda alarys:

$0{,}7^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{0{,}7^3}$.

$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{13}{10}} = \sqrt[10]{\left(\frac{1}{3}\right)^{13}}$,

$5^{\frac{-1}{6}} = \sqrt[6]{5^{-1}}$.

Nola deň bolan esasly dereje diňe položitel drob görkeziji üçin kesgitlenýär:

eger $\frac{m}{n}$ – položitel san (*m* we *n* – natural san) bolsa, onda $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Otrisatel esaslar üçin drob görkezijili derejä garalyp geçilmeýär. $(-2)^{\frac{3}{4}}, (-8)^{\frac{1}{3}}, 0^{-\frac{1}{2}}$ ýaly aňlatmalaryň manysy ýok.

R drob görkezijili derejäniň bahasy *R* sanyň drob görnüşünde ýazylyş usulyna bagly däldir. Meselem: $2^{\frac{6}{8}} = \sqrt[8]{2^6} = \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$.

Muny umumy ýagdaýda görkezeliň.

$$a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Rasional görkeziji derejäniň häsiýetleri:

1. Islendik $a > 0$ üçin we islendik rasional *p* we *q* sanlar üçin

$$\boldsymbol{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$$

$$\boldsymbol{a^p : a^q = a^{p-q}}$$

$$\boldsymbol{a^p \cdot a^q = a^{p+q}.}$$

2. Islendik $a > 0$ we $b > 0$ üçin hem-de islendik rasional *p* san üçin

$$\boldsymbol{(ab)^p = a^p \cdot b^p}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.}$$

Mysal. $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}} = a^{\frac{13}{15}}$.

Islendik položitel a üçin we islendik rasional p üçin $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ deňlik dogrudyr.

p rasional san bolanda we n (n>1) natural san bolanda $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$ $(a > 0)$ deňlik dogrudyr.

Gönükmeler

1. Drob görkezijili derejeleri kökler bilen çalşyrmaly:

a) $7^{\frac{1}{2}}$, $12^{\frac{3}{4}}$, $29^{\frac{1}{3}}$, $37^{\frac{1}{4}}$; b) $3{,}8^{0{,}6}$, $8{,}5^{-0{,}5}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$.

2. Atrifmetik köki drob görkezijili dereje görnüşinde ýazmaly:

a) $\sqrt{1,3}$; ç) $\sqrt[2]{2,5^2}$; e) $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$;

b) $\sqrt{7^{-1}}$; d) $\sqrt[4]{33^3}$; ä) $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}$.

3. Hasaplamaly:

a) $64^{\frac{2}{3}}$; b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$; ç) $125^{\frac{3}{6}}:5$; d) $27^{\frac{4}{3}}$; e) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}}$.

§4. Ýaýlaryň açylyşy

Goşmagyň utgaşdyrma kanunyny ýazalyň:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Deňligiň sag bölegindäki ýaýy aýryp hem ýazmak bolar: $(a + b) + c = a + b + c$, onda alarys:

$$a + (b + c) = a + b + c.$$

Bu ýerde a, b, c islendik sanlar. Bu deňlikde c-ni $–c$; b-ni $–b$-e ahyrda b we c-ni $–b$ we $–c$ bilen çalşyryp ýene üç deňlik alarys.

$a+(b–c) = a+b–c;$ $a+(–b+c) = a–b+c;$ $a+(–b–c) = a–b–c$

Bu ýerden ýaýlary açmagyň 1-nji düzgüni gelip çykýar:

eger ýaýyň öňünde “goşmak” alamaty goýlan bolsa, onda ýaýyň içine alnan agzalary şol bir alamatlary bilen ýazmaly.

Mysallar.

1. $(5x^2+7x-9)+(-3x^2-6x+8)=5x^2+7x-9-3x^2-6x+8=2x^2+x-1.$

2. $(2x^2-11x-5)+(-x^2-3x+4)=2x^2-11x-5-x^2-3x+4=x^2-14x-1.$

Şeýlelikde, ýaýyň öňünde „goşmak” alamaty goýlan bolsa, onda ýaýyň içine alnan agzalary öz alamatlary bilen ýazmaly.

Indi bolsa aýyrmagyň kesgitlemesini ýatlalyň:

$$a-b=a+(-b).$$

Aýyrmagyň kesgitlemesi boýunça we 1-nji düzgünden peýdalanyp tapawutlary ýazalyň:

$a-(b-c)=a+(-b+c)=a-b+c;$ $\quad a-(-b+c)=a+(+b-c)=a+b-c;$

$a-(b+c)=a+(-b-c)=a-b-c;$ $\quad a-(-b-c)=a+(+b+c)=a+b+c.$

Ýaýlary açmagyň 2-nji düzgüni: Eger ýaýyň öňünde “aýyrmak” alamaty goýlan bolsa, onda ýaýyň içine alnan agzalary garşylykly alamatlary bilen ýazmaly.

Mysallar.

1. $(x^3+5x^2-x+8)-(x^3-7x-1)=x^3+5x^2-x+8-x^3+7x+1=5x^2+6x+9.$

2. $(5a^2-3ab-2a)-(-6a^2+ab-b)=5a^2-3ab-2a-6a^2-ab+b=-a^2-$ $-4ab-2a+b.$

3. Ýaýlary açmak hasaplamalary hem aňsatlaşdyrýar.

$(6{,}8-8{,}9)-(7{,}3-8{,}9)+(6{,}7+7{,}3)-(2{,}5+6{,}7)=6{,}8-8{,}9-7{,}3+$ $+8{,}9+6{,}7+7{,}3-2{,}5-6{,}7=6{,}8-2{,}5=4{,}3.$

Käbir aňlatmalarda goşulyjylary ýaýyň içine almak amatly bolýar. $25-a-b+c$ aňlatmada üýtgeýän ululyklary aşakdaky ýaly edip ýaýyň içine almak bolar.

$25-a-b+c=25+(-a-b+c).$

$25-a-b+c=25-(a+b-c).$

Gönükme

Ýaýlary açmaly:

a) $(12a+16x)-(6a-7x);$

b) $(11x^3-2x^2)-(x^3-x^2);$

ç) $(3a^3x-13x^2)-(3a^3x+6x^2);$

d) $(4x^2y+8xy^2)-(3x^2y-5xy^2)$;
e) $(13x-11y+10a)-(-15x+10y-15a)$;
ä) $(7a^2-4ax-x^2)-(2a^2-ax+2x^2)$.

§5. Köpagzany köpagza köpeltmek

Goý, $a+b$ ikagzany $m+n$ ikagza köpeltmek gerek bolsun, $m+n$ ikagzany x harpy bilen belgiläliň we emele gelen köpeltmek hasylyny ikagzany biragza köpeltmegiň düzgüni boýunça özgerdeliň

$$(a+b)(m+n)=(a+b)x=ax+bx.$$

$ax+bx$ aňlatmada x-iň ornuna $m+n$ ikagzany goýalyň we biragzany ikagza köpeltmegiň düzgüninden peýdalanalyň Onda:

$$ax+bx=a(m+n)+b(m+n)=am+an+bm+bn \text{ bolar.}$$

Şeýlelikde, $(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn.$

$am+an+bm+bn$ köpagza $a+b$ ikagzanyň her bir agzasyny $m+n$ ikagzanyň her bir agzasyna köpeldilende emele gelen biragzalaryň jemidir.

Bu ýerden köpagzany köpagza köpeltmegiň düzgüni gelip çykýar.

Köpagzany köpagza köpeltmek üçin, köpagzanyň her bir agzasyny beýleki köpagzanyň her bir agzasyna köpeltmeli we emele gelen köpeltmek hasylyny degişli alamatlary bilen ýazmaly.

Köpagza köpagza bilen köpeldilende ýene-de köpagza alnar. Ol köpagzany standart görnüşinde ýazmaly. Şunlukda biragzalary köpeltmegi ýatdan ýerine ýetirmek bilen aralykdaky ýazgylaryň käbirini gysgaldyp hem bolar.

Mysallara seredeliň:

1. $(2x-y)(4x^2+2x-y^2)=8x^3+4x^2-2xy^2-4x^2y-2xy+y^3$.

2. $(2a-3)(5-a)-3a(4-a)$ aňlatmany ýönekeýleşdirmeli.

$(2a-3)(5-a)-3a(4-a)=10a-2a^2-15+3a-12a+3a^2=a^2+a-15$.

3. $(x-2)(3x+1)(4x-3)=(3x^2-5x-2)(4x-3)=12x^3-9x^2-20x^2+15x-$ $-8x+6=12x^3-29x^2+7x+6$.

4. n-iň islendik natural bahasynda $n(n-5)-(n-14)(n+2)$ aňlatmanyň bahasynyň 7-ä bölünýändigini subut etmeli.

Subudy.

Aňlatmany özgerdeliň:

$n(n-5)-(n-14)(n+2) = n^2-5n-(n^2+2n-14n-28) = n^2-5n-n^2-$
$-2n+14n+28 = 7n+28 = 7(n+4).$

Alnan aňlatma n-iň islendik natural bahasynda 7-ä galyndysyz bölünýär. Diýmek, $n(n-5)-(n-14)(n+2)$ aňlatmanyň bahasy hem 7-ä bölünýändir.

Köpagzany köpagza aşakdaky ýaly köpeltmek bolýar.

$$
\begin{array}{rl}
\times & 3x^2-2ax+5a^2 \\
 & -x^2+3ax+4a^2 \\
\hline
 & -3x^4+2ax^3-5a^2x^2 \\
+ & \qquad 9ax^3-6a^2x^2+15a^3x \\
 & \qquad\qquad 12a^2x^2-8a^3x+20a^4 \\
\hline
 & -3x^4+11ax^3+a^2x^2+7a^3x+20a^4
\end{array}
$$

Köpagzany köpagza köpeltmegi çyzgy arkaly hem şekillendirmek bolar:

1.

a	b	c	
am	bm	cm	m

$(a+b+c)m=am+bm+cm$

2.

a	b	
an	bn	n
am	bm	m

$(a+b)(m+n)=am+an+bn+bm$

3.

a	b	c	
an	bn	cn	n
am	bm	cm	m

$(a+b+c)(m+n)=am+bm+cm+$
$+an+bn+cn.$

Bellik: bu ýerde $a, b, c, m, n,$ üýtgeýän ululyklar diňe položitel bahalary almaly.

Gönükme

Aňlatmany ýönekeýleşdirmeli we bahasyny hasaplamaly:

a) $(a-4)(a-2) - (a-1)(a-3)$, $a = 1{,}75$ bolanda;

b) $(a-5)(a-1) - (a+2)(a-3)$, $a = -2{,}6$ bolanda;

ç) $(x-2)(x-3) + (x+6)(x-5) - 2(x^2-7x+13)$, $x = 5{,}6$ bolanda;

d) $(x+1)(x+2) + (x-3)(x-4)$, $x = -0{,}4$.

§6. Gysga köpeltmek formulalary

$(a+b)$ jemi kwadrata götereliň. Onuň üçin $(a+b)^2$ aňlatmany $(a+b)(a+b)$ köpeltmek hasyly görnüşinde ýazalyň we köpeltmegi ýerine ýetireliň:

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2$,

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

Bu formula jemiň kwadraty diýilýär. Ol islendik iki aňlatmanyň jemini aňsatlyk bilen kwadrata götermäge mümkinçilik berýär.

Aýdylyşy: Iki aňlatmanyň jeminiň kwadraty birinji aňlatmanyň kwadratyna, plýus birinji we ikinji aňlatmalaryň köpeltmek hasylynyň iki essesine, plýus ikinji aňlatmanyň kwadratyna deňdir.

Indi $(a-b)$ tapawudy kwadrata götereliň:

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-ab-ab-b^2 = a^2-2ab+b^2$,

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.

Bu formula tapawudyň kwadraty diýilýär. Ol islendik iki aňlatmanyň tapawudyny kwadrata götermäge mümkinçilik berýär.

Aýdylyşy: Iki aňlatmanyň tapawudynyň kwadraty birinji aňlatmanyň kwadratyna, minus birinji we ikinji aňlatmalaryň köpeltmek hasylynyň iki essesine, plýus ikinji aňlatmanyň kwadratyna deňdir.

Mysallar.

1. $(3x+4)^2 = (3x)^2+2\cdot3x\cdot4+4^2 = 9x^2+24x+16$.
2. $(m^2-2n)^2 = (m^2)^2-2\cdot m^2\cdot 2n+(2n)^2 = m^4-4m^2n+4n^2$.
3. $(-5-c)^2 = ((-1)\cdot(5+c))^2 = (-1)^2\cdot(5+c)^2 = 1\cdot(25+10c+c^2) = 25+10c+c^2$.
4. $(2a^2b+3c^4)^2 = (2a^2b)^2+2\cdot 2a^2b\cdot3c^4+(3c^4)^2 = 4a^4b^2+12a^2bc^4+9c^8$.

5. $\left(\frac{6}{5}x^3y^2 - \frac{10}{9}x^3y^4\right)^2 = \left(\frac{6}{5}x^3y^2\right)^2 - 2\cdot\frac{6}{5}x^2y^2\cdot\frac{10}{9}x^3y^4 +$

$+\left(\frac{10}{9}x^3y^4\right)^2 = \frac{36}{25}x^6y^4 - \frac{8}{3}x^5y^6 + \frac{100}{81}x^6y^8.$

6. $73^2 = (70+3)^2 = 4900+420+9 = 5329.$

7. $58^3 = (60–2)^2 = 3600–240+4 = 3364.$

Jemiň kwadratynyň formulasyndan peýdalanyp soňy bäşlik bilen gutaran ikibelgili sanlary kwadrata götermegiň aňsat usuly üçin formula çykaryp bolar:

$(a5)^2 = (10a+5)^2 = 100a^2 + 100a+25 = 100a(a+1)+25.$

Mysallar.

1. $65^2 = 100\cdot6\cdot7+25 = 4225;$
2. $85^2 = 100\cdot8\cdot9+25 = 7225;$
3. $3{,}5^2 = 3\cdot4+0{,}25 = 12{,}25.$

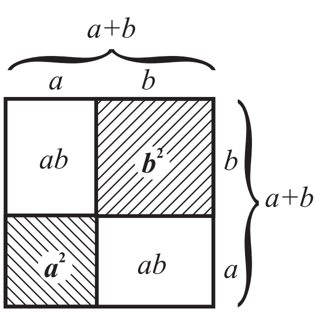
Soňky mysaly şeýle ýazmak bolar:

$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 3\cdot4 + \frac{1}{4} = 12\frac{1}{4};$

$\left(8\frac{1}{2}\right)^2 = 8\cdot9 + \frac{1}{4} = 72\frac{1}{4};$

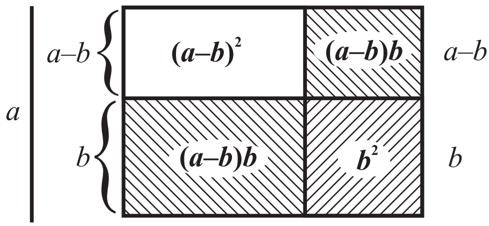
$\left(14\frac{1}{2}\right)^2 = 14\cdot15 + \frac{1}{4} = 210\frac{1}{4}.$

Eger üýtgeýän a we b ululyklar položitel bahalar alsa $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ formulany çyzgyda şekillendirilen kwadratyň we gönüburçluklaryň meýdanyny deňeşdirip hem alyp bolar.



$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$

Eger $a > b$ bolsa $(a–b)^2 = a^2–2ab+b^2$ formulany hem çyzgyda şekillendermek bolar.



$(a–b)^2=a^2–2ab+b^2$.

$(a+b+c)^2=((a+b)+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)\cdot c+c^2=a^2+2ab+b^2+2ac+$ $+2bc+c^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$.

	a	b	c
c	ac	bc	c^2
b	ab	b^2	bc
a	a^2	ab	ac

Gönükmeler

Köpeltmegi ýerine ýetiriň.

1. $(a^2+3ab–b^2)(2a–b)$.

2. $(x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x–y)$.

3. $(–a^2+b^2–2ab)(3a^4–a^2b^2+b^4)$.

4. $(a^3–a^2+a–1)(a+b)$.

5. $(4a^2–2ab–b^2)(–a^2+b^2–2ab)$.

§7. Iki aňlatmanyň jeminiň we tapawudynyň kuby

Iki aňlatmanyň jeminiň kubuna seredeliň:

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+$ $+2ab^2+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Şeýlelikde, alarys:

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

Iki aňlatmanyň jeminiň kuby birinji aňlatmanyň kuby goşmak birinji aňlatmanyň kwadratyny ikinji aňlatma köpeltmek hasylynyň üç essesi, goşmak ikinji aňlatmanyň kwadratyny birinji aňlatma köpeltmegiň üç essesi, goşmak ikinji aňlatmanyň kuby. Şuňa meňzeşlikde iki aňlatmanyň tapawudynyň kubunyň formulasy hem çykarylýar.

$$(a-b)^3=(a+(-b))^3=a^3+3a^2(-b)+3a^2(-b)^2+(-b^3)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Mysallar.

1. $(x^2y^4-2p^3y)^3=(x^2y^4)^3-3(x^2y^4)^2\cdot 2p^3y+3x^2y^4\cdot(2p^3y)^2-(2p^3y)^3=x^6y-$
$-6x^4y^9p^3+12x^2y^6p^6-8p^9y^3.$

2. $(a^2+4b^3)^3=(a^2)^3+3(a^2)^2\cdot 4b^3+3a^2\cdot(4b^3)^2+(4b^3)^3=a^6+12a^4b^3+$
$+48a^2b^6+64b^9.$

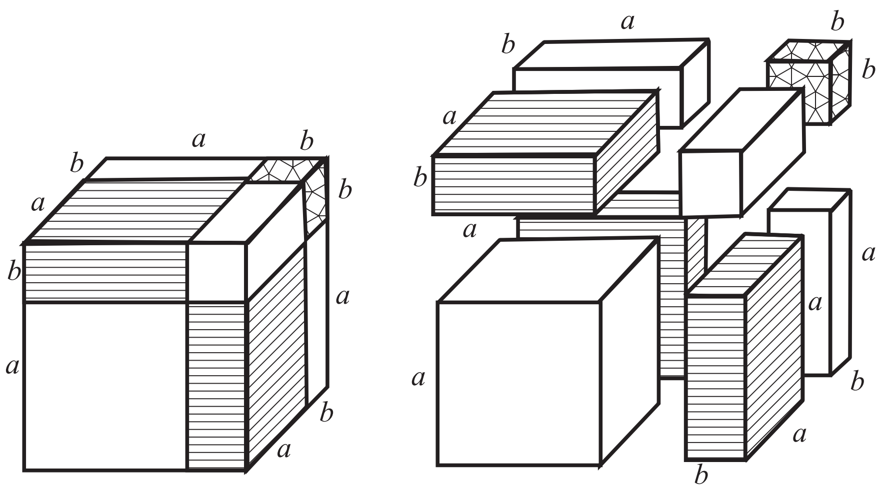
Gönükmeler

1. Amallary ýerine ýetirmeli:

a) $\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)^3$; ç) $(4x^3+5y^2)^3$; e) $(1,5m^3+0,3m^2)^2$.

b) $(a^m+a^{m-1})^3$; d) $(x^{m+1}-x^m)^3$;

a we *b* üýtgeýän ululyklar položitel baha alsa $(a+b)^3$ formulanyň aşakdaky ýaly geometrik manysy bardyr (*31-nji surat*).



31-nji surat

2. Köpeldijilere dagytmaly:

a) $(x+3)^2 - 16$; ç) $6x^2+24yx+24y^2$;

b) $4a^2-x^2+2xy-y^2$; d) x^6-2^6.

§8. Iki aňlatmanyň tapawudyny olaryň jemine köpeltmek

$a-b$ tapawudy $a+b$ jeme köpeltmeli bolsun, onda $(a-b)(a+b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$.

Diýmek, $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Iki aňlatmanyň tapawudynyň olaryň jemine köpeltmek hasyly, şol aňlatmalaryň kwadratlarynyň tapawudyna deňdir.

$a > b$ şerti kanagatlandyrýan položitel a we b sanlar üçin $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ formulanyň dogrudygyny çyzgyda şekillendirilen gönüburçluklaryň we kwadratlaryň meýdanlaryny deňeşdirip hem göz ýetirmek bolar.

Mysallar.

1. $(3a^2b-7)(3a^2b+7)=(3a^2b)^2-7^2=9a^4\mathrm{b}^2-49$.

2. $(-4m-n^2)(4m-n^2)=(-1)(4m+n^2)(4m-n^2)=-((4m)^2-(n^2)^2)=$
$=-(16m^2-n^4)=-16m^2+n^4$.

3. $92\cdot 88-(90+2)(90-2)=90^2-2^2=8100-4=8096$.

4. $40x^2-(6x+11)(6x-11)=40x^2-(36x^2-121)=40x^2-36x^2+121=$
$=4x^2+121$.

5. $(2a^2x^3+3b^5y^4)(2a^2x^3-3b^5y^4)=(2a^2x^3)-(3b^5y^4)=4a^4x^6-9b^{10}y^8$.

Gönükmeler

Köpeldijilere dagytmaly.

1. $(x+3)^2-16$. **3.** $6x^2+24xy+24y^2$.

2. $4a^2-x^2+2xy-y^2$. **4.** x^6-2^6.

§9. Kublaryň jeminiň we tapawudynyň formulasy

Kublaryň jemi üçin aşakdaky formula ulanylýar:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Bu formulany subut etmek üçin $a+b$ ikagzany $a^2–ab+b^2$ üçagza köpeldeliň:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3.$$

Formulanyň sag bölegindäki $a^2–ab+b^2$ köpeldiji $a^2–2ab+b^2$ üçagzany ýada salýar.

$a^2–ab+b^2$ üçagza a we b aňlatmalaryň tapawudynyň doly däl kwadraty diýilýär.

Formulanyň aýdylyşy:

Iki aňlatmanyň kublarynyň jemi şol aňlatmalaryň jemi bilen olaryň tapawudynyň doly däl kwadratlarynyň köpeltmek hasylyna deňdir.

Kublaryň tapawudy üçin $a^3–b^3=(a–b)(a^2+ab+b^2)$ formula ulanylýar.

$(a–b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2–ba^2–ab^2–b^3=a^3–b^3$.

Iki aňlatmanyň kublarynyň tapawudy şol aňlatmalaryň tapawudy bilen olaryň jeminiň doly däl kwadratynyň köpeltmek hasylyna deňdir.

Mysallar.

1. $27x^3+y^3=(3x)^3+y^3=(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$.

2. $m^6-n^3=(m^2)^3-n^3=(m^2-n)(m^4+m^2n+n^2)$.

3. $8a^6-343b^{12}=(2a^2)^3-(7b^4)^3=(2a^2-7b^4)\times$
$\times(4a^4+14a^2b^4+49b^8)$.

4. $27a^6b^9+125x^9y^{12}=(3a^2b^3)^3+(5x^3y^4)^3=(3a^2b^3+5x^3y^4)^3\times$
$\times(9a^4b^6-15a^2b^3x^3y^4+25x^6y^8)$.

Gönükmeler

Amallary ýerine ýetirmeli.

1. $(3a–4)(9a^2+12a+16)$.

2. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\right)$.

3. $(a+1)(a^2–a+4)$.

4. $(x–2)(x^2+2x+4)$.

5. $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}xy+\frac{1}{9}y^2\right)$.

§10. Nýutonyň binomy. Paskalyň üçburçlugy

1. Çalşyrmalar.

$\{A, B, C\}$ köplükden *ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA* çalşyrmalary düzmek bolar:

Kesgitleme: **Tükenikli köplükde takyklanan tertibe onuň elementleriniň çalşyrmalary diýilýär we P_n bilen bellenilýär.**

$P_1=1$;

$P_2=2;...., P_n=n\cdot P_{n-1}$;

$P_0=1$;

$P_1=1$;

$P_2=1\cdot 2$;

$P_3=1\cdot 2\cdot 3,..., P_n=1\cdot 2\cdot 3...\cdot n=n!$

Mysal. 11 myhmany 11 orunda 39916800 usul bilen stoluň başynda oturtmak bolar:

$P_{11}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11=39916800$.

2. Ýerleşdirmeler.

A, B, C harplary iki-ikiden alty usulda ýerleşdirmek bolar:

(*A,B*), (*A,C*), (*B,A*), (*B,C*), (*C,A*), (*C,B*).

Kesgitleme. **Tükenikli tertipleşdirilen köplüklere ýerleşdirmeler diýilýär. *n*-den *m* boýunça ýerleşdirmeleriň sany A_n^m bilen belgilenýär.**

$A_n^1=n$ bolýandygy düşnüklidir.

$A_n^1=n$

$A_n^2=n(n-1)$

$A_n^3=n(n-1)(n-2),...., A_n^m=n(n-1)(n-2)...n(n-m+1)$

$1\leq m$ bolanda $A_n^{m+1}=(n-m)A_n^m$ formula dogrudyr. Emma n-den $(n-m+1)$ çenli yzygider natural sanlaryň köpeltmek hasyly n we $n-m$ sanlaryň faktoriallarynyň gatnaşygyna deňdir:

$n(n-1)(n-2)...(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$. Şoňa görä-de

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

Mysal. Toparda 20 talyp bar, ekabyry, ýaşlar guramasynyň başlygyny we kärdeşler arkalaşygy guramasynyň başlygyny $A_{20}^{3} = \dfrac{20!}{(20-3)!} = \dfrac{20!}{17!} = 18 \cdot 19 \cdot 20 = 9840$ usul bilen saýlamak mümkindir.

3. Utgaşdyrmalar.

n elementli köplükde saklanýan her birinde m element bolan bölek köplükleriň sany C_n^m bilen belgilenýär.

$C_3^0 = 1$

$C_3^1 = 3$

$C_3^2 = 3$

$C_3^3 = 1$ *we* $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 8 = 2^3$

bolýandygyny bilýäris. C_n^m üçin formulany getirip çykarmak üçin ilki $A_n^m = C_n^m P_m$ bolýandygyny görkezeliň. Umumy subutdan ozal n=3 we m=2 hala garalyň. A,B,C üç harpdan her birinde iki harp bolar ýaly edip C_3^2=3 köplügi, P_2=2 usul bilen tertipleşdirmek mümkin, bu bolsa 3·2=6 tertipleşdirilen köplügi berýär. Umumy subut şuňa meňzeşdir. Berlen n elementden m elementi saklaýan tertipleşdirilen köplük emele getirmek üçin:

n elementden haýsy-da bolsa m elementi saýlap almak (muny C_n^m usul bilen ýerine ýetirmek mümkindir) gerek.

m saýlanyp alnan elementleri tertipleşdirmek (muny P_m usul bilen ýerine ýetirmek mümkindir) gerek. Jemi $C_n^m \cdot P_m$ usul (tertipleşdirilen) köplük alarys, ýagny $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{p_n}$.

$$A_n^m = C_n^m \cdot p_n, \text{ bu ýerden } C_n^m = A_n^m : p_n, \; A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}; \; P_m = m!$$

bolany üçin $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. ýa-da $C_n^m = \dfrac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}$.

Mysal. 35 okuwçyly synpdan konferensiýa üç wekili $C_{35}^{3} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \cdot 17 \cdot 11 = 6545$ usul bilen saýlamak mümkindir.

C_n^m bahalarynyň uly bolmadyk tablisasy

n\m	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
0	1						1
1	1	1					2
2	1	2	1				4
3	1	3	3	1			8
4	1	4	6	4	1		16
5	1	5	10	10	5	1	32

Nýutonyň binomy. Paskalyň üçburçlugy.

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^2$

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^2+5ab^4+b^5$

$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+ 6ab^5+b^6$

$$(a+b)^7 = a^7 + C_7^1 a^6 b + C_7^2 a^5 b^2 + C_7^3 a^4 b^3 + C_7^4 a^3 b^4 + C_7^5 a^2 b^5 +$$
$$+ C_7^6 ab^6 + C_7^7 b^7 = a^7 + \frac{7}{1} a^6 b + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} a^5 b^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^4 b^3 +$$
$$+ \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^3 b^4 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^2 b^5 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} ab^6 +$$
$$+ \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} b^7 = a^7 + 7a^6 b + 21 a^5 b + 35 a^4 b^3 +$$
$$+ 35 a^3 b^4 + 21 a^2 b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$(a+b)^8 = a^8 + C_8^1 \cdot a^7 b + C_8^2 \cdot a^6 \cdot b^2 + C_8^3 \cdot a^5 \cdot b^3 + C_8^4 \cdot a^4 \cdot b^4 +$$
$$+ C_8^5 a^3 \cdot b^5 + C_8^6 \cdot a^2 \cdot b^6 + C_8^7 \cdot ab^7 + C_8^8 b^8$$

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} +$$
$$+ C_n^n \cdot b^n$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}\cdot b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}\cdot b^2 +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}\cdot b^3 + \ldots + \frac{n(n-1)[n-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}a^{n-m}b^m +$$
$$+\ldots b^n$$

$$C_7^1 = \frac{7}{1} = 7, \quad C_7^0 = 1$$

$$C_7^2 = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} = 21$$
$$C_7^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$$
$$C_7^4 = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 35$$

$$C_7^5 = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 21$$
$$C_7^6 = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 7$$
$$C_7^7 = 1$$
$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$
$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$$

n-elementi köplükde saklanýan her birinde *m* element bolan bölek köplükleriň sany C_n^m bilen belgilenilýär we utgaşdyrma diýilýär.

Şu tablisany onuň häsiýetini derňän fransuz matematigi B.Paskalyň (1623-1662) hatyrasyna “Paskalyň üçburçlugy” diýip atlandyrmak kabul edilen

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\ 1\\
1\ 2\ 1\\
1\ 3\ 3\ 1\\
1\ 4\ 6\ 4\ 1\\
1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1\\
1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1\\
1\ 7\ 21\ 35\ 35\ 21\ 7\ 1\\
1\ 8\ 28\ 56\ 70\ 56\ 28\ 8\ 1\\
1\ 9\ 36\ 84\ 126\ 126\ 84\ 36\ 9\ 1\\
1\ 10\ 45\ 120\ 210\ 252\ 210\ 120\ 45\ 10\ 1
\end{array}
$$

Nýutonyň formulasynyň esasy netijeleri:

$(a+b)^n$ dagytmada $n+1$ goşulyjy bar.

$(a+b)^n$ formulada a-nyň dereje görkezijisi n-den 0–a çenli kemelýär. b-niň dereje görkezijisi 0-dan n-e çenli artýar. Dagytmanyň islendik goşulyjysynda a we b-niň dereje görkezijileriniň jemi binomyň dereje görkezijisine deň.

Dagytmanyň uçlaryndan deň uzaklykda durýan binomial koeffisiýentleri özara deňdir.

Binomial koeffisiýentler ilki artýar, soňra kemelýär. Eger binomyň dereje görkezijisi jübüt bolsa, onda dagytmanyň ortaky goşulyjysynyň binomial koefisiýentleriniň iň ulusydyr, eger-de binomuň dereje görkezijisi täk bolsa, onda iki ortaky goşulyjynyň koefisiýentleri özara deňdir we iň ulusydyr.

$(a+b)^n$ formulada goşulyjylary umumy görnüşde ýazmak üçin $(k+1)$-nji goşulyjyny k-njy agza diýip hasap etmek we T_k bilen belgilemek amatlydyr.

$$T_k = C_n^k a^{n-k} b^k, k = 0, \quad 1, ..., n. \qquad (2)$$

$T_o = C_n^o a^n b^o$ – birinji goşulyjy

$T_1 = C_n^1 a^{n-1} b$ – ikinji goşulyjy

$T_2 = C_n^2 a^{n-2} b^2$ – üçünji goşulyjy

Mysallar.

1. $\left(z^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{2}{3}}\right)^{12}$ dagytmanyň dördünji agzasyny tapmaly.

Dagytmanyň gözlenýän agzasyny (2) formula boýunça tapýarys.

$$T_4 = C_{12}^4\left(z^{\frac{1}{2}}\right)^8\left(z^{\frac{2}{3}}\right)^4 = 495z^{\frac{20}{3}}.$$

2. $(z+z^{-2})^{12}$ dagytmanyň $-i$ saklamaýan, ýagny $-i$ nol derejede saklaýan agzasyny tapmaly.

(2) formula boýunça taparys:

$$T_k = C_{12}^k z^{12-k}\left(z^{-2}\right)^k = C_{12}^k z^{12-3k}.$$

Şerte görä $12-3k=0$**.** $k=4$ bu dargatmanyň dördünji agzasydyr.

Gönükmeler

1. Binomyň derejesiniň dagydylyşyny tapyň:

a) $(a+b)^6$; ç) $(3x-1)^7$;

b) $(x-2y)^6$; d) $(p^{-2}-1)^6$.

2. $(a^3-ab)^{31}$ dagytmanyň iki ortaky agzasyny tapyň.

§11. Ikagzany we köpagzany derejä götermek

Köpagzany köpagza köpeldilende bir köpagzanyň her agzasyny beýleki köpagzanyň her bir agzasyna köpeldýärler. Emma käbir ýagdaýda gysgaldylan köpeltmegiň formulalaryndan peýdalanmak amatlydyr. Onuň üçin $(a+b)^2$ aňlatmany $(a+b)(a+b)$ köpeltmek hasyly görnüşinde ýazalyň $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$.

Diýmek, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Jemiň kwadratynyň formulasyndan peýdalanyp, köpagzany derejä götereliň:

$(a+b+c)^2=((a+b)+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=$
$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$

$(a+b+c+d)^2=((a+b)+(c+d))^2=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2=a^2+$
$+2ab+b^2 2ac+2ad+2bc+2bd+c^2+2cd+ d^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ac+2ad+$
$+2bc+2bd+2cd.$

$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2cd+2bd.$

Üçagzany kuba götermegiň formulasyny hem ýazmak bolar:

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+6abc.$

Mysal.

1. $(5+3x)^2 = 5^2+2\cdot5\cdot3x+(3x)^2 = 25+30x+9x^2.$
2. $(x^2-3a)^2 = (x^2)^2-2x^2 3a+(3a)^2 = x^4-6x^2a+9a^2.$
3. $(a^2+4b^3)^3 = (a^2)^3+3(a^2)^2 4b^3+3a^2(4b^3)^2+(4b^3)^3=a^6+12a^4b^3+48a^2b^6+64b^9.$
4. $(2a-5b)^3=(2a)^3-3(2a)^2 5b+3\cdot2a(5b)^2-(5b)^3=8a^3-60a^2b+150ab^2-125b^3.$
5. $(3x^2+2y^2+xy)^2=(3x^2)^2+(2y^2)^2+(xy)^2+2\cdot3x^2\cdot2y^2+2\cdot3x^2\cdot xy+2\cdot2y^2\cdot xy=$
$=9x^4+4y^4+13x^2y^2+6x^3y+4xy^3.$
6. $(a-2b+3c-4d)^2 = a^2+4b^2+9c^2+16d^2+2a(-2b)+2a\ 3c+$
$+2a(-4d)+2(-2b)3c+2(-2b)(-4d)+2\cdot3c(-4d) = a^2+4b^2+9c^2+$
$+16d^2-4ab+6ac-8ad-12bc+16bd-24cd.$

Gönükmeler

Köpagzany derejä götermeli.

1. $(2x+3y+4z)^2.$ **3.** $(2x+3y+4z)^3.$ **5.** $(x+3y-2c)^3.$

2. $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}-\frac{7}{4}\right)^2.$ **4.** $(x-2y+3c)^3.$

§12. Kökli aňlatmalary goşmak we aýyrmak

Kökli aňlatmalar goşulanda we aýyrlanda olaryň arasynda goşmak ýa-da aýyrmak belgisi goýulýar, meňzeş kök belgisi bar bolsa olary toplamaly.

Mysallar.

1. $(2\sqrt{20}-5\sqrt{8})-\left(3\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{98}\right)=2\sqrt{20}-5\sqrt{8}-3\sqrt{\frac{1}{5}}+$

$+\sqrt{98} = 4\sqrt{5} + 10\sqrt{2} - \frac{3}{5}\sqrt{5} + 7\sqrt{2} = 3,4\sqrt{5} + 17\sqrt{2}.$

2. $(2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{18}) + (\sqrt{72} - \sqrt{80}) = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{18} + \sqrt{72} - \sqrt{80} = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{5} = 9\sqrt{2} - 3\sqrt{5}.$

3. $(\sqrt{9x} - \sqrt[3]{8y}) + (\sqrt[3]{27y} + \sqrt{16x}) = \sqrt{9x} - \sqrt[3]{8y} + \sqrt[3]{27y} + \sqrt{16x} = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{y} + 3\sqrt[3]{y} + 4\sqrt{x} = 7\sqrt{x} - \sqrt[3]{y}.$

Gönükmeler

Aňlatmalary ýönekeýleşdirmeli.

1. $\sqrt{48} + \sqrt{75} - \sqrt{300}.$

2. $\sqrt{50} + \sqrt{98} - \sqrt{200}.$

3. $\sqrt{20} + 2\sqrt{45} - 3\sqrt{500}.$

4. $5\sqrt{27} - 4\sqrt{48m} - 2\sqrt{12m}.$

5. $\sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{75}.$

§13. Kökli aňlatmalary köpeltmek

Kökli aňlatmalar köpeldilende arifmetik köküň häsiýetlerinden peýdalanylýar.

Birmeňzeş derejeli birnäçe kök belgilerini köpeltmek üçin kök aşagyndaky aňlatmalary köpeldip köpeltmek hasylyndan şol derejeli kök almaly.

Dürli görkezijili radikallary köpeltmek üçin ilki bilen olary umumy görkezijä getirmeli. Radikalyň öňünde koeffisiýent bar bolsa, onda olary köpeltmeli.

Mysallar.

1. $5\sqrt[4]{2a} \cdot 2\sqrt[4]{8a^3} = 10\sqrt[4]{16a^4} = 10 \cdot 2a = 20a.$

2. $(4x\sqrt[3]{x^2} - 5y\sqrt[3]{xy} + xy\sqrt[3]{y^2}) \cdot 2xy\sqrt[3]{xy} = 8x^2y\sqrt[3]{x^3y} -$
$- 10xy^2\sqrt[3]{x^2y^2} + 2x^2y^2\sqrt[3]{xy^3} = 8x^3y\sqrt[3]{y} - 10xy^2\sqrt[3]{x^2y^2} +$
$+ 2x^2y^3\sqrt[3]{x}.$

3. $(7\sqrt{5} - 4)(2\sqrt{5} - 1) = 14\sqrt{25} - 8\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 4 =$
$= 74 - 15\sqrt{5}.$

4. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt{2}.$

5. $(a\sqrt{a} + \sqrt[6]{a}) \cdot (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[4]{a^3}) = a^2\sqrt[12]{a^2} - a^3\sqrt[12]{a^{16}} - a\sqrt[12]{a^{11}} =$
$= a^2\sqrt[6]{a} - a^3\sqrt[4]{a} + \sqrt[6]{a^5} - a\sqrt[12]{a^{11}}.$

Gönükmeler

Aňlatmany ýönekeýleşdirmeli.

1. $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}).$

2. $(\sqrt{3} + 0,5\sqrt{14})(\sqrt{3} - 0,5\sqrt{14}).$

3. $(\sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}})^2.$

4. $(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^2.$

5. $(\sqrt{15} + 3\sqrt{5})^2 - 10\sqrt{27}.$

§14. Bölmek

Birmeňzeş görkezijili kökleri bölmek üçin kök aşagyndaky aňlatmalary bölmeli we alnan paýdan şol derejeli kök almaly.

Dürli görkezijili kökleri bölmek üçin olary meňzeş görkezijä getirmeli. Eger koeffisiýentler bar bolsa, onda olary bölmeli.

Mysallar.

1. $\sqrt[3]{6a^4} : \sqrt[3]{2a} = \sqrt[3]{\dfrac{6a^4}{2a}} = \sqrt[3]{3a^3} = a\sqrt[3]{3}.$

2. $\left(\frac{3x}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - 0,4\sqrt{\frac{3}{xy}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{xy}{2}}\right):\frac{4}{15}\sqrt{\frac{3y}{2x}} = \frac{45x}{8}\sqrt{\frac{2x^2}{3y^2}} -$
$-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{y^2}} + \frac{5}{4}\sqrt{\frac{x^2}{3}} = \frac{15x^2}{8y}\sqrt{6} - \frac{3}{2y}\sqrt{2} + \frac{5x}{12}\sqrt{3}.$

3. $(\sqrt{8x^2y} - 2y\sqrt{x} - x\sqrt{x}):(\sqrt{2y} - \sqrt{x}) = (2x\sqrt{2y} -$
$- 2y\sqrt{x} - x\sqrt{x}):(\sqrt{2y} - \sqrt{x}) = (\sqrt{2y} - \sqrt{x})(x - \sqrt{2xy}) \div$
$\div(\sqrt{2y} - \sqrt{x}) = x - \sqrt{2xy}.$

4. $(\sqrt[3]{25a^2}:\sqrt[3]{16b^2}):(\sqrt[3]{5a} - \sqrt[3]{4b}) = ((\sqrt[3]{5a})^2 - (\sqrt[3]{4b})^2) \div$
$\div((\sqrt[3]{5a}) - \sqrt[3]{4b}) = \sqrt[3]{5a} + \sqrt[3]{4b}.$

Gönükmeler

Bölmegi ýerine ýetirmeli.

1. $(a^2 - 11):(a + \sqrt{11})$.

2. $(1 + \sqrt{y}):(\sqrt{y} + \sqrt{y})$.

3. $(\sqrt{c} + c):(c\sqrt{c} + c)$.

4. $(\sqrt{2x} - \sqrt{2y}):(3\sqrt{x} - 3\sqrt{y})$.

5. $(2\sqrt{3} - 3):5\sqrt{3}$.

§15. Derejä götermek

Kök belgisini derejä götermek üçin, kök aşagyndaky aňlatmany şol derejä götermeli köküň görkezijisini bolsa öňküligine galdyrmaly.

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

Mysallar.

1. $(\sqrt[3]{2ax^2})^2 = \sqrt[3]{4a^2x^4} = x\sqrt[3]{4a^2x}.$

2. $(\sqrt[3]{(x+y)^2})^5 = \sqrt[3]{(x+y)^{10}} = (x+y)^3\sqrt[3]{x+y}.$

3. $(\sqrt[n]{(x^2+y^2)^m})^{np} = \sqrt[n]{(x^2+y^2)^{mnp}} = (x^2+y^2)^{mp}.$

4. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$.

5. $(\sqrt{3}-2\sqrt[3]{2})^3 = 3\sqrt{3} - 18\sqrt[3]{2} + 12\sqrt{3}\sqrt[3]{4} - 16 = 3\sqrt{3} -$
$- 18\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[6]{432} - 16$.

Gönükmeler

Amallary ýerine ýetir.

1. $(1+\sqrt{2})^2$. **3.** $(2-\sqrt{3})^2$. **5.** $(3\sqrt{a}-2\sqrt{b})^2$.

2. $(2\sqrt{ab}+\sqrt{a})^2$. **4.** $(\sqrt{a^3b}+2\sqrt{ab^5})^2$.

§16. Kök almak

Kökden kök almak üçin kökleriň görkezijilerini köpeltmeli.

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Mysallar.

1. $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$.

2. $\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[12]{a^{10}} = \sqrt[6]{a^5}$.

Kökli aňlatmalary özgertmeklige degişli mysallar.

Ýönekeýleşdirmeli:

1. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$.

2. $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$.

$9+4\sqrt{2} = (2\sqrt{2}+1)^2$ görnüşde ýazmak bolar. Onda:

$$\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}} = \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} =$$
$$= \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1.$$

Çylşyrymly kökleriň formulasyndan peýdalanmak.

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Bu ýerde $A>0$, $B>0$ we $A^2>B$, çep we sag böleklerdäki alamatlar degişlilikde ýokarky ýa-da aşaky alynýar. Bu formula çylşyrymly kökleriň formulasy diýilýär. Bu formulany subut edeliň.

Çep bölegini kwadrata götereliň:

$(\sqrt{A+\sqrt{B}})^2 = A+\sqrt{B}$ alarys.

Sag bölegini kwadrata götereliň.

$$\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2 = \frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2} +$$
$$+\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2} + 2\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2} + \frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2} =$$
$$= A^2 + \sqrt{A^2-(A^2-B)} = A+\sqrt{B}.$$

Mysallara garalyň:

1. $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1);$

2. $\sqrt{3\sqrt{3}-2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{(3\sqrt{3})^2-24}}{2}} -$
$-\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{(3\sqrt{3})^2-24}}{2}} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}} -$
$-\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{12} - \sqrt[4]{3};$

3. $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} =$
$= \frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2});$

4. $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} + 1.$

Gönükmeler

Aňlatmalary ýönekeýleşdiriň.

1. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$. **3.** $\sqrt{7+\sqrt{24}}$.

2. $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$. **4.** $\sqrt{7-\sqrt{24}}$.

§17. Drobuň sanawjysyny ýa-da maýdalawjysyny irrasionallykdan boşatmak

Aşakda drobuň maýdalawjysyny irrasionallykdan boşatmaklyga seredýäris. Sanawjyny irrasionallykdan boşatmaklyk hem şuňa meňzeş ýerine ýetirilýär.

1. $\frac{a}{\sqrt[n]{b^k}}$, $n>k$. Bu ýerde drobuň sanawjysy we maýdalawjysy maýdalawjy kökden boşar ýaly köpeldijä köpeldilýär, ýagny $\sqrt[n]{b^{n-k}}$ aňlatma köpeltmeli.

Mysallar:

$$\frac{5}{\sqrt[4]{125}} = \frac{3}{\sqrt[4]{5^3}} = \frac{5\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^3.5}} = \sqrt[4]{5};$$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{a\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \frac{a\sqrt[n]{x}}{x}.$$

2. $\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Bu ýagdaýda drobuň sanawjysyny we maýdalawjysyny $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ aňlatmanyň çatyrymlysyna köpeltmeli.

Eger drob $\frac{A}{p\sqrt{a \pm q}}$ görnüşde bolsa, onda onuň agzalaryny $p\sqrt{a \mp q}$ aňlatma köpeltmeli.

Mysallar:

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{8}}=\frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{(\sqrt{5}-\sqrt{8})(\sqrt{5}+\sqrt{8})}=\frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{8})^2}=$$
$$=-2(\sqrt{5}+\sqrt{8});$$

$$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}=\frac{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})(\sqrt{a-b}-\sqrt{a-b})}{(\sqrt{a-b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})}=$$
$$=\frac{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2}{(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a-b})^2}=\frac{a+b-2\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}+a-b}{a+b-(a-b)}=$$
$$=\frac{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}{2b}=\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

3. $\dfrac{A}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}$ görnüşli droblar üçin sanawjyny ýa-da maýdalawjyny jemiň ýa-da tapawudyň doly däl kwadratyna köpeltmeli.

Mysallar:

$$\frac{6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}}=\frac{6(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2})}{(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{7^2}-\sqrt[3]{7\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2})}=$$
$$=\frac{6(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 4})+\sqrt[3]{4^2}}{(\sqrt[3]{7})^3-(\sqrt[3]{4})}=2(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16});$$

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{5}}=\frac{1\cdot(1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2})}{(1-\sqrt[3]{5})(1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2})}\frac{1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}\,2}{1+5}=$$
$$=\frac{1}{6}(1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}).$$

4. Eger drobuň maýdalawjysynda dürli derejeli kök belgileri bar bolsa, onda ilki bir kök belgisini, soňra beýleki kök belgisini ýok etmeli.

Mysal:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}}{3-\sqrt[4]{4}}=$$
$$=\frac{(3+\sqrt[2]{2})(9+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}{(3-\sqrt[4]{4})(9+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(9+3\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2})}{23}.$$

5. Eger maýdalawjyda üç we ondan köp kök belgisi bar bolsa, onda olary ilki toparlamaly we ýokardaky işlenen mysallara meňzeş ýagdaýa getirmeli.

Mysal:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{23}.$$

6. Rasional görkeziji üderejeleri saklaýan aňlatmalary özgertmek. Aňlatmanyň bahasyny tapalyň:

a) $$\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{\frac{2}{3}}\right)^{-1}=\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right)^{-1}=\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}=\frac{1}{-\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3};$$

b) $$-\frac{2^{-2}-(\frac{3}{4})^{-4}(-\frac{1}{2})^{2}}{10^{-1}+(-\frac{1}{8})^{0}}=\frac{\frac{1}{2^3}-\frac{1}{(\frac{3}{4})^4}.\frac{1}{4}}{\frac{1}{10}+1}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{4^3}{3^4}}{1\frac{1}{10}+1}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{64}{81}}{1\frac{1}{10}}=$$

$$=\frac{431.10}{81.8.11}=-\frac{2155}{3564}.$$

Amallary ýerine ýetireliň:

a) $$\left(\frac{5a^{n+1}}{3b^n}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(-\frac{5a^{n+1}}{3b^n}\right)}=\frac{1}{\frac{25a^{2n+2}}{9b^{2n}}}=\frac{9b^{2n}}{25a^{2n+2}};$$

b) $$\left(x^2+a^{-3}\right)\left(x^2-a^{-3}\right)=\left(-x^{-2}\right)^2-\left(a^{-3}\right)^{-3}=x^{-4}-a^{-6}\,\frac{1}{x^4}-\frac{1}{a^6}=$$

$$=\frac{a^6-x^4}{a^6x^4}.$$

Gönükmeler

Droblaryň maýdalawjylaryny köklerden boşatmaly.

1. $\dfrac{m-1}{\sqrt{m}+1}$.

2. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-2}$.

3. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x-3}-2}$.

4. $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$.

5. $\dfrac{2}{3-\sqrt{2x-1}}$.

IV bap

Funksiýa barada esasy düşünjeler

§1. Funksiýa we onuň berliş usullary

Eger X köplügiň her bir x elementine Y köplügiň ýeke-täk $y=f(x)$ kesgitli elementi degişli bolsa, onda $y=f(x)$ ululyga funksiýa diýilýär.

f – funksional baglanyşygy, X – köplüge funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy ýa-da argumentiň bahalar ýaýlasy diýilýär we $D(f)$ arkaly belgilenýär. Y köplüge funksiýanyň bahalarynyň köplügi diýilýär we ol $E(f)$ arkaly belgilenýär. Funksiýany başgaça aşakdaky ýaly-da kesgitleýärler:

$D \subset X$ köplügiň $E \subset Y$ köplüge f kanun boýunça öwrülmesine funksiýa diýilýär we ol $f\colon x \longrightarrow y$ bilen belgilenýär.

Eger X we Y köplükleriň elementleri sanlar bolsa, onda $y=f(x)$ funksiýa san funksiýasy diýilýär.

Eger-de funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy, bahalar ýaýlasy, funksional baglanyşygy belli bolsa, onda funksiýa berlen diýilýär.

Mysallara seredeliň.

1. Töweregiň uzynlygy onuň radiusyna bagly funksiýadyr.

2. Tablisa berlen.

Okuwçynyň atlary / **Atasynyň käri**	**sürüji**	**işçi**	**daýhan**	**lukman**	**inžener**	**satyjy**
Meret	+					
Aman		+				
Berdi			+			
Seýit						+

Tablisada „ + " belgi okuwçylaryň atasynyň kärini aňladýar. Bu ýerde okuwçylaryň atlary funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny, atalarynyň kärleri bolsa funksiýanyň bahalar ýaýlasyny düzýär. Baglanyşyk kanuny f bolsa sözler bilen berlen. Meselem: Berdiniň atasy daýhan.

Funksiýanyň berliş usullary

Eger-de funksiýa formula bilen aňladylan bolsa, funksiýa analitik usulda berlen diýilýär.

Meselem.

1. $y = x^3 - 3,\ x \in [-1; +1]$.

2. $y = x^3 + 2x,\ x \in [0; +\infty[$.

3. $y = \begin{cases} x^2, \text{ eger } x \in]-\infty; 10[\text{ bolsa,} \\ x, \text{ eger } x \in [10; 25] \text{ bolsa,} \\ x^3, \text{ eger } x \in]25; +\infty[\text{ bolsa.} \end{cases}$

1-nji mysalda funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy [–1;+1] kesim bolup, onuň degişlilik baglanyşygy x^3–3 formula bilen berilýär.Bu ýerde funksiýanyň bahalaryny tapmak operasiýasy bir formula bilen berilýär. 2-nji mysalda kesgitleniş ýaýlasy [0; +∞[şöhle bolup, funksiýanyň bahalaryny hasaplamak bir formula bilen berilýär, 3-nji mysalda funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy üç bölege bölünip,funksiýalaryň bahalaryny tapmak operasiýasy her bölekde aýratyn formula boýunça amala aşyrylýar.

Argumentiň bahalaryna degişlilikde funksiýanyň bahalarynyň berilmegine funksiýanyň tablisa bilen berilmegi diýilýär. Meselem, ýylyň dowamynda Aşdabatda günüň dogýan wagtynyň tablisasy, sanlaryň kwadrat kökleriniň tablisasy we ş.m.

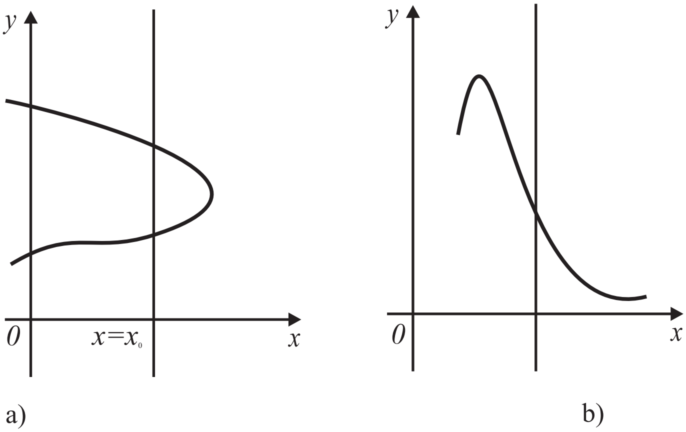
Funksiýa bilen argumentiň baglanyşygynyň grafik arkaly şekillendirilmegine funksiýanyň grafiki berlişi diýilýär. Funksiýanyň grafiki berlişinden tablisa arkaly berlişine geçilende funksiýanyň bahasynyň takyklygy kemelýär. Onuň takyklygynyň kemelmegi grafigiň masştabyna we funksiýanyň bahasynyň haýsy takyklykda gerekdigine bagly. Diýmek, funksiýa üç usulda berilýär: analitik, tablisa we grafiki.

Funksiýanyň grafigi

***Y*=*f*(*x*) baglanyşygy kanagatlandyrýan, *D*(*f*) abssisalar okuna we *E*(*f*) ordinatalar okuna degişli bolan koordinatalar tekizligindäki (*x; y*) nokatlaryň köplügine *f*(*x*) funksiýanyň grafigi diýilýär.**

Koordinatalar tekizligindäki *Γ* çyzygyň (*Γ* nokatlar köplüginiň) käbir funksiýanyň grafigi bolmagy üçin ordinatalar okuna parallel bolan islendik göni çyzygyň *Γ* çyzyk bilen birden köp bolmadyk nokatda kesişmegi zerur we ýeterlikdir. Şoňa görä-de, 32-nji a suratdaky egri çyzyk $y=f\,(x)$ görnüşdäki funksiýalaryň grafigi bolup bilmeýär.

32-nji b suratdaky egri çyzyk käbir $y=f\,(x)$ görnüşdäki funksiýanyň grafigidir.



32-nji surat

Gönükmeler

1. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ bolsa, tapmaly $f(0), f(3), f(-3), f(a-1)$.

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ bolsa, tapmaly $f(0), f(1), f(m+n)$.

3. $f(x) = \dfrac{|2-x|}{1+x}$ bolsa, tapmaly $f(0), f(3), f(-3), f(2), f(-2)$.

4. $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ eger } -\infty < x \le 0 \\ 1, \text{ eger } 0 < x < \infty \end{cases}$ bolsa tapmaly $f(-3), f(-1), f(0)$,

$f(1), f(5), f(10)$ we grafigini gurmaly.

Jübüt we täk funksiýalar

Eger sanlar köplüginde onuň her bir x elementine garşylykly $-x$ element bar bolsa ($x \in X \rightarrow (-x) \in X$), onda bu köplüge O nokada görä simmetrik köplük diýilýär. Eger: 1) $y=f(x)$ san funksiýasynyň kesgitleniş ýaýlasy O nokada görä simmetrik köplük bolsa; 2) her bir $x \in D(f)$ üçin $f(-x)=f(x)$ ($f(-x)=-f(x)$) deňlik dogry bolsa,onda munuň ýaly funksiýa **jübüt (täk) funksiýa diýilýär**.

Jübüt funksiýanyň grafigi ordinata okuna görä, täk funksiýanyň grafigi bolsa koordinatalar başlangyjyna görä simmetrikdir.

Indi funksiýanyň esasy häsiýetlerini sanalyň.

1. Eger $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalar jübüt bolsa, onda $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) funksiýalar hem jübütdir.

2. Eger $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalar täk bolsa, onda:

a) $f(x) \pm g(x)$ funksiýalar täkdir;

b) $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) funksiýalar jübütdir.

Jübüt funksiýalara mysallar.

1. $y=x^2$ funksiýa kesgitleniş ýaýlasy $D(y)=R=]-\infty;\infty[$ bolan jübüt funksiýadyr.

2. $y=\cos x$ funksiýa kesgitleniş ýaýlasy $]-\infty;\infty[$ bolan jübüt funksiýadyr.

3. $y=\frac{x^2+x}{x^5-x}$ funksiýa kesgitleniş ýaýlasy $]-\infty;1[\ \mathrm{U}]-1;0[\mathrm{U}]1;\infty[$ bolan jübüt funksiýadyr.

4. $y=|x|$ funksiýa kesgitleniş ýaýlasy R bolan jübüt funksiýadyr.

Täk funksiýalara mysallar.

1. $y=x^3$ funksiýa kesgitleniş ýaýlasy R bolan täk funksiýadyr.

2. $y=x+\frac{1}{x}$ funksiýa kesgitleniş ýaýlasy $D(y)=]-\infty;0[\cup]0;\infty[$ bolan täk funksiýadyr.

3. $y=\sin x$, $\mathrm{tg}x$, $\mathrm{ctg}x$ funksiýalar kesgitleniş ýaýlasynda täk funksiýalardyr.

Gönükmeler

Funksianyň jübütligini, täkligini kesgitlemeli.

1. $f(x)=2x^4-3x^2+5$.

2. $f(x)=x^2+3x-1$.

3. $f(x)=x^{-6}2x^{-4}+5$.

4. $f(x)=2x^2+x^5$.
5. $f(x)=x^{-3}+x^{-1}$.

Periodik funksiýalar

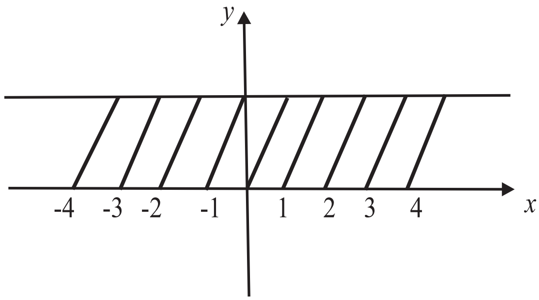
Eger $y=f(x)$ funksiýanyň islendik $x \in D(f)$ argument üçin

1) $x\in D(f) \Rightarrow (x+T)\in D(f)$; $(x-T)\in D(f)$ bolsa,

2) $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$ şertleri kanagatlandyrýan $T\neq 0$ hakyky san bar bolsa, onda f funksiýa periodik funksiýa diýilýär. T sana f funksiýanyň periody diýilýär. Eger T san f funksiýanyň periody bolsa, onda $-T$, $\pm 2T$, $\pm 3T$, ..., $\pm kT$ ($k\in Z$) sanlar hem bu funksiýanyň periodlarydyr.

Mysal.

$y=\{x\}$ funksiýa iň kiçi periody 1-e deň bolan periodik funksiýadyr (*33-nji surat*).



33-nji surat

sin$x$ we cos$x$ funksiýalar $2\pi=360^{\circ}$ periodly funksiýalardyr.
tg x we ctg$x$ funksiýalar $\pi=180^{\circ}$ periodly funksiýalardyr.

§2. Funksiýanyň artmagy we kemelmegi. Monoton funksiýalar

Kesgitleme. Eger argumentiň uly bahasyna funksiýanyň uly bahasy degişli bolsa, funksiýa artýan funksiýa diýilýär.

$x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$ şert ýerine ýetmeli.

1. $y=2x+3$ funksiýa $x_1=2$, $x_2=3$ bolanda $y_1=7$, $y_2=9$ bolar.

$x_1<x_2$ deňsizliklerden $y_1<y_2$ gelip çykýar. Şonuň üçin $y=2x+3$ artýan funksiýadyr.

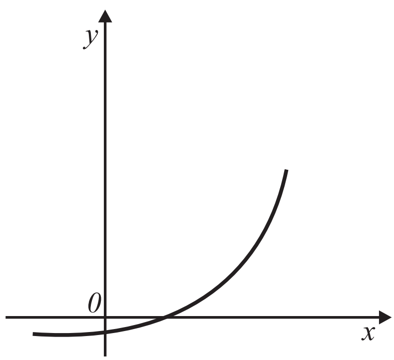
Eger argumentiň uly bahasyna funksiýanyň kiçi bahasy degişli bolsa, funksiýa kemelýän funksiýa diýilýär.

$x_2>x_1 => f(x_2)<f(x_1)$ şert ýerine ýetmeli.

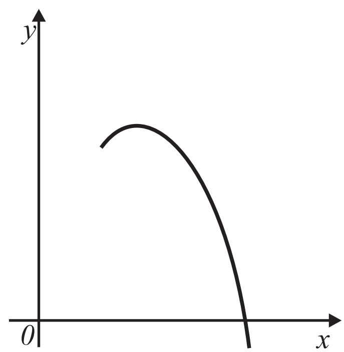
$y=5-3x$ funksiýa $x_1=2$, $x_2=3$ bolanda $y_1=-1$, $y_2=-4$ bolan $x_1<x_2 \Rightarrow y_1>y_2$ bolany üçin $y=5-3x$ funksiýa kemelýändir.

Eger funksiýa özüniň kesgitleniş ýaýlasynda diňe artýan bolsa, ýa-da diňe kemelýän bolsa, onda şonuň ýaly funksiýa monoton funksiýa diýilýär.

Monoton artýan funksiýanyň grafigi *Ox* oky boýunça saga süýşüp ýokaryk göterilýär (*34-nji surat*).



34-nji surat



35-nji surat

$y=kx$, $y=x^3$; $y=\frac{k}{x}$; $y=\frac{k}{x}$; $y=\text{tg}x$; $y=\text{ctg}x$ funksiýalar monotondyr. Emma $y=x^2$, $y=\sin x$, $y=\cos x$ fuksiýalar monoton däldir.

Monoton kemelýän funksiýanyň grafigi *Ox* oky boýunça saga süýşüp aşak inýär (*35-nji surat*).

Monoton funksiýanyň monotonlyk ýaýlasynda periody ýokdur. Meselem, $y=x^2$ funksiýa $]-\infty;0[$ aralykda monotondyr, çünki bu aralykda berlen funksiýa diňe kemelýär. Bu funksiýa $]0;\infty[$ aralykda hem monotondyr, çünki bu aralykda funksiýa diňe artýar.

Gönükmeler

Funksiýanyň artýan, kemelýän aralyklaryny tapmaly.

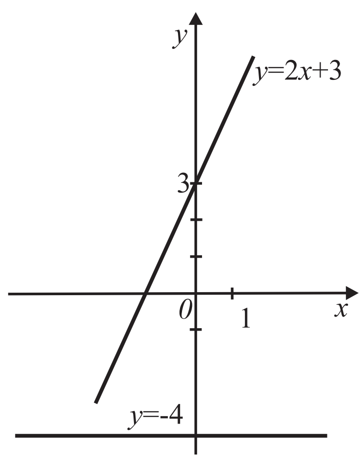
1. $y = 2x$. **3.** $y = -\frac{1}{2}x$. **5.** $y = \frac{1}{x}$.

2. $y = \frac{2}{x^2+1}$. **4.** $y = (x-1)^2-3$. **6.** $y = |x-2|$.

§3. Çyzykly funksiýa

***y = kx+b* formula bilen berilýän funksiýa çyzykly funksiýa diýilýär**, bu ýerde b – käbir san, x – argument, y – funksiýa, k san – funksiýanyň burç koeffisiýenti.

Biz $(x_0; y_0)$ nokatda $y = f(x)$ funksiýanyň grafigine galtaşýan göni çyzygyň deňlemesiniň $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ görnüşinde bolýandygyna göz ýetripdik. Bu ýerde $f'(x)=k$, $y-f'(x_0)x_0=b$ diýsek, onda ordinatalar okuny $(0; b)$ nokatda kesýän we absissisdalar oky bilen arctg$x$ burçy (bu burç okuň položitel tarapyndan sagat diliniň ters ugry boýunça hasaplanýar) emele getirýän göni çyzygyň deňlemesini alarys. Çyzykly funksiýa tekizlikde göni çyzygy aňladýar (*36-njy surat*).
Çyzykly funksiýanyň käbir häsiýetleri:



36-njy surat

1. $D(f) = R$.

2. $k \neq 0$.

3. $k > 0$ bolanda $]-\infty; +\infty[$ aralykda artýar, $k < 0$ bolanda bu aralykda kemelýär. $k = 0$ bolanda üýtgemeýär, çünki $y' = k$.

4. $y = ax+b$ funksiýanyň grafigi $y = kx$ funksiýanyň grafiginden $r(0; b)$ parallel göçürme arkaly alnan göni çyzykdyr.

Gönükmeler

1. $y = \frac{1}{2}x$ funksiýanyň grafiginden peýdalanyp aşakdaky funksiýalaryň grafigini gurmaly:

a) $y = \frac{1}{2}x + 1$; b) $y = \frac{1}{2}x - 2$; ç) $y = \frac{1}{2}x - 2{,}5$.

2. $y = kx + b$ funksiýa $M_1(2;3)$ we $M_2(-5; -4)$ nokatlaryň üstünden geçýän bolsa k, b-niň bahasyny tapmaly we funksiýanyň grafigini gurmaly.

V bap

Kwadrat deňlemeler we deňsizlikler

§1. Kwadrat üçagza we onuň kökleri

$3x^2-2x-5$ aňlatma üýtgeýän bir ululykly ikinji derejeli köpagzadyr. Şular ýaly köpagzalara kwadrat üçagza diýilýär.

Kesgitleme: ax^2+bx+c görnüşdäki köpagza $a \neq 0$ bolanda kwadrat üçagza diýilýär. Bu ýerde x – üýtgeýän ululyk, a, b, we c – käbir san. üçagzada x-iň ornuna dürli sanlary goýup bileris. Meselem:

eger $x=5$ bolsa, onda $3x^2-2x-5=60$;

eger $x = 1$ bolsa, onda $3x^2–2x–5 = –4$;

eger $x = –1$ bolsa, onda $3x^2–2x–5 = 0$;

eger $x = 2$ bolsa, onda $3x^2–2x–5 = 3$.

$x=–1$ bolanda $3x^2–2x–5$ kwadrat üçagza nola öwrülýär, şonuň üçin $x=–1$ sana bu üçagzanyň köki diýilýär.

Kwadrat üçagzanyň bahasy nola deň bolanda, üýtgeýän ululygyň bahasyna üçagzanyň köki diýilýär.

ax^2+bx+c kwadrat üçagzanyň köklerini tapmak üçin $ax^2+bx+c=0$ kwadrat deňlemäni çözmek gerek.

1-nji mysal. $3x^2–2x–5$ kwadrat üçagzanyň köklerini tapalyň. $3x^2–2x–5 = 0$ deňlemäni çözeliň. Alarys: $D = (–2)^2– 4·3·(–5) = 64$;

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} \quad x_1 = 1\frac{2}{3};\ x_2 = –1.$$

Diýmek, $3x^2–2x–5$ kwadrat üçagzanyň iki köki bar: $1\frac{2}{3}$ we –1.

ax^2+bx+c kwadrat üçagzanyň $ax^2+bx+c = 0$ kwadrat deňlemäniň kökleri ýaly kökleriniň bardygy sebäpli, onuň kwadrat deňleme ýaly iki köki, özara deň bolan köki ýa-da köksüz bolup biler. Bu $D=b^2–4ac$ kwadrat deňlemäniň diskriminantynyň alamatyna bagly, oňa hem kwadrat üçagzanyň diskriminanty diýilýär. Eger $D>0$ bolsa onda kwadrat üçagzanyň iki köki bar: eger $D=0$ bolsa, onda kwadrat üçagzanyň özara deň bolan bir köki bar; eger $D<0$ bolsa, onda kwadrat üçagzanyň kökleri ýok.

Meseleler çözülende kämahal ax^2+bx+c kwadrat üçagzany $a(x–m)^2+n$ görnüşinde (bu ýerde m we n – käbir san) bermek amatly bolýar. Şunuň ýaly özgertmä **kwadrat üçagzadan ikagzanyň kwadratyny bölüp çykarmak** diýilýär.

Bu özgertmäniň nähili ýerine ýetirilýändigini mysalda görkezeliň.

2-nji mysal. $3x^2–36x+140$ üçagzadan ikagzanyň kwadratyny bölüp çykaralyň.

3 köpeldijini ýaýyň daşyna çykaryp özgertmeleri ýerine ýetirip alarys:

$$3x^2–36x+140= 3\left(x^2 - 12x + \frac{140}{3}\right),$$

$$3\left(x^2 - 12x + \frac{140}{3}\right)=3\left(x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 6^2 - 6^2 + \frac{140}{3}\right)=$$

$$=3((x – 6)^2 + \frac{32}{3}) = 3(x – 6)^2 + 32.$$

Diýmek, $3x^2–36x+140 = 3(x–6)^2+32$.

Kwadrat üçagzadan ikagzanyň kwadratyny bölüp çykarmak bilen çözülýän meselä garalyň.

3-nji mysal. Perimetri 20 *sm* bolan gönüburçluklaryň içinde kwadratyň iň uly meýdana eýedigini subut edeliň.

Goý, gönüburçlugyň bir tarapy x-e deň bolsun. Şonda beýleki tarapy $10–x$ *sm* deň, gönüburçlugyň meýdany bolsa $x(10–x)sm^2$.

$x(10–x)$ aňlatmada ýaýlary açyp, $10x–x^2$ alarys.

$–x^2+10x$ aňlatma kwadrat üçagzany aňladýar, onda $a = -1$. $b=10$, $c=0$. Kwadrat ikagzany bölüp çykaralyň: $–x^2+10x = –(x^2–10x) = = –(x^2–10x+25–25) = –(x–5)^2+25$.

Islendik $x \neq 5$ bolanda $–(x–5)^2$ aňlatmanyň otrisateldigi sebäpli, $x=5$ bolanda $–(x–5)^2+25$ jem iň uly bahany alýar. Diýmek, gönüburçlugyň taraplarynyň biri 5 *sm* deň bolanda meýdany, iň uly meýdana eýedir. Şu halda ikinji tarap hem 5 *sm* bolýar, ýagny gönüburçlyk tarapy 5 *sm* bolan kwadrat bolýar.

Gönükme

Kwadrat üçagzanyň köklerini tapmaly:

a) $10x^2+5x–5$; b) $–2x^2+12x–18$; ç) $x^2 –2x–4$; d) $–x^2+5x–3$.

§2. Kwadrat üçagzany köpeldijilere dagytmak

Goý, $3x^2–21x+30$ kwadrat üçagzany köpeldijilere dagytmak talap edilýän bolsun. Ilki bilen 3-i ýaýyň daşyna çykaralyň. Alarys:

$3x^2–21x+30=3(x^2–7x+10)$.

$x^2–7x+10$ üçagzany köpeldijilere dagytmak üçin $–7x$-i, $–2x$ we $–5x$ bir agzalaryň jemi görnüşinde ýazalyň hem-de toparlama usulyny ulanalyň:

$x^2–7x+10=x^2–2x-5x+10=x(x–2)–5(x–2)=(x–2)(x–5)$.

Diýmek, $3x^2–21x+30=3(x–2)(x–5)$.

$x=2$ we $x=5$ bolanda $3(x–2)(x–5)$ köpeltmek hasyly nola öwrülýär, diýmek, bu halatlarda $3x^2–21x+30$ üçagza hem nola öwrülýär. Diýmek, 2 we 5 san onuň kökleridir.

Biz $3x^2 –21x+30$ kwadrat üçagzany 3 sanyň, ýagny x^2-yň koeffisiýenti hem-de çyzykly iki köpeldijiniň köpeltmek hasyly görnüşinde ýazdyk.Olaryň biri üýtgeýän x ululyk bilen bir kököň arasyndaky tapawudy, ikinji köpeldiji bolsa – üýtgeýän x ululyk bilen beýleki kököň arasyndaky tapawudy aňladýar.

Şonuň ýaly dagytmany köki bar bolan islendik kwadrat üçagza üçin alyp bolar.

***Teorema*. Eger x_1 we x_2 sanlar ax^2+bx+c kwadrat üçagzanyň kökleri bolsa, onda $ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)(x-x_2)$.**

Subudy: ax^2+bx+c köpagzadaky a köpeldijini ýaýyň daşyna çykarýarys. Alarys:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

ax^2+bx+c kwadrat üçagzanyň kökleriniň $ax^2+bx+c=0$ kwadrat deňlemäniň kökleri bolýandyklary sebäpli, Wiýetiň teoremasy boýunça

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a},$$

bu ýerden $\frac{b}{a}=-(x_1+x_2) \qquad \frac{c}{a}=x_1\cdot x_2$

Şoňa görä-de,

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x-x_1x-x_2x+x_1x_2=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=$$
$$=(x-x_1)(x-x_2).$$

Şeýlelikde, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Eger kwadrat üçagzanyň kökleri ýok bolsa, onda ony birinji derejeli köpagzalar bolýan köpeldijilere dagydyp bolmaýandygyny belläliň.

Muny subut edeliň. Goý, ax^2+bx+c üçagzanyň kökleri ýok diýeliň. Ony birinji derejeli köpagzanyň köpeltmek hasyly görnüşinde ýazyp bolýar diýip çak edeliň.

$ax^2+bx+c=(kx+m)(px+q)$.

Bu ýerde k, m, p we q käbir sanlar, özünem $k\neq 0$ we $p\neq 0$. $x=-\frac{m}{k}$ we $x=-\frac{q}{p}$ bolanda $(kx+m)(px+q)$ köpeltmek hasyly nola öwrülýär.

Diýmek, x-iň şu bahalarynda ax^2+bx+c üçagza hem nola öwrülýär, ýagny $-\frac{m}{k}$ we $-\frac{q}{p}$ sanlar onuň kökleri bolýar. Biz garşylyga geldik, sebäbi şert boýunça bu üçagzanyň kökleri ýok.

1-nji mysal. $2x^2+7x-4$ kwadrat üçagzany köpeldijilere dagydalyň.

$2x^2+7x-4=0$ deňlemäni çözüp, kwadrat üçagzanyň köklerini tapýarys. $x_1 = \frac{1}{2}$ $x_2=-4$.

Kwadrat üçagzany köpeldijilere dagytmak baradaky teorema boýunça alarys:

$2x^2+7x-4=2(x-\frac{1}{2})(x+4)$.

2 sany $x-\frac{1}{2}$ ikagza köpeldip, alnan netijäni başgaça-da ýazyp bolar:

$2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$.

2-nji mysal. $-4x^2+24x-36$ kwadrat üçagzany köpeldijilere dagydalyň.

$-4x^2+24x-36=0$ deňlemäni çözüp, üçagzanyň köklerini tapalyň: $x_1=x_2=3$.

Diýmek, $-4x^2+24x-36=-4(x-3)(x-3)$.

Ýa-da başgaça: $-4x^2+24x-36=-4(x-3)^2$.

3-nji mysal. Droby gysgaltmaly:

$$\frac{3x+2}{3x^2-13x-10}.$$

$3x^2-13-10$ kwadrat üçagzany köpeldijilere dagydalyň.

Onuň kökleri $-\frac{2}{3}$ we 5 deň. Şoňa görä-de,

$3x^2-13x-10=3\,(x+\frac{2}{3})(x-5)=(3x+2)(x-5)$.

Diýmek,

$$\frac{3x+2}{3x^2-13x-10}=\frac{3x+2}{(3x+2)(x-5)}=\frac{1}{x-5}.$$

Gönükmeler

1. Kwadrat üçagzany köpeldijilere dagytmaly:
a) $2x^2+12x-14$; b) $-m^2+5m-6$; ç) $3x^2+5x-2$; d) $6x^2-13x+6$.

2. Droby gysgaltmaly:

a) $\frac{4x+4}{3x^2+2x-1}$; ç) $\frac{2a^2-5a-3}{3a-9}$;

b) $\frac{16b-b^2}{b^2-b-12}$; d) $\frac{2y^2+7y+3}{y^2-9}$.

§3. Kwadratik funksiýa we onuň grafigi

***y=ax*²** **funksiýa, onuň grafigi we häsiýetleri**.

Geljekde biziň garap geçmeli iň möhüm funksiýalarymyzyň biri kwadratik funksiýadyr.

Kesgitleme:

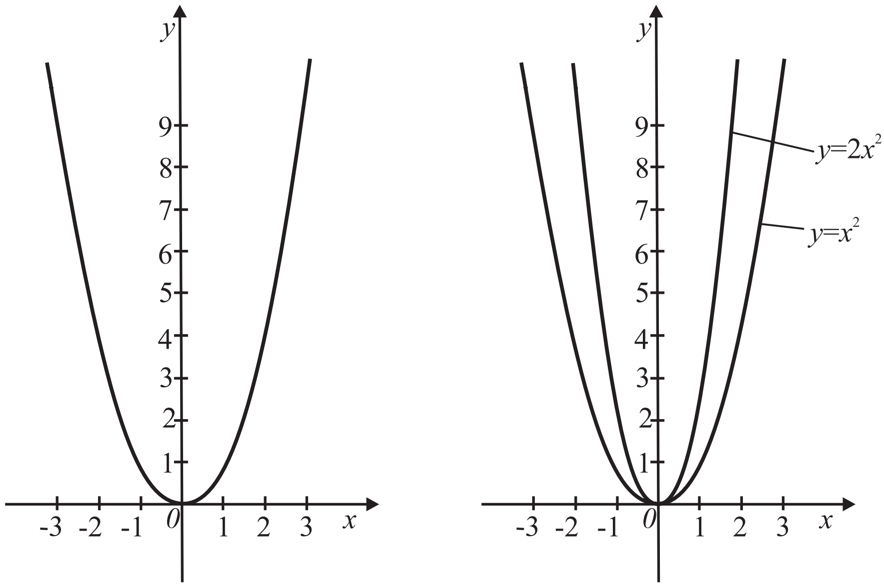
y=ax²+bx+c **görnüşli formula bilen berip bolýan funksiýa kwadratik funksiýa diýilýär, bu ýerde *x* bagly däl üýtgeýän ululyk, *a, b, c* – käbir sanlar we** $a \neq 0$**.**

Deňtizlenen hereketde ýoluň wagta baglylygy kwadratik funksiýanyň mysaly bolup biler. Eger jisim hasap başlangyjyna çenli a (m/c^2) tizlenme bilen hereket etse we t wagt hasaplanyp başlanýança ϑ_0 (m/c) tizlik bilen S_0 (m) ýol geçse, onda geçilen S ýoluň t wagta (sekunt hasabynda) baglylygy (metr hasabynda) $S = \frac{at^2}{2} = \vartheta_0 + s_0$

formula bilen aňladylýar. Eger, meselem, $a=6$, $\vartheta_0 = 5$, $s_0=20$ bolsa, onda formula şu görnüşi alar: $S=3t^2+5t+20$.

Biz kwadratik funksiýany öwrenmekligi aýratyn haldan, $y=ax^2$ funksiýadan başlaýarys.

$a=1$ bolanda $y=ax^2$ formula $y=x^2$ görnüşi alar. Funksiýanyň bahasynyň tablisasyny düzeliň:



a) b)

37-nji surat

Koordinatalary tablisada görkezilen nokatlary guralyň (*37-nji surat*). Olary endigan çyzyklar bilen birikdireliň. Eger $y=x^2$ funksiýanyň grafiginiň her bir nokadyny bu nokatdan x oka çenli uzaklyk 2 esse artar ýaly edip ýokaryk geçirsek, onda ol $y=2x^2$ funksiýanyň grafiginiň nokadyna geçýär, şonda bu grafigiň her bir nokady $y= x^2$ funksiýanyň grafiginiň käbir nokatlaryndan alnyp bilner. Başga sözler bilen aýdylanda, $y=2x^2$ funksiýanyň grafigini Ox okdan 2 esse daşlaşdyrmak (süýndürmek) arkaly $y= x^2$ paraboladan almak bolar.

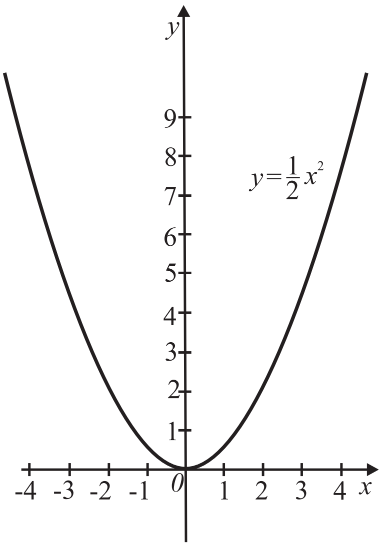
Indi $y = \frac{1}{2}x^2$ funksiýanyň grafigini guralyň. Munuň üçin onuň bahalarynyň tablisasyny düzeliň.

x	–4	–3	–	–1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

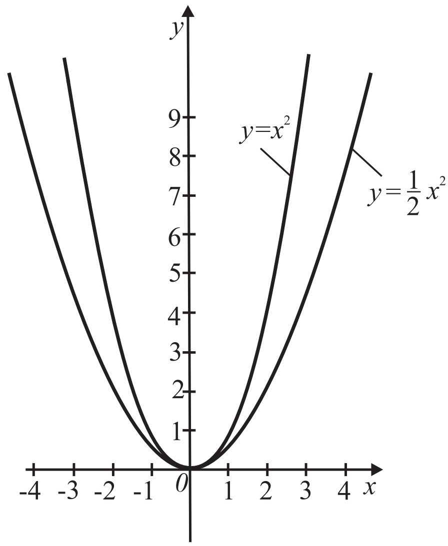
Koordinatalary tablisada görkezilen nokatlary gurup we olary endigan birikdirip, $y = \frac{1}{2}x^2$ funksiýanyň grafigini alarys (*38-nji surat*).

x islendik san bolanda $y = \frac{1}{2}x^2$ funksiýanyň bahasy $y=x^2$ funksi-

ýanyň grafiginiň her bir nokadyny bu nokatdan Ox oka çenli uzaklygy 2 esse kiçeler ýaly edip aşak geçirsek, onda ol $y = \frac{1}{2}x^2$ funksiýanyň grafiginiň



a)



b)

38-nji surat

nokadyna geçýär. Bu grafigiň her bir nokady $y= x^2$ funksiýanyň grafiginiň käbir nokatlaryndan alnyp bilner. Şeýlelikde, $y = \frac{1}{2}x^2$ funksiýanyň grafigini Ox oka 2 esse gysmak arkaly $y= x^2$ paraboladan alyp bolar.

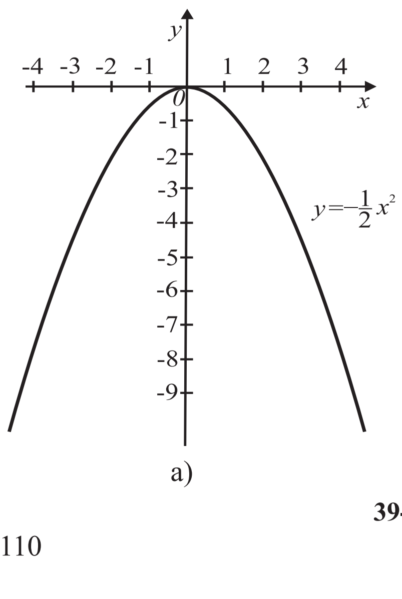
Eger $a>1$ bolsa, umuman, $y=ax^2$ funksiýanyň grafigini x oka a esse süýndirmek arkaly we eger $0< a<1$ bolsa, x oka $\frac{1}{a}$ esse gysmak arkaly $y=ax^2$ paraboladan alyp bolar.

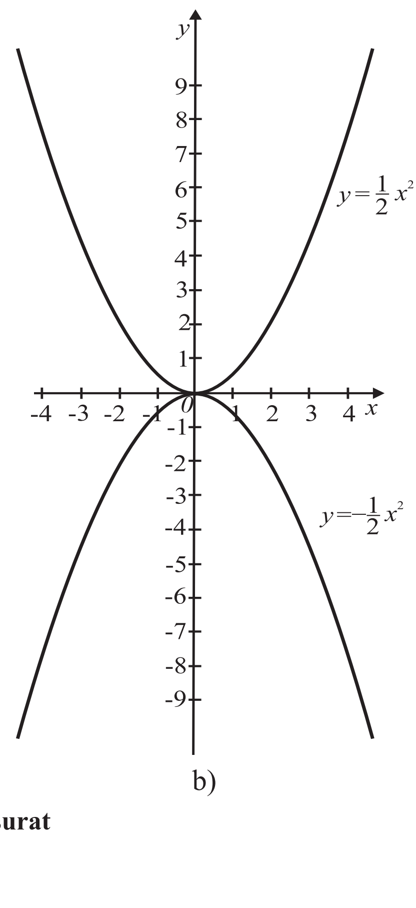
Indi $a<0$ bolanda $y=ax^2$ funksiýa garap geçeliň.

$y = -\frac{1}{2}x^2$ funksiýanyň grafigini guralyň, munuň üçin bu funksiýanyň bahalarynyň tablisasyny düzeliň:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–8	–4,5	–2	–0,5	0	–0,5	–2	–4,5	–8

Bu tablisadan peýdalanyp, $y = -\frac{1}{2}x^2$ funksiýanyň grafigini guralyň (*39-njy a surat*). x islendik bolanda bu funksiýanyň bahalary garşylykly sanlar bolýar. Diýmek, grafikleriň degişli nokatlary x oka görä simmetrikdirler. Başga sözler bilen aýdylanda, $y = -\frac{1}{2}x^2$ funksiýanyň grafigi x oka görä simmetriýanyň kömegi bilen $y = \frac{1}{2}x^2$ funksiýanyň grafiginden alnyp bilner (*39-njy b surat*).





39-njy surat

Umuman, $y = ax^2$ we $y = -ax^2$ $a \neq 0$ bolanda funksiýalaryň grafikleri x oka görä simmetrikdirler.

$y=ax^2$ funksiýanyň grafigi ýaly, bu ýerde $a\neq0$, $y=x^2$ funksiýanyň grafigine hem parabola diýilýär.

$a > 0$ bolanda $y = ax^2$ funksiýanyň häsiýetleri:

1. Eger $x = 0$ bolsa, onda $y = 0$. Diýmek, funksiýanyň grafigi koordinatalar başlangyjy arkaly geçýär.

2. Eger $x\neq0$ bolsa, $y>0$. Funksiýanyň grafigi absissa okundan ýokarky ýarym tekizlikde ýerleşendir.

3. Argumentiň garşylykly bahalaryna funksiýanyň deň bahalary degişlidir. Funksiýanyň grafigi y okuna görä simmetrikdir.

4. $(-\infty;\ 0)$ aralykda funksiýa kemelýär we $(0;\ +\infty)$ aralykda artýar.

5. Funksiýa nola deň bolanda iň kiçi bahany $x=0$ bolanda alýar, funksiýanyň iň uly bahasy bolmaýar. Funksiýanyň bahalar ýaýlasy $[0;\ +\infty)$ aralykdyr.

$a<0$ bolanda $y=ax^2$ funksiýanyň häsiýetleri:

1. Eger $x=0$ bolsa, onda $y=0$. Funksiýanyň grafigi koordinatalar başlangyjyndan geçýär.

2. Eger $x\neq0$ bolsa, onda $y<0$. Funksiýanyň grafigi aşaky ýarymtekizlikde ýerleşendir.

3. Argumentiň garşylykly bahalaryna funksiýanyň deň bahalary degişlidir. Funksiýanyň grafigi y oka görä simmetrikdir.

4. $(-\infty;\ 0]$ aralykda funksiýa artýar we $[0;\ +\infty)$ aralykda kemelýär.

5. $x=0$ bolanda funksiýa nola deň bolan iň uly bahany alýar, funksiýanyň iň kiçi bahasy ýok. Funksiýanyň bahalar ýaýlasy $(-\infty;0]$ aralyk bolýar.

Sanalyp geçilen häsiýetlerden $a> 0$ bolanda $y=ax^2$ parabolanyň şahalary ýokary, $a<0$ bolanda aşak gönükdirilendigi gelip çykýar. *Oy* ok parabolanyň simmetriýa okudyr. Parabolanyň simmetriýa oky bilen kesişme nokadyna parabolanyň depesi diýilýär. $y=ax^2$ parabolanyň depesi koordinatalar başlangyjydyr.

Ox oka görä berlen grafige simmetrik bolan grafigiň gurluşy *Ox* okdan daşlaşmagy ýa-da *Ox* oka gysylmagy – funksiýalaryň grafikleriniň özgertmeleriniň dürli görnüşleridir.

$y=ax^2$ funksiýa üçin biziň garap geçen grafiklerimiziň özgertmesi islendik funksiýa üçin ulanarlyklydyr.

Mysallardan görnuşi ýaly funksiýanyň grafigini özgertmegiň umumy shemasyna seredeliň. $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň kömegi bilen $y=kf(x)$; $y=kf(x)+b$; $y=kf(x+a)$; $y=kf(x+a)+b$ funksiýalaryň grafikleriniň alnyşyna garap geçeliň.

1. $y=kf(x)$ funksiýanyň grafigi:

a) eger $|k|>1$, onda $f(x)$ funksiýanyň grafigi k baglylykda Oy oka görä gysylýar;

b) eger $0<|k|<1$, onda $f(x)$ funksiýanyň grafigi k baglylykda Oy – oka görä ýaýraýar.

2. $y=kf(x)+b$ funksiýanyň grafigi:

a) eger $b > 0$ bolsa, onda $y=kf(x)$ funksiýanyň grafigi Oy oka görä b birlik ýokary süýşýär;

b) eger $b < 0$ bolsa, onda $y=kf(x)$ funksiýanyň grafigi b birlik aşak süýşýär.

3. $y=kf(x+a)$ funksiýanyň grafigi:

a) eger $a > 0$ bolsa, onda $y=kf(x)$ funksiýanyň grafigi Ox oka görä a birlik çepe süýşýär;

b) eger $a < 0$ bolsa, onda $y=kf(x)$ funksiýanyň grafigi Ox oka görä a birlik saga süýşýär.

4. $y=kf(x+a)+b$ funksiýanyň grafigi:

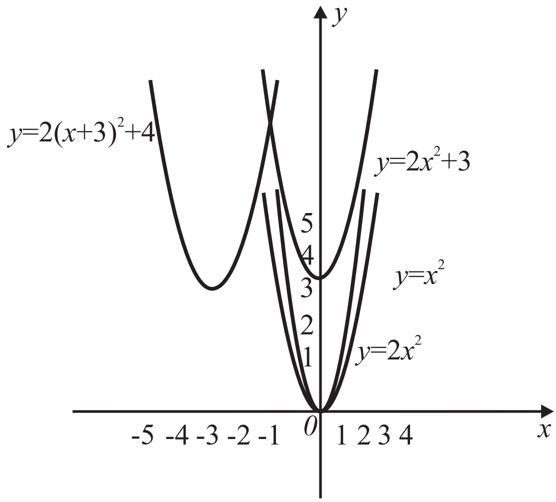
a) eger $a > 0$; $b > 0$ bolsa, onda $y=kf(x)$ funksiýanyň grafigi Ox oka görä a birlik çepe, b birlik Oy oka görä ýokaryk süýşýär;

b) eger $a > 0$; $b < 0$ bolsa, onda $y=kf(x)$ funksiýanyň grafigi Ox oka görä a birlik çepe, b birlik Oy oka görä aşak süýşýär;

ç) eger $a < 0$; $b > 0$ bolsa, onda $y=kf(x)$ funksiýanyň grafigi Ox oka görä a birlik saga, b birlik Oy oka görä ýokaryk süýşýär;

d) eger $a < 0$; $b < 0$ bolsa, onda $y=kf(x)$ funksiýanyň grafigi Ox oka görä a birlik saga, b birlik Oy oka görä aşak süýşýär.

$y= x^2$ funksiýanyň grafigini özgertmek bilen $y=2(x+a)^2+4$ funksiýanyň grafigini guralyň (*40-njy surat*).



40-njy surat

Gönükmeler

1. $y = x^2$ parabolanyň ülňüsini peýdalanyp, funksiýanyň grafigini gurmaly:

a) $y = x^2 - 4$; c) $y = (x+4)^2$;

b) $y = -x^2 - 1$; d) $y = -(x-3)^2$.

2. Funksiýanyň grafigini gurmaly:

a) $y = \frac{1}{4}(x+3)^2 - 3$; b) $y = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + 3$.

3. Funksiýanyň grafigini gurmaly:

a) $y = x^2 - 4x + 4$; b) $y = -x^2 + 6x - 9$.

§4. Kwadrat deňleme

Doly däl kwadrat deňlemeler

Kesgitleme. $ax^2+bx+c=0$ görnüşdäki deňlemelere kwadrat deňlemeler diýilýär, bu ýerde x – üýtgeýän ululyk, a, b we c – käbir sanlar, özem $a \neq 0$. a, b we c sanlar – kwadrat deňlemäniň koeffisiýentleri, *a* sana birinji koeffisiýent, *b* sana ikinji koeffisiýent we *c* sana azat agza diýilýär. Kwadrat deňlemä ikinji derejeli deňleme diýilýär, çünki onuň çep bölegi ikinji derejeli köpagzadyr. Eger $ax^2+bx+c=0$ kwadrat deňlemede *b* we *c* koeffisiýentleriň iň bolmanda biri nola deň bolsa, onda şonuň ýaly deňlemä doly däl kwadrat deňleme diýilýär.

Meselem, $-2x^2+7=0$, $3x^2-10x=0$ we $-4x^2=0$ deňlemeler doly däl kwadrat deňlemelerdir. Olaryň birinjisiňde $b=0$, ikinjisinde $c=0$, üçünjisinde $b=0$ we $c=0$. Doly däl kwadrat deňlemeleriň üç görnüşi bardyr:

1) $ax^2+c=0$, bu ýerde $c\neq0$;

2) $ax^2+bx=0$;

3) $ax^2=0$.

Şu görnüşdäki deňlemeleriň her biriniň çözülişine garalyň.

1-nji mysal. $-3x^2+15=0$ deňlemäni çözmeli.

Azat agzany deňlemäniň sag bölegine geçireliň we emele gelen deňlemäniň iki bölegini hem 3-e böleliň:

$-3x^2=-15$, $x^2=5$, $x=\sqrt{5}$ ýa-da $x=-\sqrt{5}$.

2-nji mysal. $4x^2+3=0$ deňlemäni çözmeli.

Azat agzany deňlemäniň sag bölegine geçireliň we emele gelen deňlemäniň iki bölegini hem 4-e böleliň: $4x^2=-3$; $x^2=-\frac{3}{4}$.

Sanyň kwadratynyň otrisatel san bolandygy üçin, emele gelen deňlemäniň kökleri ýokdur. Diýmek, oňa deňgüýçli bolan $4x^2+3=0$ deňlemäniň hem köki ýokdur.

Jogaby: kökleri ýok.

Umuman, $c\neq0$ bolanda $ax^2+c=0$ görnüşli doly däl kwadrat deňlemäni çözmek üçin, onuň azat agzasyny sag bölege geçirýärler we iki bölegi hem *a* bölýärler. $ax^2+c= c$ deňlemä deňgüýçli bolan $x^2=-\frac{c}{a}$ deňlemäni alýarlar. $c\neq0$ bolýandygy üçin, $-\frac{c}{a}\neq0$.

Eger $-\frac{c}{a}>0$ bolsa, onda deňlemäniň iki köki bardyr: $x_1=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ we $x_2=\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Eger $-\frac{c}{a}<0$ bolsa, onda deňlemäniň kökleri ýokdur.

3-nji mysal. $4x^2+9x=0$ deňlemäni çözmeli.

Deňlemäniň çep bölegini köpeldijilere dagydalyň: $x(4x+9)=0$.

Bu ýerden $x=0$ ýa-da $4x+9=0$ $4x+9=0$ deňlemäni çözeliň: $4x=-9$; $x=-2\frac{1}{2}$. *Jogaby*: $x_1=0$; $x_2=-2\frac{1}{2}$.

Umuman, $b\neq0$ bolanda, $ax^2+bx=0$ görnüşli doly däl kwadrat deňlemäni çözmek üçin, onuň çep bölegini köpeldijilere dagydyp we $x(ax+b)=0$ deňlemäni alarys. $x(ax+b)=0$ köpeltmek hasyly, haçanda köpeldijileriň iň bolmanda biri nola deň bolanda we diňe şonda nola deňdir: $x=0$ ýa-da $ax+b=0$; $ax+b=0$ deňlemäni çözüp, taparys: $ax=-b$; $x=-\frac{b}{a}$, bu ýerde $a\neq0$.

Şeýlelikde, $x(ax+b)$ köpeltmek hasyly $x=0$ bolanda we $x=-\frac{b}{a}$ bolanda nola öwrülýär. Şoňa görä-de, 0 we $-\frac{b}{a}$ sanlar $ax^2+bx=0$ deňlemäniň kökleridir.

Diýmek, $b\neq0$ bolanda, $ax^2+bx=0$ görnüşli doly däl kwadrat deňlemäniň hemişe iki köki bardyr. $ax^2=0$ görnüşli doly däl kwadrat deňleme $x^2=0$ deňlemä deňgüýçlüdir we şoňa görä-de ýeke-täk 0 köki bardyr.

Gönükmeler

Deňlemäni çözmeli.

1. $16x^2-25=0$. **3.** $10-0{,}1x^2=0$. **5.** $5x^2-4x=0$.

2. $2a^2+3a=0$. **4.** $6x-5x^2=0$. **6.** $2x+x^2=0$.

§5. Kwadrat deňlemeleriň formula boýunça çözülişi

Iki agzanyň kwadratyny bölüp çykarmak bilen kwadrat deňlemeleriň çözülişi tagaşyksyz özgertmelere getirýär. Şoňa görä-de, kwadrat deňlemeleriň çözülişine başgaça çemeleşýärler. Deňlemäni umumy görnüşde çözýärler we netijede, kökleriň formulasy alynýar. Soňra ol formulany islendik kwadrat deňleme çözülende ulanylýar.

$ax^2+bx+c=0$ (1) kwadrat deňlemäni çözeliň. Onuň iki bölegini-de a bölüp, oňa deňgüýçli bolan $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, getirilen kwadrat deňlemäni alýarys. Ol deňlemäni özgerdeliň:

$$x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a} \qquad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \tag{2}$$

(2) deňleme (1) deňlemä deňgüýçlüdir. Onuň kökleriniň sany $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ drobuň alamatyna baglydyr, $a\neq 0$ bolýandygy üçin, $4a^2$ položitel sandyr, şoňa görä-de, ol drobuň alamaty onuň sanawjysynyň, ýagny $b^2–4ac$ aňlatmanyň alamaty bilen kesgitlenýär. Ol aňlatma $ax^2+bx+c=0$ kwadrat deňlemäniň diskriminanty diýilýär („diskriminant“ latynça-tapawutlandyryjy). Ol D harp bilen belgilenýär, ýagny $D=b^2–4ac$.

(2) deňlemäni $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}$ görnüşde ýazalyň. Indi D-e baglylykda mümkin bolan dürli hallara garalyň.

1) Eger $D>0$ bolsa, onda

$$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ ýa-da } x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{D}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ ýa-da } x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \text{ ýa-da } x = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Şeýlelik bilen, şu halda (1) deňlemäniň iki köki bolýar:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \text{ we } x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Aşakdaky gysgaça ýazgy kabul edilendir:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ bu ýerde } D=b^2-4ac$$

Muňa kwadrat deňlemäniň kökleriniň formulasy diýýärler.

2) Eger $D=0$ bolsa, onda (2) deňleme aşakdaky görnüşi alýar: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$

Bu ýerden $x+\frac{b}{2a}=0$; $x=-\frac{b}{2a}$.

Bu halda (1) deňlemäniň $-\frac{b}{2a}$ deň bolan bir köki bardyr.

Kwadrat deňlemäniň kökleriniň formulasyndan şu halda hem peýdalanmak bolar. Hakykatdan-da, $D=0$ bolanda ol formula aşakdaky görnüşi alýar: $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=-\frac{b}{2a}$.

3) Eger $D<0$ bolsa, onda $\frac{D}{4a^2}$ drobuň bahasy otrisateldir we şoňa görä-de $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{2a}$ deňlemäniň, diýmek, oňa deňgüýçli bolan (1) deňlemäniň hem köki ýokdur.

Şeýlelik bilen, diskriminanta baglylykda kwadrat deňlemäniň iki köki ($D>0$ bolanda), bir köki ($D=0$ bolanda) bolup biler ýa-da kökleri bolup bilmez ($D<0$ bolanda).

Kwadrat deňleme (1) formula boýunça çözülende aşakdaky ýaly girişmek maksadalaýykdyr:

1. Diskriminanty hasaplamaly we ony nol bilen deňeşdirmeli.

2. Eger diskriminant položitel ýa-da nola deň bolsa, onda kökleriň formulasyndan peýdalanmaly, eger diskriminant otrisatel bolsa, onda hakyky kökler ýok diýip ýazmaly.

1-nji mysal. $12x^2+7x+1=0$ deňlemäni çözmeli.

Diskriminanty tapalyň:

$$D=7^2-4\cdot12\cdot1=1,\ D>0,\ x=\frac{-7\pm1}{24}.$$

Jogaby: $x_1=-\frac{1}{3};\ x_2=-\frac{1}{4}.$

2-nji mysal. $x^2-12x+36=0$ deňlemäni çözmeli.

$$D=(-12)^2-4\cdot1\cdot36=0,\ x=\frac{12\pm0}{2}.$$

Jogaby: 6.

3-nji mysal. $7x^2-25x+23=0$ deňlemäni çözmeli.

Alarys: $D=(-25)^2-4\cdot7\cdot23=625-644,\ D<0.$

Jogaby: kökleri ýok.

Ikinji koeffisiýenti jübüt san bolan kwadrat deňlemeler üçin kökleriň formulasyny başga görnüşde ýazmak amatlydyr

$ax^2+2kx+c=0;\ D=4k^2-4ac=4(k^2-ac)=4D_1$

$$x=\frac{-2k\pm\sqrt{4D_1}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{D_1}}{a}$$ bu ýerde $D_1=k^2-ac$.

Eger $D_1<0$ bolsa, onda deňlemäniň kökleri ýokdur.

4-nij mysal. $9x^2-14x+5=0$ deňlemäni çözmeli

$$D_1=(-7)^2-9\cdot5=4,\ x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{4}}{9}.$$

Jogaby: $x_1=\frac{5}{9};\quad x_2=1.$

Gönükmeler

Deňlemäni çözmeli (1-5).

1. $x^2+11x+9=0$.

2. $9x^2-2=5x^2$.

3. $(x+1)^2=10x^2+17$.

4. $\dfrac{x(x-7)}{3}-1=\dfrac{11x}{10}-\dfrac{x-4}{3}$.

5. $\dfrac{5x-x^2}{3}-\dfrac{(5x-11)^2}{4}=6-\dfrac{(7-x)^2}{2}$.

6. c-niň haýsy bahasynda:

a) $x^2+3x+c=0$ deňlemäniň deň köki bar;

b) $3x^2+x-c=0$ deňlemäniň dürli hakyky köki bar;

ç) $x^2-2x+3c=0$ deňlemäniň köki ýok?

§6. Kwadrat deňlemeleri çözmegiň grafiki usuly

$y=ax^2+bx+c$ kwadrat funksiýanyň nollarynyň $ax^2+bx+c=0$ deňlemäniň kökleri bolýandygy bize belli. Şoňa esaslanyp, kwadrat deňlemäniň köklerini grafiki usul bilen hem tapyp bolar.

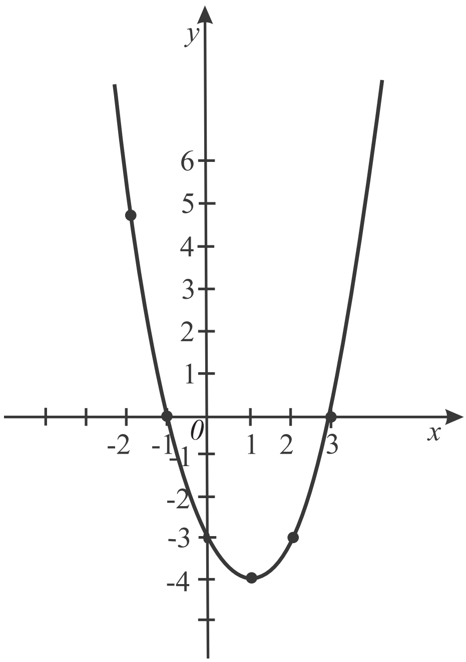
Analitik (formula) usul bilen çözülende çylşyrymly hasaplamalara getirýän kwadrat deňlemeleriň köklerini grafiki usul bilen tapmak örän amatlydyr.

1-nji mysal.

$x^2-2x-3=0$ deňlemäni grafiki usul bilen çözmeli.

$y=x^2-2x-3$ kwadrat funksiýanyň grafigini guralyň (*41-nji surat*).

x	–2	–1	0	1	2	3
y	5	0	–3	–4	–3	0



41-nji surat

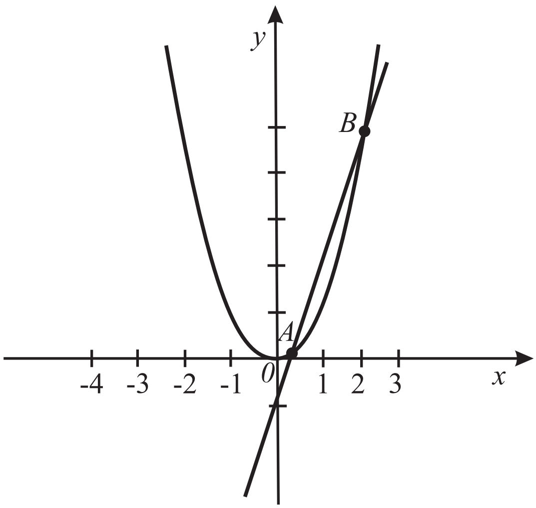
Çyzgydan görnüşi ýaly, bu parabola absissalar okuny $A(-1;0)$ we $B(3;0)$ nokatlarda kesip geçýär. $x=-1$ we $x=3$ bolanda, $y=0$ bolýandygy sebäpli, bu sanlar $y=x^2-2x-3$ funksiýanyň nollarydyr. Diýmek, $x_1=-1$ we $x_2=3$ sanlar $x^2-2x-3=0$ kwadrat deňlemäniň kökleridir.

Eger $y=ax^2+bx+c$ parabola absissalar okuna galtaşýan bolsa, ýagny olaryň ýeke-täk umumy nokady bar bolsa, onda $ax^2+bx+c=0$ kwadrat deňlemäniň gabat gelýän kökleri bolar (deňlemäniň ýeke-täk köki bar hem diýilýär).

Eger-de $y=ax^2+bx+c$ parabolanyň absissalar oky bilen umumy nokady ýok bolsa, onda $ax^2+bx+c=0$ kwadrat deňlemäniň hakyky kökleri ýokdur. Kwadrat deňlemäni grafiki usul bilen çözmegiň ýene bir görnüşine seredeliň.

2-nji mysal. $x^2-2,5x+0,25=0$ deňlemäni grafiki usul bilen çözmeli.

Berlen deňlemäni oňa deňgüýçli bolan $x^2=2,5x-0,25$ görnüşde ýazalyň we bu deňligiň çep bölegindäki aňlatmany y_1 harpy bilen, sag bölegindäki aňlatmany bolsa y_2 harpy bilen belgiläliň. Soňra bir çyzgyda $y_1 = x^2$ we $y_2 = 2,5x – 0,25$ funksiýalaryň grafiklerini guralyň (*42-nji surat*).



42-nji surat

Çyzgydan görnüşi ýaly, bu grafikler A we B nokatlarda kesişýärler, ýagny bu nokatlarda y_1 we y_2 funksiýalar deň bahalara eýe bolýarlar. Diýmek, bu nokatlaryň absissalary $x^2 – 2,5\,x + 0,25 = 0$ deňlemäniň kökleri bolar. A nokadyň absissasynyň takmynan 0,1-e, B nokadyň absissasynyň bolsa, takmynan 2,4-e deň bolýandygyny görmek bolýar. Onda berlen kwadrat deňlemäniň kökleriniň takmynan bahalary $x_1 \approx 0,1$ we $x_2 \approx 2,4$ bolar.

Gurlan grafikleriň takyklygy ýokary boldugyça tapylan kökleriň takyklyk derejesi hem ýokary bolar. $y_1 = x^2$ we $y_2 = 2,5x – 0,25$ funksiýalaryň grafiklerini gurmagyň $y = x^2 – 2,5x + 0,25$ parabolany gurmakdan aňsatdygyna göz ýetirmek kyn däldir. Şol sebäpli, kwadrat deňlemäni şu görnüşli usul bilen çözmek amatlydyr.

Eger $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ görnüşli deňlemäni grafiki usul bilen çözmek gerek bolsa, onda ony berlen deňlemä deňgüýçli bolan

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

görnüşe getirip, 2-nji mysalda beýan edilen usuly ulanmak has amatlydyr.

Gönükmeler

Kwadrat deňlemäni grafiki usul bilen çözmeli.

1. $\frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$. **3.** $x^2–4x+4=0$. **5.** $–4(x–2)^2+1 =0$.

2. $–3x^2–5 =0$. **4.** $2(x+1)^2–8 =0$. **6.** $x^2–x+1,3=0$.

§7. Kwadrat deňlemeleri düzmek arkaly meseleleri çözmek

Matematikanyň, fizikanyň, tehnikanyň köp meseleleri kwadrat deňlemeleriň kömegi bilen çözülýär.

1-nji mysal. Bir tarapy beýlekisinden 5 *m* uly bolan gönüburçlugyň meýdany 84 m^2 bolsa, onuň taraplaryny tapyň.

Çözülişi. Goý, gönüburçlugyň bir tarapy *x m* bolsun. Onda onuň beýleki tarapy

$(x +5)$ *m* bolar. Şerte görä:

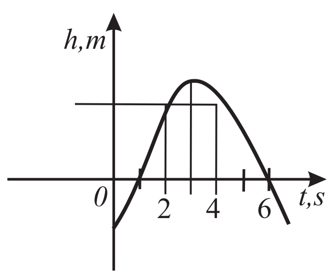
$x(x+5) = 84$.

Alnan deňlemeleri ýönekeýleşdireliň:

$x^2 + 5x – 84 = 0$.

Bu deňlemäni çözüp, $x_1 =–12$, $x_2 = 7$ bahalary tapýarys. Meseläniň şertine görä x-iň bahasy položitel san bolmaly. x=7 bolanda bu şert kanagatlandyrylýar. Onda gönüburçlugyň bir tarapy 7 *m*, beýleki tarapy bolsa 7 + 5 = 12 *m* bolar. *Jogaby:* 7 *m*, 12 *m*.

2-nji mysal. Jisim 30 *m/s* başlangyç tizlik bilen dik ýokary zyňlypdyr. Ol näçe sekuntdan soň 40 *m* beýiklikde bolar?



43-nji surat

Çözülişi. Fizika dersinden belli bolşy ýaly, dik ýokaryk zyňlan jisimiň t sekuntdan soň galýan *h* beýikligi

$$h = v_0t - \frac{gt^2}{2}$$

formula bilen tapylýar. Bu ýerde υ_0 *m/s* hasabyndaky başlangyç tizlik, *g* – bahasy, takmynan 10 m/s^2 bolan ýokardan erkin gaçma tizlenmesi.

Ýokardaky formulada h=40 *m*, υ_0 = 30 *m/s* bahalary ornuna goýup alarys:

$$40=30t-5t^2.$$

Bu ýerden

$$5t^2-30t+40=0$$

$$t^2-6t+8=0.$$

Bu kwadrat deňlemäni çözüp, t_1=2, t_2=4 bahalary taparys.

Tapylan kökleriň manysyna düşünmek üçin $h=30t-5t^2$ baglylygyň grafigine seredeliň.

43-nji suratdaky grafikden görnüşi ýaly, zyňlan jisim ilkinji 3 sekundyň dowamynda 45 *m* çenli ýokaryk galýar, soňra bolsa ol aşaklap, 6 sekuntdan soň ýere düşýär.

Şeýlelikde, jisim zyňlandan 2 sekuntdan we 4 sekuntdan soň ýerden 40 *m* beýiklikde bolýar.

Jogaby: jisim zyňlandan 2 sekuntdan we 4 sekuntdan soň 40 *m* beýiklikde bolar.

3-nji mysal. Gaýyk derýa boýunça akymyň garşysyna 22,5 *km* we akymyň ugruna 28,5 *km* geçýär, ähli ýola 8 *sag* wagt sarp edýär. Akymyň tizligi 2,5 *km/sag*. Gaýygyň hususy tizligini tapmaly (gaýygyň ýata suwdaky tizligini tapmaly).

Çözülişi. *x km/sag* gaýygyň hususy tizligi bolsun. Onda gaýygyň akymyň ugruna tizligi (x+2,5)*km/sag*, akymyň garşysyna tizligi (x–2,5)*km/sag* bolar. Akymyň garşysyna sarp eden wagty $\frac{22,5}{x+2,5}$ *sag* bolar. Meseläniň şertine görä ähli ýola 8 *sag* sarp edilendigi üçin

$$\frac{22,5}{x-2,5} + \frac{28,5}{x+2,5} = 8 \text{ ýa-da } \frac{45}{2x-5} + \frac{57}{2x+5} = 8.$$

Ýönekeýleşdirip alarys: $8x^2-51x-35=0$ deňlemäni çözüp kökleri taparys:

$x_1=-\frac{7}{8}$; $x_2=7$.

Jogaby: 7 km/sag.

4-nji mysal. 60 tonna ýüki çekmek üçin birnäçe maşyn gerekdi. Her bir maşyna ýüklenmelisinden 0,5 tonna kem ýüklenendigi sebäpli, ýene-de 4 maşyn goşmaça almaly boldy. Ilkibaşda näçe maşyn ulanmak göz öňünde tutulypdyr?

Çözülişi. Goý, x maşyn meýilleşdirilen bolsun, onda $\frac{60}{x}$ tonna ýüki çekýän maşyn gerek bolar. Meseläniň şertine görä:

$$\frac{60}{x}-0,5=\frac{60}{x+4}$$

$120(x+4)-(x+4)x=120x$

$120x+480-x^2-4x-120x=0$

$-x^2-4x+480=0$ (-1)-e köpeldip alýarys:

$x^2+4x-480=0$

$a=1$; $b=4$; $c=-480$; $k=\frac{b}{2}=\frac{4}{2}=2$

$\frac{D}{4}=K^2-ac=2^2-1\cdot(-480)=4+480=484$

$\frac{D}{4}=484$; $484>0$.

Diýmek, $\frac{D}{4}>0$. Onda (iki köki bar).

$$x_{1.2}=\frac{K\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}=-2\pm\sqrt{484}=-2+22$$

$x_1=-2+(-22)=-24<0$ (kanagatlandyrmaýar)

$x_2=-2+22=22-2=20$

Jogaby: 20 maşyn.

Gönükmeler

1. Jisim 40 *km/sek* başlangyç tizlik bilen wertikal ýokaryk zyňylypdyr. Jisim näçe sekuntdan soň 60 *m* beýiklikde bolar?

Jogaby: 2 *s* we 6 *s*.

2. Motorly gaýyk derýanyň akymynyň ugruna 42 *km* we akymyň garşysyna 20 *km* ýoly 5 sagatda geçdi. Eger derýanyň akyş tizligi 2 *km/ sag* bolsa, gaýygyň ýata suwdaky tizligini tapmaly.

Jogaby: 12 *km/sag*.

3. Gönüburçly üçburçlugyň katetleri 8:15 ýaly gatnaşýar, gipotenuza bolsa 6,8 *m*. Üçburçlugyň meýdanyny tapmaly.

Jogaby: 9,6 m^2.

§8. Drobly rasional deňlemeleri çözmek

$2x+5=3(8-x)$; $\quad x-\dfrac{5}{x}=-3x+19$; $\quad \dfrac{x-4}{2x+1}=\dfrac{x-9}{x}$

deňlemeleriň çep we sag bölekleri rasional aňlatmalardyr. Şeýle deňlemelere rasional deňlemeler diýilýär. Çep we sag bölekleri bitin aňlatmalar bolan deňlemä bitin rasional deňleme diýilýär. Çep ýa-da sag bölegi drob aňlatmalar bolan rasional deňlemä drobly rasional deňleme diýilýär. Meselem, $2x+5=3(8-x)$ deňleme bitin rasional deňlemedir, $x-\dfrac{5}{x}=-3x+19$ we $\dfrac{x-4}{2x+1}=\dfrac{x-9}{x}$ deňlemeler – drobly rasional deňlemelerdir. Drob rasional deňlemeler çözülende aşakdaky usuldan peýdalanmak maksada laýykdyr:

1) deňlemä girýän droblaryň umumy maýdalawjysyny tapmaly;

2) deňlemäniň iki bölegini-de umumy maýdalawja köpeltmeli;

3) emele gelen bitin deňlemäni çözmeli;

4) onuň köklerinden umumy maýdalawjyny nola öwürýänlerini aýyrmaly.

1-nji mysal. $\frac{x-1}{2}+\frac{2x}{3}=\frac{5x}{6}$ bitin deňlemäni çözmeli.

Deňlemäniň iki böleginde oňa girýän droblaryň iň kiçi umumy maýdalawjysyna, ýagny 6 sana köpeldeliň. Berlen deňlemä deňgüýçli bolan drobsuz deňleme alarys:

$3(x–1)+4x=5x$, $3x–3+4x=5x$, $7x–5x=3$, $2x=3$, $x=1,5$.

Jogaby: $x=1,5$.

2-nji mysal. Drobly rasional deňlemäni çözmeli.

$$\frac{x-3}{x-5}+\frac{1}{x}=\frac{x+5}{x(x-5)} \tag{1}$$

Deňlemäniň iki bölegini-de droblaryň umumy maýdalawjysyna, ýagny $x(x–5)$ aňlatma köpeldeliň. Aşakdaky bitin deňlemäni alarys:

$$x(x–3)+x–5=x+5 \tag{2}$$

(1) deňlemäniň her bir köküniň (2) deňlemäniň köki bolýandygy düşnüklidir. Emma (2) deňleme (1) deňlemä deňgüýçli bolman hem biler, çünki biz onuň iki bölegini-de noldan tapawutly sana köpeltmän, eýsem üýtgeýän ululykly aňlatma köpeltdik, ol bolsa nola hem öwrülip biler. Şoňa görä (2) deňlemäniň her bir köki hökman (1) deňlemäniň köki bolup bilmez. (2) deňlemäni çözeliň:

$x^2–3x+x–5=x+5$, $x^2–3x–10=0$, $x_1=–2$; $x_2=5$ sanlary alarys.

Bu kökleri (1) deňlemede ornuna goýup barlalyň. $x=–2$ bolanda $x(x–5)$ umumy maýdalawjy nola öwrülmeýär. Diýmek, –2 san (1) deňlemäniň köküdir.

$x=5$ bolanda umumy maýdalawjy nola öwrülýär we $\frac{x-3}{x-5}$, $\frac{x+5}{x(x-5)}$ aňlatmalar manysyny ýitirýär. Şoňa görä-de, 5 san (1) deňlemäniň köki däldir.

Jogaby: $x=–2$.

3-nji mysal. $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}=\frac{4-x}{x^2+2x}$ deňlemäni çözmeli.

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x(x-2)}=\frac{4-x}{x(x+2)}.$$

Droblaryň umumy maýdalawjysy: $x(x-2)(x+2)$.

$2x-(x+2)=(x-2)(4-x)$, $2x-x-2=4x-x^2-8+2x$, $x^2-5x+6=0$, $x_1=2$; $x_2=3$.

Eger $x=2$ bolsa, $x(x-2)(x+3)=0$;

eger $x=3$ bolsa, $x(x-2)(x+3)\neq0$.

Jogaby: $x=3$.

Gönükmeler

Deňlemäni çözmeli.

1. $\frac{8}{x^3-4x}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x}.$

2. $\frac{18}{4x^2+4x+1}-\frac{1}{2x^2-x}=\frac{6}{4x^2-1}.$

3. $\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2-1}=0.$

4. $\frac{4}{9x^2-1}+\frac{1}{3x^2-x}=\frac{4}{9x^2-6x+1}.$

§9. Rasional deňlemeleriň kömegi bilen meseleleriň çözülişi

Köp meseleleriň çözülişi drob rasional deňlemelere getirilýär.

1-nji mesele. Motorly gaýyk derýanyň akymynyň ugruna 25 *km* we akymyň garşysyna 3 *km* geçipdir, şonda ähli ýola 2 *sag* sarp edipdir. Eger derýanyň akyş tizligi 3 *km/sag* bolsa, gaýygyň ýata suwdaky tizligi näçe?

Ç ö z ü l i ş i.

Goý, x *km/sag* – gaýygyň ýata suwdaky tizligi bolsun. Şonda gaýygyň tizligi akymyň ugruna (x+3) *km/sag*, akymyň garşysyna bolsa (x–3) *km/sag* bolar. Gaýyk akymyň ugruna 25 *km* geçipdir we şol ýola $\frac{25}{x+3}$ sag sarp edipdir, akymyň garşysyna

3 *km* geçipdir we $\frac{3}{x-3}$ sag sarp edipdir. Diýmek, ähli ýola sarp edilen wagt $\left(\frac{25}{x+3}+\frac{3}{x-3}\right)$ sagada deň. Meseläniň şertine görä gaýyk ähli ýola 2 *sag* sarp edipdir. Diýmek, $\frac{25}{x+3}+\frac{3}{x-3}=2$. Bu deňlemäni çözüp, onuň köklerini taparys: x_1=12, x_2=2.

Jogaby: 12 *km/sag*.

2 - n j i m e s e l e. Daýhan kärendesine alan ýerinden 875 sentner bugdaý ýygnady. Başga bir kärendeçi her gektaryň hasyllylygyny birinji daýhanyňka garanda 5 sentner artdyrmagyň hötdesinden gelip, ýeriniň onuňkydan 2 *ga* azlygyna garamazdan, 920 sentner bugdaý hasylyny ýygnady. Daýhanlar her gektardan näçe sentner bugdaý hasylyny ýygnapdyrlar?

Ç ö z ü l i ş i.

Birinji daýhan her gektardan x sentner bugdaý ýygnapdyr diýeliň. Onda beýleki daýhanyň her gektardan alan hasyly (x+5) sentner bolar. Birinji daýhan jemi 875 sentner hasyl ýygnan bolsa, onuň kärendesine alan ýeri $\frac{875}{x}$ *ga* bolar. Ikinji daýhanyň ýeri bolsa $\frac{920}{x+5}$ *ga* bolar. Şerte görä ikinji daýhanyň ýeri birinjiniň ýerinden 2 *ga* azdyr: $\frac{920}{x+5}=\frac{875}{x}-2$. Bu deňlemäni ýönekeýleşdirip alarys: $2x^2+55x-4375=0$. Onuň kökleri: x_1=35 we $x_2=-\frac{125}{2}$ sanlardyr. $-\frac{125}{2}$ san meseläniň şertini kanagatlandyrmaýar. Onda x=35 bolar. Birinji daýhan her gektardan 35 sentner, ikinji bolsa, 40 sentner hasyl alypdyr.

Gönükmeler

1. Gysgalmaýan ady drobyň sanawjysy onuň maýdalawjysyndan 5 san kiçi. Eger ol drobyň sanawjysy 2 san kiçeldilip, maýdalawjysy 16 san ulaldylsa, onda drob $\frac{1}{3}$ san kiçeler. Ol droby tapyň.

2. Şäherden uzaklygy 120 *km* bolan oba tarap bir wagtda iki awtomobil ugrapdyr. Biriniň tizligi beýlekisiniň tizliginden 20 *km/sag* uly bolupdyr, şoňa görä-de, ol barmaly ýerine 1 *sag* öň gelipdir. Her awtomobiliň tizligini tapmaly.

3. Welosipedçi *A* şäherden *B* şähere ugrapdyr. 1 *sag* 36 minutdan soň onuň yzyndan motosikletçi ugrapdyr we *B* şähere welosipedçi bilen bir wagtda gelipdir. Eger welosipedçiniň tizligi motosikletçiniňkiden 32 *km/sag* az, şäherleriň arasyndaky uzaklyk 45 *km* bosa, onda welosipedçiniň tizligini tapyň.

4. Syýahatçylaryň biri 20 *km* uzaklygy beýlekisinden 20 *min* çalt geçipdir. Syýahatçylaryň biri beýlekisinden 2 *km/sag* uly tizlik bilen gidendigini bilip, olaryň her biriniň tizligini tapyň.

5. Iki awtomobil bir wagtda bir şäherden beýleki şähere ugraýarlar. Birinjiniň tizligi ikinjiniň tizliginden 10 *km/sag* uly, şoňa görä-de birinji awtomobil barmaly ýerine ikinjiden 1 *sag* öň gelipdir. Şäherleriň arasyndaky uzaklygyň 560 *km*-e deňdigini bilip, her awtomobiliň tizligini tapyň.

6. Syýahatçy derýadan gaýyk bilen akymyň garşysyna 6 *km* we kölde 15 *km* ýüzüp geçipdir, özünem kölde geçen ýoluna derýada geçen ýoluna garanda 1 *sag* köp sarp edipdir. Derýanyň akyş tizliginiň 2 *km/sag* deňdigini bilip, gaýygyň köldäki tizligini tapyň.

§10. Biri birinji, beýlekisi ikinji derejeli bolan iki näbellili iki deňlemeler ulgamyny çözmek

Şeýle ulgamlar umumy görnüşde aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ly + k = 0, \\ lx + my + n = 0. \end{cases}$$

Bu görnüşli ulgamlary aşakdaky usulda çözmek bolar.

1-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözmeli:

$$\begin{cases} x^2-5xy+3y^2+2x-y-2=0, \\ 2x-y=1. \end{cases} \qquad (1)$$

Bu ulgamynyň ikinji deňlemesinden y=2x–1 tapyp, 1-nji deňlemede ornuna goýmaly

$x^2-5x(2x-1)+3(2x-1)^2+2x-(2x-1)-2=0$

Birnäçe özgertmelerden soň $3x^2-7x+2=0$ deňleme alarys. Bu deňlemeden $x_1=\frac{1}{3}$ we $x_2=2$ bolar. x-iň bahalaryny $y=2x-1$ deňlemede goýup, $y_1=-\frac{1}{3}$; $y_2=3$ bahalary alarys.

Jogaby: $\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$, (2;3).

(1) görnüşli ulgamlary käbir emeli usullary ulanmak arkaly çözüp bolýan halatlary hem bardyr.

2-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözmeli: $\begin{cases} x^2-y^2=10, \\ x+y=-3 \end{cases}$.

Ulgamyň birinji deňlemesini $(x+y)(x-y)=10$ görnüşde ýazyp bolar. Ulgamyň ikinji deňlemesini göz öňünde tutup, soňky deňligi $-3(x-y)=10$ ýa-da $x-y=-\frac{10}{3}$ ýaly ýazyp bileris. Diýmek, berlen ulgam $\begin{cases} x^2-y^2=10, \\ x+y=-3 \end{cases}$ ulgam bilen deňgüýçlüdir. Bu ulgamyň deňlemelerini goşup, $x=-3\frac{1}{6}$, aýryp, $y=\frac{1}{6}$ alarys.

Jogaby: $\left(-3\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$.

3-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözmeli: $\begin{cases} x-y=4, \\ xy=-5. \end{cases}$

Ulgamyň birinji deňlemesini kwadrata göterip, ikinji deňlemesini bolsa 4-e köpeldip we olary goşup, $(x+y)^2=-4$ alarys. Bu deňlemäniň çözüwleri ýokdur, sebäbi islendik aňlatmanyň kwadraty otrisatel bolup bilmez. Diýmek, berlen ulgamyň hem hakyky çözüwleri ýokdur.

Jogaby: çözüwi ýök.

4-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözmeli: $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases}$.

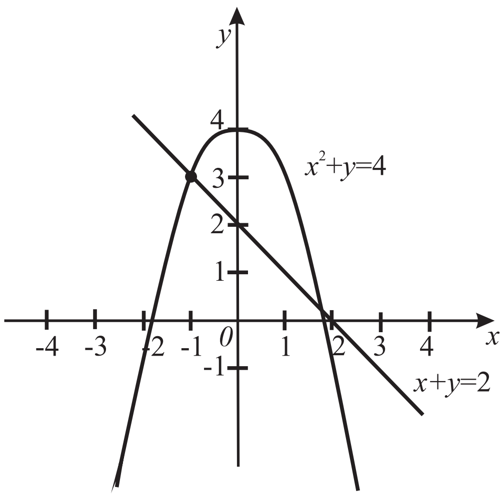
Eger berlen deňlemeler ulgamynyň çözüwi bar bolsa, onda Wiýetiň teoremasyna görä bu çözüw $z^2-az+b=0$ kwadrat deňlemäniň köki bolmalydyr. $a^2-4b>0$ bolanda, bu deňlemäniň $z_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$, formulalar arkaly kesgitlenilýän iki sany köküniň bardygy bellidir. Bu halda berlen ulgamyň $\begin{cases} x_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}, \\ y_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases}$ we $\begin{cases} x_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}, \\ y_2=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases}$ iki sany çözüwi bolar. Egerde $a^2-4b=0$ bolsa, onda $z^2–az+b=0$ deňlemäniň $z_1=\frac{a}{2}$ ýeke-täk köki bardyr. Bu halda berlen ulgamyň hem ýeke-täk çözüwi bolar: $x_1=\frac{a}{2}, y_1=\frac{a}{2}$.

$a^2–4b<0$ bolanda $z^2–az+b=0$ deňlemäniň hem, berlen ulgamyň hem hakyky çözüwleri ýokdur.

5-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny grafiki usulda çözmeli:.

$$\begin{cases} x^2+y=4, \\ x+y=2. \end{cases}$$

Ulgamyň deňlemeleriniň ikisiniň hem grafiklerini bir koordinatalar ulgamynda guralyň (*44-nji surat*). Çyzgydan görnüşi ýaly, grafikler $A(–1;\ 3)$ we $B(2;\ 0)$ nokatlarda kesişýärler. $(–1;\ 3)$ we $(2;\ 0)$ san jübütleriniň berlen deňlemeler ulgamynyň çözüwleri bolýandygyna göz ýetirmek kyn däldir:



44-nji surat

$$\begin{cases} (-1)^2+3=4, \\ -1+3=2; \end{cases} \text{we} \begin{cases} 2^2+0=4, \\ 2+0=2. \end{cases}$$

Gönükmeler

Deňlemeler ulgamyny çözmeli.

1. $\begin{cases} x^2 - y = 14, \\ y - x = -2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + 3y^2 - 4x - 5y - 8 = 0, \\ y + x - 1 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 40, \\ y + x = 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \\ x + y = 4. \end{cases}$

§11. Bikwadrat deňlemeler

Dördünji derejeli deňlemelerde diňe jübüt derejeli näbelliler bar bolsa, şeýle deňlemelere bikwadrat deňlemeler diýilýär we aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$ax^4+bx^2+c=0,\ a\neq 0.$$

Bu deňlemäni çözmek üçin onuň çep böleginden doly kwadraty bölüp çykaralyň:

$$ax^4+bx^2+\mathrm{c}=a((x^4+2x^2\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left(\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}-4ac\right).$$

Onda alarys:

$$ax^4+bx^2+c=a\left(\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}-4ac\right)=0\ (a\neq 0). \qquad (2)$$

1. Eger $b^2-4ac<0$ bolsa, $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ položitel, $\left(-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ hem položitel san bolar, onda $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}-4ac$ hem položitel san bolar, şeýlelikde, ol nola deň bolup bilmez. Diýmek, (1) deňlemäniň $b^2-4ac<0$ bolanda köki ýokdur.

2. Eger $b^2-4ac=0$ bolsa, (2) deňleme $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ $(a\neq0)$ görnüşe gelýär, bu bolsa $x^2+\frac{b}{2a}=0$ $(a\neq0)$ görnüşli kwadrat deňlemä deňgüýçlüdir.

Eger $\frac{b}{2a}<0$ bolsa bu deňlemäniň iki köki bardyr: $x_1=\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ we $x_2=-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

Eger $\frac{b}{2a}=0$ bolsa, deňlemäniň ýeke-täk $x_1=0$ köki bardyr.

Eger $\frac{b}{2a}>0$ bolsa, deňlemäniň köki ýokdur.

3. Eger $b^2–4ac>0$ bolsa, onda (2) deňleme we oňa deňgüýçli bolan (1) deňleme aşakdaky deňlemeleriň jemi bilen deňgüýçlüdir.

$$x^2+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0\ (a\neq0);\ x^2+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0;\ (a\neq0)$$

Deňlemeleri olara deňgüýçli bolan deňlemeler bilen çalşyryp ýazalyň:

$$x^2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ (a\neq0);\ x^2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ (a\neq0).$$

Bu ýerden aşakdaky formulalary alarys:

$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ ýa-da has aýdyň görnüşde ýazalyň:

$$x_1=\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\quad x_2=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

$$x_3=\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}};\quad x_4=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Mysal. Bikwadrat deňlemeleri çözmeli:

1. $x^4–x^2–6=0$. $x^2=t$ belgileme girizeliň, onda $t^2–t–6=0$ kwadrat deňleme alarys, ony çözüp $t_1=–2$; $t_2=3$ taparys. Onda $x^2=–2$, $x^2=3$ deňlemeleri çözmeli. Bu deňlemeleriň birinjisiniň kökleri ýok, ikinjisiniň kökleri $x_1=\sqrt{3}$ $x_2=-\sqrt{3}$.

2. $x^4–13x^2+36=0$. $x^2=t$ belgileme girizip alarys: $t^2–13t+36=0$. Alnan kwadrat deňlemäni çözüp $t_1=9$, $t_2=4$ bahalary alarys. Soňra $x^2=9$, $x^2=4$ deňlemeleri çözüp $x_1=–3$, $x_2=3$, $x_3=–2$, $x_4=2$ kökleri taparys.

Gönükmeler

Bikwadrat deňlemeleri çözmeli.

1. $x^4–13x^2+36=0$. **3.** $x^4–6x^2+8=0$. **5.** $x^4+5x^2–36=0$.

2. $36x^4–13x^2+1=0$. **4.** $4y^4+7y^2–2=0$. **6.** $81x^4–45x^2+4=0$.

§12. Kwadrat deňsizlikleri çözmek

$ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$; we $ax^2+bx+c\leq 0$ deňsizlikler bir näbellili ikinji derejeli deňsizlikleriň umumy görnüşidir. Olara kwadrat deňsizlikler hem diýilýär. Şeýle deňsizlikleriň kwadrat funksiýalaryň grafiklerini ulanmak arkaly çözülişiniň mysallaryna garalyň.

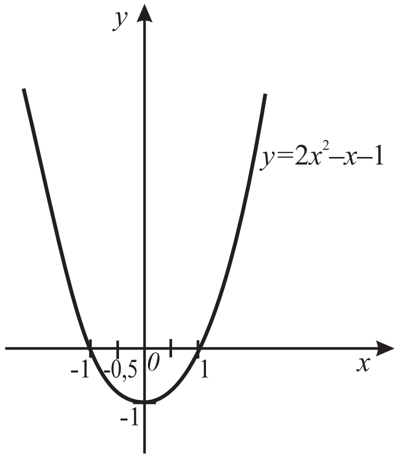
1-nji mysal.

$2x^2–x–1>0$ deňsizligi çözmeli.

$y=2x^2–x–1$ kwadrat funksiýanyň nullaryny tapalyň:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{1\pm 3}{4}; \qquad x_1=-\frac{1}{2}; \qquad x_2=1.$$

Onda $y=2x^2–x–1$ kwadrat funksiýanyň grafigi şahalary ýokarlygyna ugrukdyrylan, Ox okuny $x_1=-\frac{1}{2}$ we $x_2=1$ nokatlarda kesip geçýän parabola bolýar (*45-nji surat*).



45-nji surat

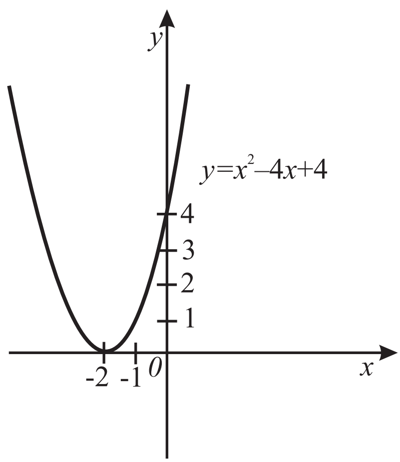
Çyzgydan görnüşi ýaly, $x<-\frac{1}{2}$ ýa-da $x>1$ bolanda seredilýän funksiýa položitel bahalary, $-\frac{1}{2}<x<1$ bolanda bolsa, otrisatel bahalary alýar. Şol sebäpli $2x^2-x-1>0$ deňsizligiň çözüwleriniň toplumyny $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ we $(1;+\infty)$ aralyklaryň birikmesi görnüşinde ýazmak bolar: $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Eger $2x^2-x-1<0$ deňsizligi çözmek gerek bolsa, onda onuň çözüwleriniň $x\in\left(-\frac{1}{2};1\right)$ boljakdygy hem çyzgydan görünýär. $y=ax^2+bx+c$ kwadrat funksiýanyň x_1 we x_2 $(x_1<x_2)$ iki sany nuly bar bolup, $a>0$ bolanda $(x_1;\ x_2)$ aralykda $ax^2+bx+c<0$ deňsizligiň, $(-\infty;\ x_1)$ we $(x_2;\ +\infty)$ aralyklarda bolsa $ax^2+bx+c>0$ deňsizligiň ýerine ýetjekdigi äşgärdir. Şol sebäpli bu halda $ax^2+bx+c<0$ deňsizligiň çözüwleri $x\in(x_1;x_2)$, $ax^2+bx+c>0$ deňsizligiň çözüwleri bolsa, $x\in(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;+\infty)$ bolar.

2-nji mysal.

$x^2+4x+4<0$ deňsizligi çözmeli.

$y=x^2+4x+4$ kwadrat funksiýa garalyň. Bu funksiýanyň ýeke-täk $x_1=x_2=-2$ nuly bar bolup, $a=1>0$ bolandygy sebäpli onuň grafigi şahalary ýokarlygyna ugrukdyrylan, Ox ok bilen diňe bir umumy nokady bolan paraboladyr (*46-njy surat*).



46-njy surat

Bu suratdan $x^2+4x+4<0$ deňsizligiň çözüwleriniň ýokdugy görünýär. Şeýle ýagdaýda $x\in\varnothing$ görnüşli belgileme kabul edilendir.

Eger $x^2+4x+4>0$ deňsizligi çözmeli bolan bolsa, onda çyzgydan onuň çözüwleriniň

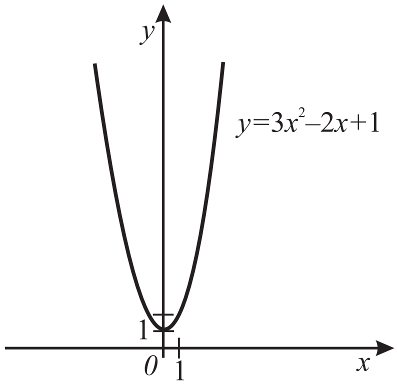
$x\in(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$ bolýandygy görünýär.

Eger $y=ax^2+bx+c$ kwadrat funksiýanyň ýeke-täk nuly bar bolup, $a>0$ bolsa, onda $ax^2+bx+c<0$ deňsizligiň çözüwi ýokdur $ax^2+bx+c<0$ deňsizligiň çözüwleri bolsa $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_1;+\infty)$ bolar.

3-nji mysal.

$3x^2-2x+1>0$ deňsizligi çözmeli.

$y=3x^2-2x+1$ kwadrat funksiýa seredeliň. Bu funksiýanyň nullary ýok bolany sebäpli onuň grafigi Ox okuny kesmeýän, şahalary ýokarlygyna ugrukdyrylan paraboladyr (*47-nji surat*).



47-nji surat

Çyzgydan görnüşi ýaly, $3x^2-2x+1>0$ deňsizligiň çözüwleri $x\in(-\infty;+\infty)$. Eger $3x^2-2x+1<0$ deňsizligi çözmeli bolan bolsa, onda çyzgydan görnüşi ýaly onuň çözüwleriniň ýokdugyny görmek bolar.

Eger $y=ax^2+bx+c$ kwadrat funksiýanyň nullary ýok bolup, $a>0$ bolsa, onda $ax^2+bx+c<0$ deňsizligiň çözüwleri ýokdur $ax^2+bx+c>0$ deňsizligiň çözüwleri bolsa $x\in(-\infty;+\infty)$ bolar.

Ýokardaky mysallarda $a>0$ bolan hala seretdik. $a<0$ bolan halda bolsa aşakdaky tassyklamalaryň dogrudygyna göz ýetirmek kyn däldir.

1) $y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$ kwadrat funksiýanyň x_1 we x_2 $(x_1<x_2)$ iki sany noly bar bolsa $ax^2+bx+c\geq 0$ deňsizligiň çözüwleri $x\in[x_1;\ x_2]$, $ax^2+bx+c\leq 0$ deňsizligiň çözüwleri bolsa $x\in(-\infty;\ x_1]\cup[x_2;\ +\infty)$ bolar.

2) $y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$ kwadrat funksiýanyň ýeke-täk nuly bar bolsa, onda $ax^2+bx+c>0$ deňsizligiň çözüwleri ýokdur, $ax^2+bx+c<0$ deňsizligiň çözüwleri bolsa $x\in(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;\ +\infty)$ bolar.

$y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$ kwadrat funksiýanyň nullary ýok bolsa, onda $ax^2+bx+c>0$ deňsizligiň çözüwleri ýokdur, $ax^2+bx+c<0$ deňsizligiň çözüwleri bolsa $x\in(-\infty;+\infty)$ bolar.

Gönükmeler

Deňsizligi çözmeli.

1. $x^2-5x+4>0$. **3.** $2x^2-7x-15\geq 0$. **5.** $12x^2-17x-105<0$.

2. $x^2+6x+9\leq 0$. **4.** $12x^2-4x+3<0$. **6.** $x^2+13x+36\leq 0$.

§13. Ikinji derejeli deňlemeler ulgamy we olaryň çözülişi

1-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözmeli.

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 + 15y - 29 = 0, \\ y^2 + 2x + 3y - 10 = 0. \end{cases}$$ Ikinji deňlemäni 5-e köpeldip we başga-da özgertmeler geçirip alarys:

$$\begin{cases} 5y^2 + 15y = 29 - x^2, \\ 5y^2 + 15y = 5(10 - 2x). \end{cases}$$ Birinji deňlemeden ikinji deňlemäni aýryp kwadrat deňleme almak bolar.

$29–x^2=50–10x$, $x^2–10x+21=0$, bu ýerden $x_1=3$, $x_2=7$.

x-iň bahalaryny 1-nji deňlemede ornuna goýalyň:

$x=3$ bolanda: $9+5y^2+15y–29=0$, $y^2+3y–4=0$, $y_1=-4$, $y_2=1$. Iki çözüwi tapyldy:

(3;–4) we (3; 1).

$x=7$ bolanda: $49+5y^2+15y–29= 0$, $y^2+3y+4=0$. Deňlemäniň köki ýok.

Jogaby: {(3;–4),(3; 1)}.

2-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözmeli.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$ Ikinji deňlemäniň iki bölegini 2-ä köpeldip, birinji bilen goşup, soňra aýryp aşakdaky deňlemeler ulgamyny alarys:

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 49, \\ (x - y)^2 = 1. \end{cases}$$

Bu ulgam dört sany çyzykly ulgama dargaýar:

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 1; \end{cases} \begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = -1; \end{cases} \begin{cases} x + y = -7, \\ x - y = 1; \end{cases} \begin{cases} x + y = -7, \\ x - y = -1. \end{cases}$$

Berlen ulgamyň çözüwler köplügi: {(4; 3),(3; 4),(–3;–4),(–4; –3)}.

3-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözmeli.

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 18, \\ 3y^2 + xy = 6. \end{cases}$$

Deňlemäniň çep bölegini köpeldijilere dagadyp alarys:

$$\begin{cases} x(x + 3y) = 18, \\ y(3y + x) = 6. \end{cases}$$

Birinji deňlemäni ikinjä bölüp alarys:

$\frac{x}{y} = 3$, ýa-da $x = 3y$.

Ikinji deňlemeden alarys:

$3y^2 + 3y^2 = 6$; $y^2 = 1$;

$y_1 = -1$, $y_2=1$; $x_1= -3$, $x_2= 3$.

4-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözmeli.

$$\begin{cases} 2x^2 + 5xy - 18y^2 = 0, \\ xy + y^2 - 12 = 0. \end{cases}$$

Birinji deňleme x we y üýtgeýänlere görä biratly deňlemedir. Şeýle deňlemeleriň mydama nula deň çözüwleri bardyr. Ýöne biziň mysalymyzyň $x=0$; $y=0$ çözüwi ýokdur, bulardan başga-da $y \neq 0$, sebäbi $y=0$ bolanda ikinji deňleme $-12=0$ görnüşli nädogry deňlige gelýär. Şeýlelikde, birinji deňlemäniň iki bölegini hem y^2-a bölmek bolar:

$$2 \cdot \frac{x^2}{y^2} + 5 \cdot \frac{x}{y} - 18 = 0.$$

Eger $\frac{x}{y} = t$, belgilemäni girizsek, onda kwadrat deňlemäni alarys:

$2t^2+5t-18=0$; ony çözüp alarys: $t_1 = -\frac{9}{2}$, $t_2=2$.

Şeýlelikde, berlen ulgam aşakdaky deňlemeler ulgamyna deňgüýçlüdir:

1. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = -\dfrac{9}{2}, \\ xy + y^2 - 12 = 0; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2, \\ xy + y^2 - 12 = 0. \end{cases}$

Birinji ulgamyň hakyky köki ýok, ikinji ulgamyň iki çözüwi bar: $x_1=4$; $y_1=2$ we $x_2=-4$, $y_2=-2$.

5-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözmeli:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5. \end{cases}$$

Deňlemäniň çep bölegi x we y görä biratly deňlemedir, şonuň üçin $y=tx$ belgileme girizeliň, onda ulgamyň her bir deňlemesi aşakdaky görnüşi alar:

$x^2(1-t+t^2) = 3$; $x^2(2-t-t^2) = 5$.

$x \neq 0$, birinji deňlemäni ikinjä bölüp alarys:

$$\frac{1-t+t^2}{2-t-t^2} = \frac{3}{5},$$

$5-5t+5t^2 = 6-3t-3t^2$,

ýa-da $8t^2-2t-1=0$; $t_1=-\dfrac{1}{4}$, $t_2=\dfrac{1}{2}$.

Şeýlelikde, $y = -\dfrac{1}{4}x$ ýa-da $y = \dfrac{1}{2}x$. Soňra ornuna goýmak usulynda ýönekeý iki ulgamy çözeliň.

Jemi dört çözüwi taparys:

$$x_1 = \frac{4}{\sqrt{7}}; x_2 = -\frac{4}{\sqrt{7}}; x_3 = -2; x_4 = 2.$$

$$y_1 = -\frac{1}{\sqrt{7}}; y_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}; y_3 = -1; y_4 = 1.$$

Gönükmeler

Deňlemeler ulgamyny çözmeli.

1. $\begin{cases} x^2 - 9 = 0, \\ 2x^2 + 3xy - 5y^2 + 2x - 4y - 14 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 19y^2 = 25, \\ x^2 - 6y = 250. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} (x-2)(y-1) = 0, \\ 2x^2 - 3xy + 5y = 5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 - 3y = \dfrac{1}{2}, \\ xy + y^2 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18, \\ x + y = 12. \end{cases}$

VI bap

Arifmetik we geometrik progressiýalar

§1. San yzygiderlikleri

Položitel jübüt sanlary artýan tertipde ýazalyň:

2; 4; 6; 8;….2n;…

Bu ýerde görnüşi ýaly, birinjisi 2-ä, ikinjisi 4-e, üçünjisi 6-a, dördünjisi 8-e we ş.m. n-jisi 2n-e deň bolan yzygiderligi alarys.

Ýene-de bir mysala – 3-e kratny bolan san yzygiderligine seredeliň:

3; 6; 9; 12; … 3n;……

Bu mysalda n-iň ýerine islendik natural sanlary goýup yzygiderligiň islendik agzasyny tapyp bileris. Mysal üçin, n=10 bolanda 3·10=30, n=105 bolanda 3·105=315; we ş.m. Şeýle usul bilen häzir tapyp görkezişimiz ýaly edip yzygiderligiň islendik agzasyny tapyp bileris.

Yzygiderligi emele getirýän sanlara yzygiderligiň agzalary diýilýär. Degişlilikde birinji, ikinji, üçünji, … n-inji agzalary diýip okalýar.

Yzygiderligiň agzalary adatça agzanyň tertip belgisini görkezýän indeksli latyn setir harplary bilen belgilenilýär.

Meselem: a_1; a_2; a_3;…;$a_{n…}$

a_1–e birinji, a_2–e ikinji we ş.m. agza diýilýär. Bu yzygiderlik (a_n) bilen belgilenilýär.

San yzygiderligi agzalarynyň sanyna görä tükenikli we tükeniksiz bolup bilýär.

Eger yzygiderligiň agzalarynyň sany tükenikli bolsa, onda olar ýaly san yzygiderligine **tükenikli san yzygiderligi** diýilýär.

Meselem: 1) 5-e kratny bolan ikibelgili sanlaryň yzygiderligi: 10; 15; 20;…90; 95.

2) birbelgili natural sanlaryň yzygiderligi: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Eger yzygiderligiň agzalarynyň sany tükeniksiz bolsa, onda olar ýaly **san yzygiderligine tükeniksiz san yzygiderligi diýilýär.**

Meselem: 1) ähli natural sanlaryň yzygiderligi: 1;2;3;4;…n;….

2) 3-e kratny sanlaryň yzygiderligi: 3;6;9;12;…3n;..

Bu mysallardaky n we 3n berlen yzygiderlikleriň n-nji agzasyny aňladýan formuladyr.

Yzygiderligiň berliş usullaryna seredeliň.

1-nji usul. Yzygiderligiň birnäçe agzalaryny görkezmek bilen berlişi.

Meselem**:** 1; 3; 5; 7;……..– täk sanlaryň yzygiderligi;

4; 8; 12; 16;…….– 4-e kratny sanlaryň yzygiderligi.

2-nji usul. Yzygiderligiň formulanyň kömegi bilen berlişi.

Meselem**:** 1) $a_n=2n–1$, bu ýerde n-iň ýerine natural sanlary goýup, islendik agzasyny tapyp bileris: n=1 bolanda $a_1=2·1–1=1$; n=2 bolanda $a_2=2·2–1=4–1=3$; n=3 bolanda $a_3=2·3–1=6–1=5$ we ş.m.

2) yzygiderlik $b_n=2^n–3n$ formula bilen berlen. Onuň ilkinji bäş agzasyny hasaplalyň:

n=1 bolanda $b_1=2^1–3·1=2–3=–1$;

$n=2$ bolanda $b_2=2^2-3\cdot 2=4-6=-2$;
$n=3$ bolanda $b_3=2^3-3\cdot 3=8-9=-1$;
$n=4$ bolanda $b_4=2^4-3\cdot 4=16-12=4$;
$n=5$ bolanda $b_5=2^5-3\cdot 5=32-15=17$.

Gönükmeler

n-nji agzanyň formulasy bilen berlen yzygiderligiň ilkinji bäş agzasyny tapyň.

1. $d_n=n^2+5n-4$. **2.** $b_n=\dfrac{n}{2n+1}$. **3.** $y_n=(-1)^n+3n-5$.

§2. Arifmetik progressiýanyň kesgitlenişi

Arifmetik progressiýanyň *n*-nji agzasynyň formulasy

3-e bölünende galyndyda 2 galýan natural sanlaryň 2; 5; 8; 11; 14; 17;… yzygiderligine garap geçeliň. Onuň her bir agzasy ilkinjiden başlap, öňki agzasyna 3 sany goşmak bilen alynýar. Bu yzygiderlik arifmetik progressiýanyň mysalydyr.

Kesgitleme. **Ikinji agzadan başlap her bir agzasy öň ýanyndaky agza şol bir sanyň goşulmagyna deň bolan san yzygiderligine arifmetik progressiýa diýilýär.**

Başgaça aýdylanda, eger islendik natural n san üçin $a_{n+1}=a_n+d$ şert ýerine ýetýän bolsa (bu ýerde d – käbir san), (a_n) – yzygiderlik arifmetik progressiýadyr.

Ikinji agzadan başlap, onuň islendik agzasynyň we öň ýanyndaky agzasynyň arasyndaky tapawudynyň d sana deň bolýandygy, ýagny islendik natural n bolanda $a_{n+1}-a_n=d$ bolýandygy arifmetik progressiýanyň kesgitlemesinden gelip çykýar.

d sana arifmetik progressiýanyň **tapawudy** diýilýär. Arifmetik progressiýany bermek üçin onuň birinji agzasyny we tapawudyny görkezmek ýeterlikdir.

Eger $a_1=1$ we $d=1$ bolsa, onda agzalary yzygider natural san bolan 1; 2; 3; 4; 5;… arifmetik progressiýany alarys.

Eger $a_1=1$ we $d=2$ bolsa, položitel täk sanlaryň yzygiderligi bolan 1; 3; 5; 7; 9;… arifmetik progressiýany alarys.

Eger $a_1=-2$ we $d=-2$ bolsa, onda – 2; – 4; – 6; – 8; – 10;... arifmetik progressiýa otrisatel jübüt sanlaryň yzygiderligidir.

Eger $a_1=7$ we $d=0$ bolsa, onda ähli agzalary özara deň bolan 7; 7; 7; 7; 7; … arifmetik progressiýany alarys.

Arifmetik progressiýanyň birinji agzasyny we tapawudyny bilip, ikinji, üçünji, dördünji we ş.m. agzalaryny yzygider hasaplap, onuň islendik agzasyny tapyp bolar. Ýöne progressiýanyň uly belgili agzasyny tapmak üçin bu usul amatly däldir. Az hasaplamany talap edýän usuly tapmaga çalşalyň.

Arifmetik progressiýanyň kesgitlemesine görä:

$a_2=a_1+d,$

$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$

$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$

$a_5= a_4+d=(a_1+3d)+d=a_1+4d.$

Edil şonuň ýaly edip, $a_6=a_1+5d$, $a_7=a_1+6d$ bolýandygyny tapýarys, umuman, a_n tapar ýaly a_1-e $(n-1)d$ goşmaly, ýagny:

$a_n = a_1+d\,(n-1).$

Biz arifmetik progressiýanyň n-nji agzasynyň formulasyny aldyk.

Şu formulany ulanyp, meseleleriň çözülişine mysallar getireliň.

1-nji mysal. (c_n) yzygiderlik – arifmetik progressiýa, onda $c_1=2{,}3$ we $d=0{,}45$. Şu progressiýanyň 10-njy we 100-nji agzalaryny tapalyň.

Alarys:

$c_{10}= 2{,}3+0{,}45\cdot9=2{,}3+4{,}05=6{,}35;$

$c_{100}=2{,}3+0{,}45\cdot99=2{,}3+44{,}55=46{,}85.$

2-nji mysal. 71 sanyň –10; –5,5; –1; 3,5;… arifmetik progressiýanyň agzasydygyny ýa-da däldigini düşündireliň. Şu arifmetik progressiýada $x_1=-10$ we $d=x_2-x_1=-5{,}5-(-10)=4{,}5$. Progressiýanyň n-nji agzasynyň formulasyny ýazalyň:

$x_n= -10+4{,}5(n-1)$, ýagny

$x_n=4{,}5n-14{,}5.$

$x_n = 71$ bahany goýup, $71 = 4{,}5n – 14{,}5$ deňlemäni çözeliň:

$4{,}5n = 71 + 14{,}5,$

$4{,}5n = 85{,}5,$

$n = 85{,}5 : 4{,}5 = 19$, görnüşi ýaly 71 berlen arifmetik progressiýanyň 19-njy agzasydyr.

$a_n = a_1 + d(n – 1)$ arifmetik progressiýanyň n-nji agzasynyň formulasyny başgaça-da ýazyp bolýar: $a_n = dn + (a_1 – d)$. Bu ýerden islendik arifmetik progressiýanyň $a_n = kn + b$ görnüşindäki formula bilen hem berilýändigi düşnüklidir, bu ýerde k we b – käbir sanlar.

Tersine hem dogrudyr: $a_n = kn + b$ görnüşindäki formula bilen berlen (a_n) yzygiderlik (bu ýerde k we b – käbir sanlar) – arifmetik progressiýadyr.

Hakykatdan-da (a_n) yzygiderligiň $(n + 1)$ we n-nji agzalarynyň tapawudyny tapalyň:

$a_{n+1} – a_n = k(n + 1) + b – (kn + b) = kn + k + b – kn – b = k.$

Diýmek, islendik n bolanda $a_{n+1} = a_n + k$ deňlik dogrudyr we (a_n) yzygiderligiň kesgitlemesine görä arifmetik progressiýadyr. Şu progressiýanyň tapawudynyň k deňdigini belläliň.

Mysal: 1) $a_1 = 3$; $d = 4$; 2) $a_1 = 2$; $d = 1{,}3$; 3) $a_4 = 23$; $a_5 = 26{,}5$; 4) $a_1 = –3{,}5$; $d = 0{,}6$ bolanda arifmetik progressiýanyň ilkinji bäş agzasyny ýazyň.

Mesele: Otly ugranyndan tizligini minutda 50 *m* artdyrdy, otlynyň 10-njy, 15-nji, 20-nji minutdaky tizligini tapyň.

Arifmetik progressiýanyň ilkinji *n* agzasynyň jeminiň formulasy

Goý, birbelgili natural sanlaryň jemini tapmak talap edilsin. Sanlary yzygider goşmak bu meseläni çözüp bolýandygyny görkezeliň. Gözlenýän jemi S harpy bilen belgiläliň we ony iki gezek, ýagny birinji halda goşulyjylary artýan tertipde, soňra kemelýän tertipde ýazalyň:

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9,$

$S = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1.$

Biri-biriniň aşagynda ýerleşen sanlar jübütiniň jemi 10-a deň. Şeýle jübütleriň sany 9-a deň. Şoňa görä-de deňligi agzama-agza goşup alarys:

$2S=10\cdot9.$

$$S=\frac{10\cdot9}{2}=45.$$

Diýmek, 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.

Şuňa meňzeşlikde ilkinji ýüz natural sanlaryň jemini tapalyň:

S= 1+ 2+…. +99+100,

S=100+99+… + 2 + 1.

Sanlary goşup alarys:

$2S$=101+101+101+…+101+101.

Goşulyjylaryň sany 100-e deň bolany üçin jemi köpeltmek hasyly bilen çalşyryp alarys:

$2S=101\cdot100,$

$$S=\frac{101\cdot100}{2}=101\cdot50=5050.$$

Şeýlelikde, 1+2+3+…+98+99+100=5050

Şuňa meňzeşlikde islendik arifmetik progressiýanyň ilkinji agzalarynyň jemini tapyp bolar.

(a_n) arifmetik progressiýanyň ilkinji n agzalarynyň jemini S_n bilen belgiläliň we birinji halda goşulyjylaryň belgilerini artýan tertipde, soňra kemelýän tertipde ýerleşdirip, bu jemi iki gezek ýazalyň:

$S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+.....+a_{n-1}+a_n,$ (1)

$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}+.....+a_2+a_1.$ (2)

Progressiýanyň biri-biriniň aşagynda ýerleşen agzalarynyň her bir jübütiniň jemi a_1+a_n deňdir.

Hakykatdan-da, $a_{n-1}=a_n-d$ formulany peýdalanyp, aşakdakylary ýazyp bileris:

$a_2+a_{n-1}=(a_1+d)+(a_n-d)=a_1+a_n$

$a_3+a_{n-2}=(a_2+d)+(a_{n-1}-d)=a_2+a_{n-1}=a_1+a_n$

Şunuň ýaly jübütleriň sany n-e deň. (1) we (2) deňlikleri agzama-agza goşup, $2S_n=(a_1+a_n)n$ alarys. Bu deňligiň iki bölegini-de 2-ä bölüp, arifmetik progressiýaniň n agzalarynyň jeminiň formulasyny alarys: $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$ Bu formula birinji we iň soňky n-nji agzasy belli bolanda jemi tapmak üçin peýdalanylýar.

Mysal. 2;5;8;11;…. arifmetik progressiýanyň ilkinji 30 agzasynyň jemini tapalyň.

d=5–2=3, $a_{30}=a_1+29d=2+29\cdot3=2+87=91$; S_{30}-y hasaplalyň:

$$S_{30}=\frac{(2+91)\cdot30}{2}=93\cdot15=1395.$$

Eger arifmetik progressiýanyň birinji agzasy we tapawudy d berlen bolsa, $a_n=a_1+(n-1)d$ formulany peýdalanyp, S_n-i hasaplamak üçin täze formula alarys: $S_n=\frac{2a_1+(n-1)\cdot d}{2}\cdot n$.

Mysal. $a_1=5$, $d=3$ bolsa S_{25}-i tapmaly.

$$S_{25}=\frac{2\cdot5+(25-1)\cdot3}{2}\cdot25=\frac{10+72}{2}\cdot25=41\cdot25=1025.$$

Gönükmeler

1. Arifmetik progressiýanyň ilkinji 12 agzalarynyň jemini tapyň:
a) –12;–15;…; b) 9;5;1;…; ç) 3;7;11;…; d) 1;3;5;….

2. Eger: a) $a_n=3n+2$; b) $y_n=(-1)^n+4n-2$ bolsa, yzygiderligiň ilkinji bäş agzasyny tapyň.

Tablisany dolduryň.

a_1	a_2	d	a_n	S_n
3		5		
	7	4		
–9		1,5		
$\frac{1}{3}$	–1			

§3. Orta arifmetik baha

Şeýle meselä garap geçeliň. Aman, Myrat we Durdy üçüsi gezelenje gitdiler.Ýanlary bilen degişlilikde 3, 5 we 4 gutap aldylar. Olar dynç alanlarynda gutaplary deň paýlaşyp iýdiler. Her bir oglan näçe gutap iýipdir?

Çözülişi.

Oglanlarda jemi 3+5+4=12 gutap bar eken. Her kime 12:3=4 gutap ýetipdir.

Birnäçe sanyň orta arifmetik bahasy diýip, şol sanlaryň jemini goşulyjylaryň sanyna bölmekden ýetýän paýa aýdylýar.

$$a_{or.} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$$

formula bilen hasaplanýar.

Mesele. Bir adam 4,6 *km/sag* tizlik bilen 2 sagat we 5,1 *km/sag* tizlik bilen 3 sagat ýöredi. Ol haýsy hemişelik tizlik bilen ýörese şol uzaklygy şol bir wagtda geçerdi?

Çözülişi.

Pyýadanyň ähli geçen ýoluny tapalyň:

4,6·2+5,1·3=9,2+15,3=24,5 *(km)*, alnan netijäni sarp edilen wagta böleliň; 24,5:5=4,9 *(km/sag)*. *Jogap*: Pyýada adam 4,9 *km/sag* hemişelik tizlik bilen ýöremeli. Şeýle tizlige hereketiň ortaça tizligi diýilýär.

Mysal.

Orta arifmetik bahasyny tapyň:

a) 4; 5; 7 we 8 sanlaryň;

b) 2,23; 4,56; 3,02; 7,45 we 6,54 sanlaryň.

Mesele. 80° gyzgyn 5 litr we 22° mylaýym 10 litr suw garylanda näçe gradusly suw alnar (suw guýuljak gaby gyzdyrmaga we suw guýulanda ýitýän ýylylygy hasaba almaly däl)?

Çözülişi.

(80°·5+22°·10):(5+10)=(400°+220°):15=620°:15=41,3°.

Jogap: 41,3° suw alnar.

Mysal.

a_1=3; a_2=4 we a_{or}=4,5 bolsa a_3-i tapmaly.

Çözülişi.

$a_{or}=(a_1+a_2+a_3):3$ formuladan peýdalanyp a_3-i tapalyň.

$a_3=3\cdot a_{or}-(a_1+a_2)$ berlenleri ýerine goýup alarys.

a_3=3·4,5–(3+4)=13,5–7=6,5.

Jogaby: a_3=6,5.

Gönükme

Tablisany dolduryň:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_{or}
7	5	6	10	?
6,5	?	8	4	6
12	4,6	3,4	?	7

§4. Geometrik progressiýa

Geometrik progressiýanyň kesgitlenişi we *n*-nji agzasynyň formulasy

Şeýle san yzygiderliklere garap geçeliň:

1. 3; 6; 12; 24;…yzygiderlikden görnüşi ýaly ikinji agzadan başlap, her bir agza öň ýanyndaky agzany 2-ä köpeltmek arkaly alynýar.

2. 1; 3; 9; 27;… Bu mysalda her bir agza öň ýanyndaky agzany 3-e köpeltmek arkaly alynýar.

Bu yzygiderlikler geometrik progressiýanyň mysalydyr.

Kesgitleme. **Birinji agzasy noldan tapawutly, ikinji agzasyndan başlap, her bir agzasy bolsa nola deň bolmadyk şol bir sana köpeldilmegi netijesinde alnan san yzygiderligine geometrik progressiýa dirilýär.**

Başgaça aýdylanda, $b_2=b_1\cdot q$; $b_3=b_2\cdot q=b_1\cdot q^2$ $b_4=b_3\cdot q=(b_1\cdot q^2)\cdot q=b_1\cdot q^3$ we ş.m. islendik *n*-natural san üçin $b_{n+1}=b_1\cdot q^n$ şert ýerine ýetýän bolsa, (*bn*) yzygiderlik – geometrik progressiýadyr. Bu ýerde q sana geometrik progressiýanyň maýdalawjysy diýilýär.

Geometrik progressiýany bermek üçin birinji agzasyny we maýdalawjyny görkezmek ýeterlikdir.

Mysal üçin: eger

$b_1=4$ we $q=3$ bolsa, onda 4; 12; 36; 108;……;

$b_1=16$ we $q=0{,}5$ bolsa, onda 16, 8; 4; 2; 1; 0,5; 0,25;…..;

$b_1=2$ we $q=-4$ bolsa, onda 2; –8; 32; –128; 256;….

geometrik progressiýalary alarys. Jemläp aýdylanda, b_1 we q belli bolanda geometrik progressiýanyň islendik agzasyny tapmak üçin

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ formulany ulanarys. Bu formula geometrik progressiýanyň *n*-nji agzasynyň formulasy diýilýär.

Gönükme

Tablisany dolduryň:

b_1	q	b_4	b_6	b_{10}
2	–3			
	2	32		
		–16	–64	
3	2			
		–24	–96	
	3	54		
			16	256
5			156	

Geometrik progressiýanyň ilkinji *n* agzalarynyň jeminiň formulasy

Birinji agzasy 1-e, maýdalawjysy 2-ä deň bolan geometrik progressiýanyň ilkinji 10 agzasynyň jemini tapalyň: $S=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^8+2^9$.

Bu deňligiň iki bölegini-de progressiýanyň maýdalawjysyna, ýagny 2-ä köpeldip alarys: $2S=2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^9+2^{10}$.

Ikinji deňlikden birinji deňligi aýralyň we sadalaşdyralyň: $2S-S=$ $=2^{10}-1$,onda başgaça $S(2-1)=2^9\cdot 2-1$. Bu ýerden S-i tapyp, alnan deňligi derňäliň. 2^9 soňky agza, ýagny bn, 2-i geometrik progressiýanyň maýdalawjysy q, 1 – geometrik progressiýanyň birinji agzasy b_1, degişlilikde ýerine goýup alarys:

$S_n = \dfrac{b_n \cdot q - b_1}{q - b_1}$. Bu deňligi subut edeliň.

Goý, (b_n) geometrik progressiýa bolsun, onuň ilkinji n agzasynyň jemini S_n bilen belgiläliň:

$S_n=b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots+b_{n-1}+b_n$ (1). Bu deňligiň iki bölegini hem q-a köpeldeliň:

$S_nq=b_1q+b_2q+b_3q+\ldots\ldots.+b_{n-1}q+b_nq$,

$b_1q=b_2$, $b_2q=b_3$, $b_3q=b_4,\ldots.$, $b_{n-1}q=b_n$ bolýandygyny göz öňünde tutup, şeýle ýazyp bileris:

$S_nq=b_2+b_3+b_4+\ldots..+b_n+b_nq$ (2) deňlikden (1) deňligi agzama-agza aýryp alarys:

$S_nq-S_n=b_nq-b_1$ ýa-da $S_n(q-1)=b_nq-b_1$, bu deňlikden ($q\neq1$ bolanda) S_n-i tapalyň:

$$S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1} \qquad (3)$$

Bu formula geometrik progressiýanyň ilkinji n agzalarynyň jeminiň formulasydyr. Formula b_n, b_1 we q belli bolanda peýdalanylýar.

Eger $q=1$ bolsa, geometrik progressiýanyň ähli agzalary birinji agza, ýagny b_1-e deňdir.

Onda jem

$S_n=nb_1$ formula bilen hasaplanar. b_n-i $b_n=b_1q^{n-1}$ bilen çalşyp (3) formulany şeýle ýazyp bileris:

$S_n=\dfrac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$ ($q\neq1$bolanda). Bu formulany b_1 we q belli bolanda ulanmak bolar.

Mysal. 2; 3; 4,5; 6,75;….. geometrik progressiýanyň maýdalawjysyny tapalyň:

$q=b_2:b_1=3:2=1{,}5.$

Mysal. $b_3=12$ we $b_5=48$ bolsa, S_6-ny tapalyň:

$b_5=b_4q=(b_3q)q=b_3q^2$ bolýanlygy sebäpli,

$q^2=\dfrac{b^5}{b_3}=\dfrac{48}{12}=4$, diýmek, $q=-2$ ýa-da $q=2$.

Eger $q=-2$ bolsa, onda $b_1=b_3:q^2=12:4=3$,

$$S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{3((-2)^6 - 1)}{-2 - 1} = \frac{3(64 - 1)}{-3} = -63 .$$

Eger q=2 bolsa, onda S_6=189 bolar (özbaşdak hasaplamaly).

Gönükmeler

1. b_5=1,5 we q=0,5 bolsa, S_5-i tapmaly.
2. b_7=72,9 we q=1,5 bolsa, S_7-ni tapmaly.
3. b_1=8 we q=0,5 bolsa, S_5-i tapmaly.
4. b_1=500 we q=0,2 bolsa, S_6-ny tapmaly.

Tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýa we onuň jemi.

$|q|<1$ bolan geometrik progressiýa garap geçeliň, n çäksiz artanda q^n maýdalawjy nula ymtylýar, şoňa görä-de, q^n=0 diýip hasaplap

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1 q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1 \cdot 0}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} ,$$

$S_n = \frac{b_1}{1 - q}$ formulany alarys.

Mysal. b_1=3 we q=0,5 bolanda $S_n = \frac{3}{1 - 0.5} = \frac{3}{0.5} = 6$.

Mysal. Berlen geometrik progressiýanyň jemini tapyň:

1) 9; 3; 1; …

2) 2; –0,5; 0,125; …

3) 1; 0,1; 0,01;…

Tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň jemini tapmagyň formulasyndan peýdalanyp, periodik droby ady droba öwrüp bolýar.

Mysallarda görkezeliň.

1-nji mysal. 0,(3) periodik droby ady droba öwürmeli.

Çözülişi. 0,(3)=0,3 + 0,03+0,003 +…görnüşde ýazyp bolýar. Bu deňligiň sag bölegindäki jeme, birinji agzasy 0,3-e, maýdalawjysy bolsa 0,1-e deň bolan geometrik progressiýanyň jemi hökmünde seretmek bolar. Onda

$$0,(3)=\frac{0,3}{1-0,1}=\frac{0,3}{0,9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

2-nji mysal. 0,(24) droby ady droba öwreliň.

0,(24)=0,24+0,0024+0,000024+…, bu ýerdan b_1=0,24; q=0,01. Alarys:

$$0,(24)=\frac{0,24}{1-0,01}=\frac{0,24}{0,99}=\frac{24}{99}=\frac{8}{33}.$$

Özbaşdak iş: 0,(19); 0,(21); 0,(7); 0,(123) periodik droblary ady droba öwrüň.

VII bap

Trigonometrik funksiýalar

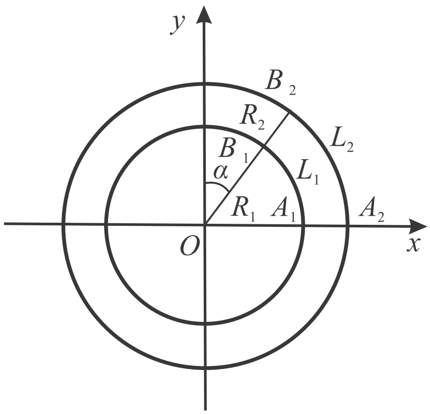
§1. Burçlaryň radian ölçegi

Burçlaryň graduslarda (minutlarda, sekuntlarda) ölçenilýändigi mälimdir. Matematikada burçlary we dugalary graduslardan başga **radian** diýip atlandyrylýan ölçeg birliginde ölçemek amatlydyr.

Radiuslary R_1 we R_2 bolan iki sany konsentrik (umumy merkezli dürli radiusly töwerek) töwerege garalyň (*48-nji surat*).Töwerekleriň a^o bolan merkezi burçy L_1 uzynlykly $\smile A_1B_1$ we L_2 uzynlykly $\smile A_2B_2$ dugalara daýanýar. A_1OB_1 we A_2OB_2 üçburçluklaryň meňzeşliginden

$\frac{L_1}{R_1}=\frac{L_2}{R_2}$ deňligi alarys. Bu deňlikden merkezi burçuň daýanýan dugasynyň uzynlygynyň radiusa bolan gatnaşygynyň töweregiň radiusyna bagly däldigi görünýär. Başgaça aýdylanda bu gatnaşyk diňe merkezi burçuň ululygyna baglydyr. Şol sebäpli ony şol burçuň ölçeg birligi hökmünde ulanmak bolar.

Kesgitleme. **Merkezi burçuň daýanýan dugasynyň ululygynyň radiusyň ululygyna bolan gatnaşygyna (L:R) burçuň radian ölçegi diýilýär.**



48-nji surat

Merkezi burçuň radian ölçegini φ harpy bilen belgiläp, kesgitlemä laýyklykda,

$\varphi = \dfrac{L}{R}$ formulany alarys.

$L = R$ bolan halda φ=1 bolýandygy sebäpli, daýanýan dugasynyň uzynlygy töweregiň radiusyna deň bolan merkezi burça l radianlyk burç diýilýär.

a° merkezi burçuň daýanýan dugasynyň uzynlygynyň $L = \dfrac{\pi R a^0}{180^0}$

bolýandygy mälimdir. Onda şol burçuň radian ölçegi

$$\varphi = \frac{L}{R} = \frac{\pi a^\circ}{180^\circ} \text{ bolar.}$$

Şeýlelik bilen, şol bir burçuň gradus we radian ölçegleriniň arasyndaky baglanyşygy

$$\varphi = \frac{\pi a^\circ}{180^\circ} \text{ ýa-da } a^\circ = \frac{180^\circ \varphi}{\pi}$$

formulalar arkaly aňladyp bolar. Bu formulalaryň kömegi bilen graduslarda berlen burçy radian ölçeginde, radianlarda berlen burçy bolsa gradus ölçeginde aňladyp bolar.

Mysallara garalyň.

1. a°=90° bolsa, bu burçuň radian ölçegi $\varphi = \dfrac{\pi \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{2}$ *rad.* bolar.

2. a°=120 bolsa, onda $\varphi = \dfrac{\pi \cdot 120^\circ}{180^\circ} = \dfrac{2\pi}{3}$ *rad* bolar.

3. φ=2π bolsa, onda $a^\circ = \dfrac{180^\circ \cdot 2\pi}{\pi} = 360^\circ$ bolar.

4. $\varphi = 1$ bolsa, onda $a^\circ = \dfrac{180^\circ \cdot 1}{\pi} = \dfrac{180^\circ}{3,14} = 57,3^\circ$ bolar.

Başgaça aýdylanda 1 radianlyk burç, takmynan, $57^{\circ}18'$ (has takygy, ol $57^{\circ}17'45''$) deň bolýar.

Gönükmeler

1. Graduslarda berlen burçuň radian ölçegini tapyň:

a) 0°; d) 60°; f) 135°;
b) 30°; e) 90°; g) 150°;
ç) 45°; ä) 120°; h) 180°.

2. Graduslarda berlen burçuň radian ölçegini tapyň:

a) 210°; ç) 240°; e) 300°; f) 300°;
b) 225°; d) 270°; ä) 315°; g) 360°.

3. Radianlarda berlen burçuň gradus ölçegini tapyň:

a) 2π; d) $\frac{5}{3}\pi$; f) $\frac{5}{4}\pi$;

b) $\frac{11}{6}\pi$; e) $\frac{3}{2}\pi$; g) $\frac{7}{6}\pi$;

ç) $\frac{7}{4}\pi$; ä) $\frac{4}{3}\pi$; h) π.

4. Radianlarda berlen burçuň gradus ölçegini tapyň:

a) $\frac{5}{6}\pi$; b) $\frac{3}{4}\pi$; ç) $\frac{2}{3}\pi$; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $\frac{\pi}{3}$; ä) $\frac{\pi}{4}$; f) $\frac{\pi}{6}$; g) 0.

5. Gradus ölçeginde berlen burçy radianda aňlatmaly:

a) 1°; b) 15°; ç) $22^{\circ}30'$.

6. Gradus ölçeginde berlen burçy radianda aňlatmaly.

a) 3°; b) $7^{\circ}30'$; ç) $11^{\circ}15'$; d) $67^{\circ}30'$.

7. Radian ölçeginde berlen burçy graduslarda aňlatmaly.

a) $\frac{\pi}{18}$; b) 1,5; ç) 6.

8. Radian ölçeginde berlen burçy graduslarda aňlatmaly.

a) $\frac{\pi}{36}$; b) 30; ç) 4,5.

9. Birlik töweregiň 60º bolan merkezi burçunyň radian ölçegini hem-de onuň daýanýan dugasynyň uzynlygyny hasaplaň.

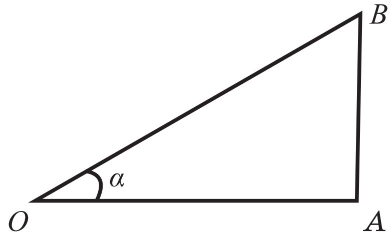
10. Birlik töweregiň 45º bolan merkezi burçunyň radian ölçegini hem-de onuň daýanýan dugasynyň uzynlygyny hasaplaň.

§2. Trigonometrik funksiýalaryň kesgitlenişi. Erkin burçuň trigonometrik funksiýalary

Gönüburçly *AOB* üçburçlukda α ýiti burçuň sinusynyň, kosinusynyň we tangensiniň

$$\sin\alpha = \frac{AB}{OB} \qquad \cos\alpha = \frac{OA}{OB} \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{AB}{OA}$$

formulalar arkaly kesgitlenilýändigi bellidir (*49-njy surat*).



49-njy surat

Şeýle hem olar diňe şol burçuň ululygyna bagly bolup, üçburçlugyň taraplarynyň ululygyna bagly däldir. Başgaça aýdylanda bolsa, burçuň sinusy, kosinusy we tangensi burçuň funksiýalarydyr. Olara trigonometrik funksiýalar diýilýär. Bu funksiýalaryň ters ululyklaryda trigonometrik funksiýalar bolup, olaryň ýörite atlary bar.

$\sin\alpha$-nyň ters ululygy $\mathrm{cosec}\,\alpha$ ýaly belgilenip, kosekans diýlip okalýar:

$$\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

$\cos\alpha$-nyň ters ululygy $\sec\alpha$ ýaly belgilenip, sekans diýlip okalýar:

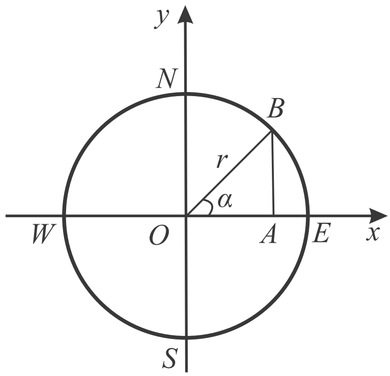
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

$\mathrm{tg}\,\alpha$-nyň ters ululygy $\mathrm{ctg}\,\alpha$ ýaly belgilenip, kotangens diýlip okalýar.

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}.$$

Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçunyň 90º-dan kiçi bolýandygy sebäpli, ýokardaky kesgitlemeleri diňe $0^o < \alpha < 90^o$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan burçlar üçin ulanyp bolar.

Indi trigonometrik funksiýalary erkin α burç üçin kesgitläliň.



50-nji surat

Başlangyjy *AOB* üçburçlugyň *O* depesi bilen, absissalar oky bolsa *OA* katet bilen gabat geler ýaly edip, tekizlikde dekart koordinatalar ulgamyny girizeliň (*50-nji surat*).

Merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan *OB* radiusly töwerek çyzalyň we *OB*=*R* bilen belgiläliň.

Bu töweregiň koordinata oklary bilen kesişme nokatlaryny *E*, *N*, *W*, *S* harplar bilen belgiläliň. Olaryň koordinatalary *E* (*R;O*)*,* *N* (*O:R*)*,* *W* (*–R:O*) we *S* (*O:–R*) bolýar.

AOB üçburçlugyň *AOB* burçuny *OE* radiusynyň (şöhläniň) *O* nokadyň daşynda sagat diliniň tersine α burça öwrülmesi netijesinde alnan figura hökmünde göz öňüne getirmek bolar. Bu öwrülme netijesinde *E* nokadyň töwerek boýunça hereket edip, *B* nokat bilen gabat geljekdigi äşgärdir.

OE başlangyç radiusynyň sagat diliniň ugruna öwrülmesi netijesinde alnan burçlara **otrisatel** alamatly burçlar hökmünde garamaklyk kabul edilendir. Mysal üçin, suratdaky $EOS = –90^o$ bolar.

Şeýlelikde, α öwrüm burçy üçin $–360^o \leq \alpha \leq 360^o$ deňsizlikler ýerliklidir.

Goý, B nokadyň absissasy x, ordinatasy y bolsun. Onda trigonometrik funksiýalaryň kesgitlemelerini

$$\sin\alpha = \frac{y}{R}, \qquad (1)$$

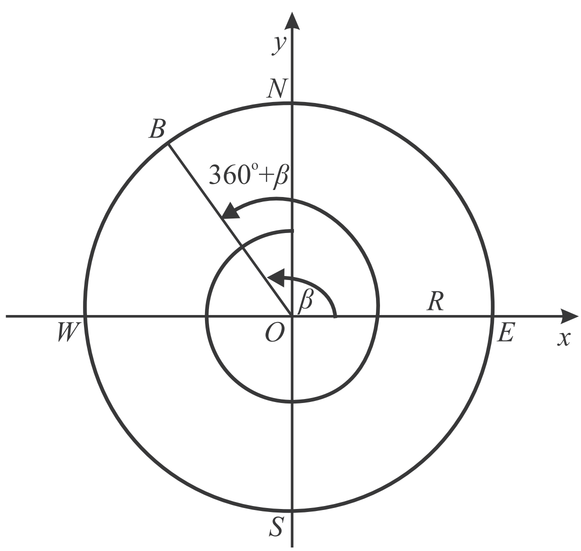
$$\cos\alpha = \frac{x}{R}, \qquad (2)$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}, \qquad (3)$$

$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y} \qquad (4)$$

ýaly ýazyp bolýar. Şunlukda, ýokarda bellenilip geçilişi ýaly, bu deňlikleriň sag bölegindäki aňlatmalar diňe α burça bagly bolup, R radiusa bagly däldir. Şol sebäpli, ýönekeýlik üçin R=1 diýip, birlik töwerege, ýagny radiusy 1-e deň bolan töwerege hem garamak bolar (*51-nji surat*).

(1) we (2) formulalar arkaly kesgitlenilen sinus we kosinus funksiýalary α burçuň $-360^{\circ} \le \alpha \le 360^{\circ}$ deňsizlikler kanagatlandyrýan islendik bahalary üçin ulanyp bolar.



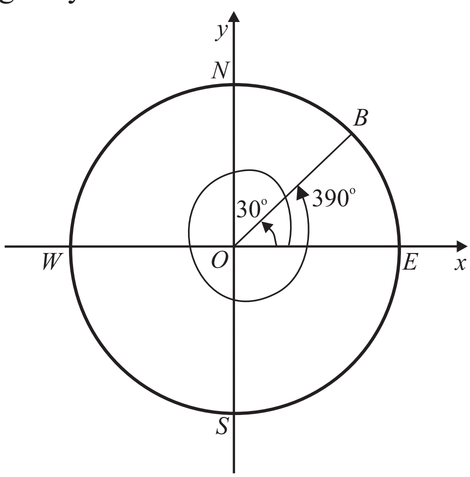
51-nji surat

x=0 bolanda (3) formulanyň, y=0 bolanda bolsa (4) formulanyň sag bölegindäki aňlatma manysyny ýitirýändigi sebäpli, tgα funksiýany α burçuň $-360^o \leq \alpha \leq 360^o$, $\alpha \neq \pm 90^o$ we $\alpha \neq \pm 270^o$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan bahalary üçin ctg α funksiýany bolsa, α burçuň $-360^o < \alpha < 360^o$, $\alpha \neq 0^o$ we $\alpha \neq \pm\ 180^o$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan bahalary üçin ulanyp bolar.

Eger OE radius O nokadyň daşynda bir ýa-da birnäçe gezek 360^o bolan doly öwrüm geçenden soňra, säginmän ýene-de β burça öwrülen halynda $n \cdot 360^o + \beta$ burç (ýagny 360^o-dan hem uly bolan burç) alnýar diýip hasap etsek, onda trigonometrik funksiýalaryň kesgitleniş ýaýlasynda $360^o \leq \alpha \leq 360^o$ çäklendirmeleri aýyrmak hem bolar.

Meselem, şeýle ýagdaýda sinα we cosα funksiýalary islendik α burç üçin hem ulanyp bolar.

Mysallara garalyň.



52-nji surat

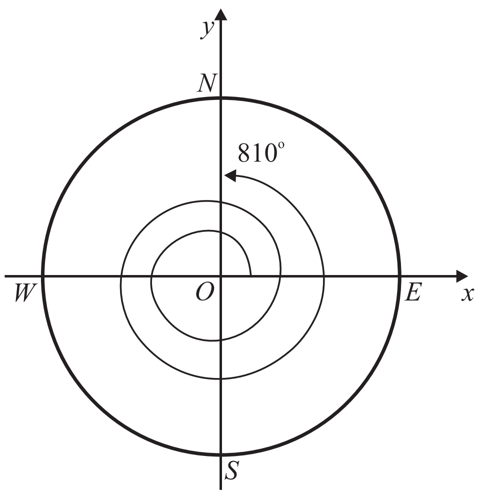
1-nji mysal. 390^o bolan burçuň sinusyny tapmaly. OE radius O nokadyň daşynda 360^o bolan doly öwrüm geçenden soň ýene-de 30^o burça öwrülen halatynda 390^o-lyk öwrüm burç alnar (*52-nji surat*). Şunlukda, OE radius OB ýagdaýa eýe bolupdyr diýeliň, eger başlangyç radius O nokadyň daşynda 390^o-a däl-de, diňe 30^o-a öwrülen bolsa hem onuň şol bir OB ýagdaýa eýe boljakdygy äşgärdir.

Diýmek, 390° bolsa burçuň sinusy 30°-lyk burçuň sinusyna deňdir:

$\sin 390^{\circ} = \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$.

2-nji mysal. 810° bolan burçuň kosinusyny tapmaly. 810° bolan burçuň alynmagy üçin radiusyň *O* nokadyň daşyndan iki gezek doly öwrüm amala aşyrylandan soň, ýene-de 90° burça öwrülmegi zerurdyr (*53-nji surat*). Şunlukda, *OE* radiusyň ahyrky ýagdaýy *ON* radius bilen gabat geler. Eger *OE* radius koordinatalar başlangyjynyň daşynda diňe 90° öwrülen bolsa hem onuň şol bir *ON* ýagadaýa eýe boljakdygy suratdan äşgärdir.

Diýmek, 810° bolan burçuň kosinusy 90° burçuň kosinusyna deňdir (90° burçuň kosinusynyň bolsa nola deňdigi mälimdir). Onda $\cos 810^{\circ} = \cos 90^{\circ} = 0$.

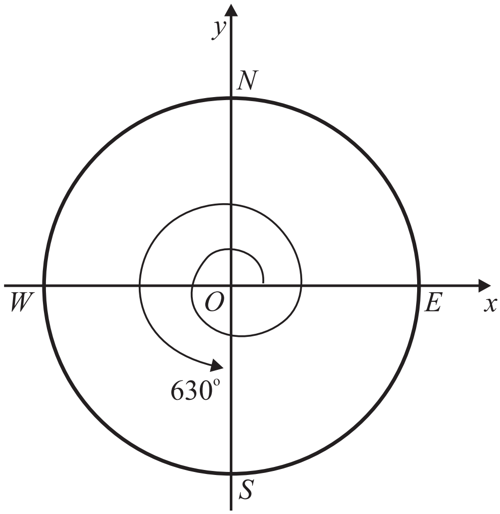


53-nji surat

3-nji mysal. 630° bolan burçuň tangensini tapmaly. 630° öwrüm burçy almak üçin radiusa 360° bolan doly öwrümden soň, ýene-de 270° öwrüm bermek zerurdyr (*54-nji surat*).

Şunlukda, *OE* radius *OS* ýagdaýa eýe bolar.

Eger *OE* radius *O* nokadyň daşynda diňe 270° burça öwrülen bolsa hem şol bir *OS* ýagdaýa eýe bolardy, diýmek, 630° bolan burçuň tangensine deň bolmalydyr. Emma 270° bolan burçuň tangensiniň



54-nji surat

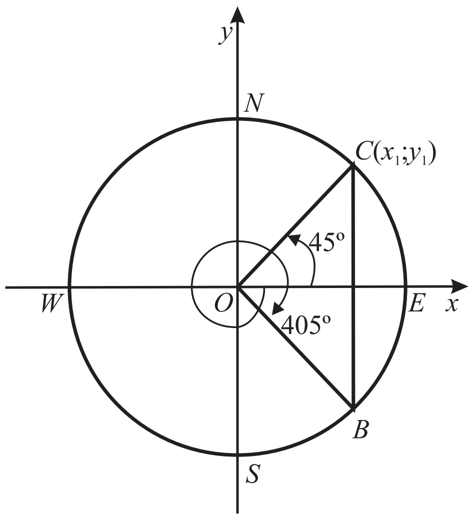
kesgitli bahasynyň ýokdugy bize mälimdir (S nokadyň abssissasynyň nola deň bolany sebäpli, (3) formulanyň sag bölegindäki aňlatma manysyny ýitirýär).

Şeýlelikde, $\alpha = 630^\circ = 270^\circ + 360^\circ$ (şeýle hem $\alpha = 270^\circ + n \cdot 360^\circ$, $n = 1, 2,...$) burç üçin tgα funksiýanyň kesgitli bahasy ýokdur.

4-nji mysal. 540° bolan burçuň kotangensini tapmaly. 540° öwrüm burçy almak üçin OE radiusa 360° bolan doly öwrümden soň, ýene-de 180° öwrüm bermek zerurdyr. Şunlukda, OE radiusyň OW ýagdaýa eýe boljakdygy äşgärdir. W nokadyň ordinatasynyň 0-a deň bolany sebäpli, α=540° bolanda ctgα funksiýasynyň kesgitlemesi bolan (4) formulanyň sag bölegindäki aňlatma manysyny ýitirýär. Diýmek, α=540° burç üçin ctg α funksiýanyň kesgitli bahasy ýokdur.

5-nji mysal. 405° bolan burçuň kotangensini tapmaly (*55-nji surat*).

OE başlangyç radius sagat diliniň hereketiniň ugruna 360° bolan doly öwrüm amala aşyrylan soň ýene-de 45° burça öwrülse, netijede, 405 gradus bolan öwrüm burç alnar. Şunlukda, OE radius OB ýagdaýa eýe bolupdyr diýeliň. Eger OE radius sagat diliniň hereketiniň ugruna diňe 45° burça öwrülen bolsa hem, onuň şol bir OB



55-nji surat

ýagdaýa eýe boljakdygy suratdan äşgärdir. Aýdylanlardan ctg (–405°) = = ctg (–45°) deňligiň dogrulygy gelip çykýar. Eger-de *OE* radiusa sagat diliniň hereketiniň tersine tarap 45° bolan öwrüm berilse, onda ol *OC* ýagdaýa eýe bolar. Özünem *C* nokat *Ox* oka görä *B* nokada simmetrik bolar, ýagny *C* nokadyň koordinatalary (x_1, y_1) bolsa, onda B nokadyň koordinatalary (x_1; $-y_1$) bolar. Onda 45° burçuň kotangesiniň 1-e deňliginden hem-de peýdalanyp, ctgα funksiýanyň kesgitlemesinden alarys:

$$\text{ctg}(-45^\circ)=\frac{x_1}{-y_1}=-\frac{x_1}{y}=-\text{ctg}\,45^\circ=-1.$$

Şeýlelikde, ctg(–405°)=–1.

Indi (1)-(4) formulalar arkaly kesgitlenilen trigonometik funksiýalaryň argumentleriniň ýolbererlik bahalarynyň köplügini anyklap bolar.

1) α-nyň islendik bahasynda sin α we *cos* α funksiýalaryň kesgitli bahalary bardyr, ýagny olaryň kesgitleniş ýaýlasy $-\infty<\alpha<+\infty$, bolar.

α-nyň $a\neq\pm90^\circ+k\cdot360^\circ$ (k=0, ±1, ±2,..) deňsizlikleri kanagatlandyrýan islendik bahasynda tg α funksiýanyň kesgitli bahasy bardyr. Hakykatdan-da, *OE* başlangyç radiusyň *O* nokadyň daşyndan 90°, ýene-de birnäçe gezek 360° öwrümi netijesinde ol *ON* ýagdaýa eýe bolar. Şolar ýaly hem, *OE* radiusyň O nokadyň daşynda -90^{o} we ýenede birnäçe gezek 360^{o} öwrümi netijesinde ol *OS* ýagdaýa eýe bolar. *N(O; R)* we *S(O;–R)* nokatlaryň abssissalary nola deň bolany sebäpli bolsa, α-nyň şeýle bahalarynda tgα α kesgitli baha eýe däldir.

$\alpha \neq \pm\ 90^{o}+\ k\cdot 360$ deňsizliklerdäki k koeffisiýent *OE* radiusyň amala aşyrýan doly öwrümleriniň sanyny görkezýär. Şol doly öwrümleriň sagat diliniň ugruna ýa-da onuň tersine bolany bilen netijäniň üýtgemejekdigi äşgärdir. Şol sebäpli k-nyň alyp biljek bahalary k=0, ±1,±2,... ýaly görkezilendir;

3) α-nyň $a\neq k\cdot 360^{o}$, şeýle hem $\alpha\neq \pm 180^{o}+k.\ 360^{o}$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan islendik bahasynda ctgα funksiýanyň kesgitli bahasy bardyr. Munuň şeýledigine göz ýetirmek üçin $E(R;\ O)$ we $W(-R;O)$ nokatlaryň koordinatalarynyň nola deňligini nazarda tutup, ctgα funksiýalary diňe y=0 bolanda kesgitli bahasynyň ýokdugyny görkezmek ýeterlikdir. ctgα funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny $\alpha \neq k\cdot 180^{o}$ deňsizlik arkaly hem görkezmek bolar.

Gönükmeler

1. Bir çyzgyda α we $180^{o}-\alpha$ burçlary guruň:

a) $\alpha = 30^{o}$; ç) $\alpha = 60^{o}$; e) $\alpha = 120^{o}$; f) $\alpha = -90^{o}$;
b) $\alpha = 45^{o}$; d) $\alpha = 90^{o}$; ä) $\alpha = 225^{o}$; g) $\alpha = -60^{o}$.

2. Bir çyzgyda α we $-\ \alpha$ burçlary guruň:

a) $\alpha = 30^{o}$; ç) $\alpha = 60^{o}$; e) $\alpha = 120^{o}$; f) $\alpha = -90^{o}$;
b) $\alpha = 45^{o}$; d) $\alpha = 90^{0}$; ä) $\alpha = 225^{o}$; g) $\alpha = -60^{o}$.

3. Burçlary gurmaly:

a) $\alpha = 405^{o}$; b) $\beta = 840^{o}$; ç) $\gamma = -390^{o}$; d) $\delta = -765^{o}$.

4. Burçlary gurmaly:

a) $\alpha = 420^{o}$; b) $\beta = 780^{o}$; ç) $\gamma = -450^{o}$; d) $\gamma = -750^{o}$.

5. Başlangyç radius *O* nokadyň daşynda α burça öwrülenden soň *OB* ýagdaýa eýe bolupdyr. Eger *B* nokat:

a) I çärýege; b) II çärýege; ç) III çärýege; d) IV çärýege degişli bolsa, onda sinα funksiýanyň alamatyny kesgitläň.

6. Başlangyç radius *O* nokadyň daşynda α burça öwrülenden soň *OB* ýagdaýa eýe bolupdyr. Eger *B* nokat:

a) I çärýege; b) II çärýege; ç) III çärýege; d) IV çärýege degişli bolsa, onda cosα funksiýanyň alamatyny kesgitläň.

7. Başlangyç radius *O* nokadyň daşynda α burça öwrülenden soň:

a) I çärýege; b) II çärýege; ç) III çärýege; d) IV çärýege düşen bolsa, onda *tg* α-nyň alamatyny kesgitläň.

Başlangyç radius *O* nokadyň daşynda α burça öwrülenden soň:

a) I çärýege; b) II çärýege; ç) III çärýege; d) IV çärýege düşen bolsa, onda ctg α-nyň alamatyny kesgitläň.

8. Burçy gurmaly we sin45^o = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ bolýandygyndan peýdalanyp, onuň sinusyny tapmaly:

a) α = 405^o; b) β = –450^o; ç) γ = 1350^o; d) δ = –135^o.

9. Burçy gurmaly we cos60^0 = $\frac{1}{2}$ bolýandygyndan peýdalanyp, onuň kosinusyny tapmaly:

a) α = 420^o; b) β = –60^o; ç) γ = 120^o; d) δ = –120^o.

Burçy gurmaly we tg45^o=1 bolýandygyndan peýdalanyp, onuň tangensini tapmaly.

a) α = 405^o; b) β = 765^o; ç) γ = –450^o; d) δ = –1125^o.

10. Burçy gurmaly we ctg 90^o bolýandygyndan peýdalanyp, onuň kotangensini tapmaly.

11. Burçy guruň we onuň kosinusynyň cos20^o-a deňdigini görkeziň:

a) α = 380^o; b) β = –20^o; ç) γ = 740^o; d) δ = –380^o.

12. Burçy guruň we onuň sinusynyň sin50^o-*a* deňdigini görkeziň:

a) α = 770^o; b) β = –230^o; ç) γ = 590^o; d) δ = 410^o.

13. α burçy guruň we tg α = 70^0 bolýandygyny görkeziň:

a) α = 430^o; b) β = –290^o; ç) γ = 250^o; d) δ = –110^o.

14. β burçy guruň we ctgβ= ctg 10^0 bolýandygyny görkeziň:

a) α = 370^o; b) β = –350^o; ç) γ = 190^o; d) δ = –170^o.

15. Aňlatmanyň sin α bilen nähili arabaglanyşygynyň bardygyny kesgitläň:

a) sin (–α); b) sin (180^0–α)*;* ç) sin (180^0+ α); d) sin (360^o+ α).

16. Aňlatmanyň *cos* α bilen nähili arabaglanyşygynyň bardygyny kesgitläň:

a) cos (360^o+ α); b) cos (–α); ç) cos (180^o– α); d) cos (180^o+ α).

17. Aňlatmanyň ctg α ($\alpha \neq k.\ 180^0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2,...$) bilen arabaglanyşygyny kesgitläň:

a) ctg ($180^o + \alpha$); b) ctg ($360^o + \alpha$); ç) ctg ($-\alpha$); d) ctg ($360^o + \alpha$).

18. Aňlatmanyň tg α ($a \neq \pm 90^o + k.\ 360^o$, $k = 0, \pm 1, \pm 2,...$) bilen arabaglanyşygyny kesgitläň:

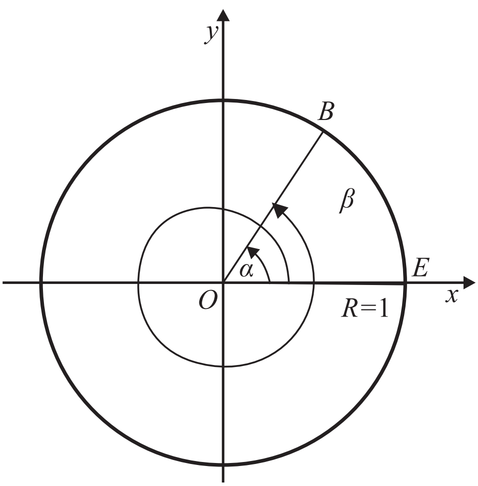
a) tg ($180^o - \alpha$); b) tg ($180^o + \alpha$); ç) tg ($360^o + \alpha$); d) tg ($-\alpha$).

§3. San argumentiniň trigonometrik funksiýalary

Radiusy 1-e deň bolan töwerek çyzalyň we α öwrüm burçuny guralyň (*56-njy surat*). Belli bolşy ýaly, α burçuň radian ölçegi BE duganyň uzynlygynyň OE radiusa bolan gatnaşygyna deňdir. Garalýan halda OE=1 bolany sebäpli, bu burçuň radian ölçegi BE duganyň uzynlygyna (has takygy, α öwrüm burç gurlanda E nokadyň töwerek boýunça geçen uzaklygyna) deňdir.

Eger BE duganyň uzynlygy x bolsa, onda $\alpha = x\ rad$ deňligiň alynjakdygy äşgärdir. Eger-de $\beta=\alpha+k\cdot 360^o$ bolsa, onda β öwrüm burç gurlanda E nokat töwerek boýunça k sany doly aýlaw geçenden soňra ýene-de x uzaklygy geçip, B nokat bilen gabat geler. Şol sebäpli şeýle halda $\beta=2k\pi+x\ rad$ boljakdygy hem düşnüklidir.

San argumentiň trigonometrik funksiýalary aşakdaky ýaly kesgitlenilýär.



56-njy surat

K e s g i t l e m e. Islendik x hakyky sanyň sinusy (kosinusy, tangensi, kotangensi) diýip, radian ölçegi x bolan burçuň sinusyna (kosinusyna tangensine, kotangensine) aýdylýar.

M y s a l. sin $\frac{\pi}{4}$ *rad* = sin 45º bolýandygy sebäpli,

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Gönükmeler

1. Hasaplamaly:

a) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; ç) $\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$; e) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\pi\right)$;

b) $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$; d) $\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$; ä) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\pi\right)$.

Gradus	**Radian**	**sin *α***	**cos *α***	**tg *α***	**ctg *α***
0º	0	0	1	0	—
30º	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45º	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60º	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90º	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	0
120º	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135º	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1	–1
150º	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
180º	π	0	–1	0	—

2. Hasaplamaly:

a) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; ç) $\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$; e) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\pi\right)$;

b) $\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$; d) $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$; ä) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\pi\right)$.

3. ctg$x$ funksiýasynyň bahasyny tapyň:

a) $x=-\frac{\pi}{6}$; ç) $x=\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$; e) $x=\left(\frac{\pi}{6}-\pi\right)$;

b) $x=\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$; d) $x=\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$; ä) $x=\left(\frac{\pi}{3}-2\pi\right)$.

4. tg x funksiýanyň bahasyny tapyň:

a) $x=-\frac{\pi}{3}$; ç) $x=\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$; e) $x=\left(\frac{\pi}{3}-\pi\right)$;

b) $x=\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$; d) $x=\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$; ä) $x=\left(\frac{\pi}{6}-2\pi\right)$.

5. Aňlatmanyň bahasyny 0,01 takyklykda tapyň:
a) sin 80º12′; ç) tg (–80º);
b) cos 117º36′; d) ctg (–160º);

6. Aňlatmanyň bahasyny 0,01 takyklykda tapyň:
a) sin 1,25; ç) tg 1,45;
b) cos (–1,6); d) ctg 2,8.

7. Hasaplamaly:

a) $2\sin\frac{\pi}{3}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$; d) $3-\sin^2\frac{\pi}{3}+2\cos^2\frac{\pi}{2}-5\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}$;

b) $\cos\pi-2\sin\frac{\pi}{6}$; e) $3\sin^2\frac{\pi}{2}-4\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}-3\cos^2\frac{\pi}{6}=3\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{2}$;

ç) $\cos^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{4}$; ä) $3\sin^2\frac{\pi}{2}-4\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}-3\cos^2\frac{\pi}{6}=3\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{2}$;

8. Hasaplamaly:

a) $2\cos\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\pi$; d) $-\sin\frac{\pi}{4}+3\cos\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;

b) $\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}$; e) $3\sin^2\frac{\pi}{2}-4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}-3\cos^2\frac{\pi}{6}=3\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2}$;

ç) $\cos^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{4}$; ä) $6\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\cos^2\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{4}{3}$.

9. Aňlatmanyň sinx bilen nähili arabaglanyşygy bar:

a) sin $(-x)$; b) cos $(-x)$; ç) sin $(\pi+x)$; d) sin $(2\pi+x)$?

10. Aňlatmanyň cosx bilen nähili arabaglanyşygy bar:

a) cos $(2\pi+x)$; b) cos $(-x)$; ç)cos $(\pi-x)$; d) ctg $(\pi+x)$?

11. Aňlatmanyň ctg$x$ ($x\neq k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,...$) bilen nähili arabaglanyşygy bar:

a) ctg $(\pi+x)$; b) ctg $(2\pi+x)$; ç) ctg $(-x)$; d) ctg $(\pi-x)$?

12. Aňlatmanyň tg$x$ ($x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2,...$) bilen arabaglanyşygyny kesgitläň:

a) tg $(\pi-x)$; b) tg $(2\pi+x)$; ç) tg $(2\pi x)$; d) tg $(-x)$;

13. Hasaplamaly:

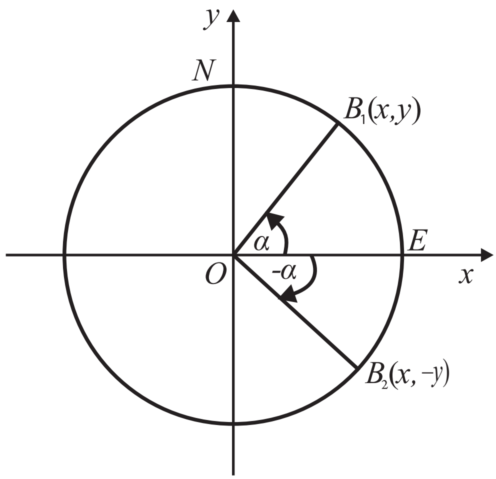
a) sin $(-1,5)$; b) cos 0,5; ç) tg $(-0,25)$; d) ctg 1,7.

14. Hasaplamaly:

a) sin $(-5^\circ24')$; b) cos (-40°); ç) tg 130°; d) ctg 85°.

§4. Trigonometrik funksiýalaryň häsiýetleri

Merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan birlik töwerek çyzalyň we şol bir çyzgyda α hem-de $-\alpha$ burçlary guralyň (*57-nji surat*). Bu burçlar gurlanda *OE* başlangyç radius degişlilikde OB_1 we OB_2 ýagdaýlara eýe bolup, B_1 we B_2 nokatlaryň absissalar okuna görä simmetrik boljakdygy äşgärdir. Suratdan görnüşi ýaly,



57-nji surat

B_1 nokadyň koordinatalary ($x;\ y$) bolsa, onda B_2 nokadyň koordinatalary ($x;\ –y$) bolar. Şol sebäpli

$\cos(–\alpha) = \cos\alpha$,

$\mathrm{tg}(–\alpha) = –\mathrm{tg}\alpha$,

$\mathrm{ctg}(–\alpha) = –\mathrm{ctg}\alpha$, deňlikler dogrudyr. Bu deňlikler san argumentli trigonometrik funksiýalar üçin

$\sin(–x) = –\sin x$,

$\cos(–x) = \cos x$,

$\mathrm{tg}(–x) = –\mathrm{tg}x$,

$\mathrm{ctg}(–x) = –\mathrm{ctg}x$ ýaly ýazylar.

Jübüt we täk funksiýalaryň kesgitlemelerinden (eger $f(–x)= f(x)$ bolsa jübüt, eger

$f(–x)= –f(x)$ bolsa täk) peýdalanyp ýokardaky deňliklerden trigonometrik funksiýalaryň esasy häsiýetleriniň birini alýarys,

1-nji häsiýet. **Sinus, tanges we kotanges täk funksiýalardyr, kosinus bolsa jübüt funksiýadyr.**

Mysallara garalyň.

Kosinusyň jübüt funksiýadygyndan peýdalanyp alarys:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tangesiň täk funksiýadygyndan peýdalanyp alarys:

$tg15^o + tg(-15^o) = tg15^o - tg15^o = 0$.

Indi bolsa şol bir çyzgyda α hem-de $\alpha+360^o$ öwrüm burçlary guralyň. Bu burçlar gurlanda *OE* başlangyç radiusyň şol bir *OB* ýagdaýa eýe boljakdygy äşgärdir. Şol sebäpli

$\sin(\alpha+360^o)=\sin\alpha$, $\cos(\alpha+360^o)=\cos\alpha$,

$tg(\alpha+360^o)=tg\alpha$, $ctg(\alpha+360^o)=ctg\alpha$ deňlikler ýerliklidir. Bu deňlikleri san argumentli trigonometrik funksiýalar üçin $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)= \cos x$, $\cos(x+2\pi)=tg x$, $ctg(x+2\pi)=ctg x$ ýaly ýazyp bolar. Şu hili deňligi kanagatlandyrýan funksiýalaryň ýörite ady hem bardyr.

Kesgitleme. **Eger *x* argumetiň her bir ýolbererlik bahasy üçin**

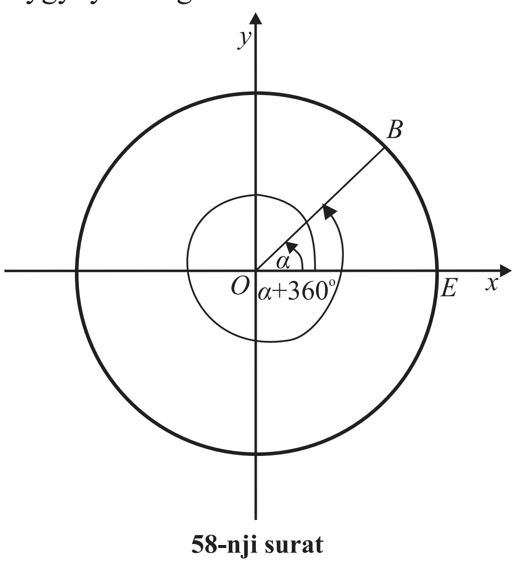
$$f(x+T)=f(x)$$

deňligi kanagatlandyrýan $T\neq 0$ san bar bolsa, onda *y=f(x)* funksiýa periodik funksiýa, *T* sana bolsa onuň periody diýilýär.

Bu kesgitlemä görä trigonometrik funksiýalaryň her biri periodik funksiýa bolup, 2π san (ýa-da 360^o-lyk burç) olaryň periodydyr (*58-nji surat*). Eger $(-\infty;+\infty)$ aralykda kesgitlenilen $y=f(x)$ funksiýa periodik funksiýa bolup, $T\neq 0$ san onuň periody bolsa, onda

$$f(x+2T)=f((x+T)+T)=f(x+T)=f(x)$$

alarys. Şoňa görä, $2T$ san hem bu funksiýanyň periodydyr. Şeýle usul bilen kT ($k=\pm1,\pm2...$) görnüşli sanlaryň her biriniň şol funksiýanyň periody bolýandygyny hem görkezmek bolar.

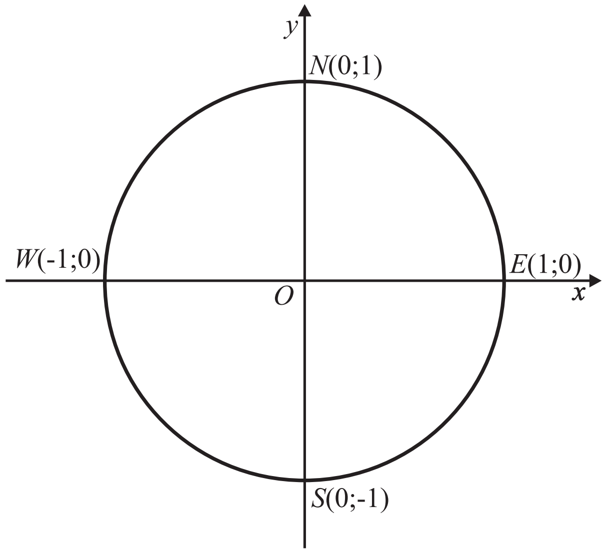


58-nji surat

Şeýlelikde, islendik periodik funksiýanyň tükeniksiz köp sanly periody bardyr. Kesgitlilik üçin funksiýanyň periody diýip, onuň položitel periodlarynyň iň kiçisine düşünilýär.

Ýokarda aýdylanlardan trigonometrik funksiýalaryň periodik funksiýalardygy hem-de olaryň periodlarynyň 2π-den uly däldigi äşgärdir. Eýsem olaryň periodlary 2π-den kiçi dälmikä?

59-njy suratdan görnüşi ýaly, töweregiň nokatlarynyň diňe iki sanysynyň ordinatasy nola deň bolup (($E(1;0)$ we $W(-1;0)$), töwerek boýunça olaryň arasyndaky uzaklyk π sana deňdir. Diýmek, sinus we tangens funksiýalaryň kesgitlemelerine laýyklykda, olara goňşy nollarynyň arasyndaky uzaklyk π sana deňdir.

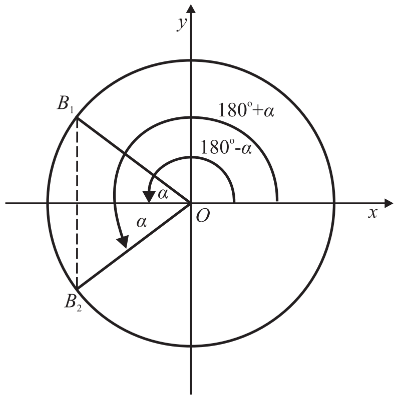


59-njy surat

Şeýle hem kosinus we kotanges funksiýalaryň goňşy nollarynyň arasyndaky uzaklygyň hem π sana deňdigini görkezmek bolar. Diýmek, periodik funksiýanyň kesgitlemesine görä, islendik trigonometrik funksiýanyň periody π sana bölünýändir we 2π-den kiçi däldir. Şeýlelikde, trigonometrik funksiýalaryň periodlary 2π-den kiçi bolsa, onda olar diňe π sana (ýagny180^{o}) deň bolup biler. Şolary bir çyzgyda α we $\alpha+180^{o}$ öwrüm burçlary guralyň. Bu burçlar guralanda OE başlangyç radius, degişlilikde, OB_1we OB_2 nokatlaryň O nokada görä simmetrik boljakdygy äşgärdir. Görnüşi ýaly, B_1 nokadyň koordinatalary $(-x,y)$ bolsa, onda B_1 nokadyň koordinatalary $(-x, -y)$ bolar. Şol sebäpli, islendik α burç üçin

$$\sin(\alpha+180^\circ)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha+180^\circ)=-\cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(\alpha+180^\circ)=\mathrm{tg}\alpha$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha+180^\circ)=\mathrm{ctg}\alpha$$

deňlikler ýerliklidir (*60-61-nji surat*). Bu deňlikler san argumetli trigonometrik funksiýalar üçin $\sin(x+\pi)=-\sin x$, $\cos(x+\pi)=-\cos x$, $\mathrm{tg}(x+\pi)=\mathrm{tg}\,x$, $\mathrm{ctg}(x+\pi)=\mathrm{ctg}\,x$ ýaly ýazylýar.

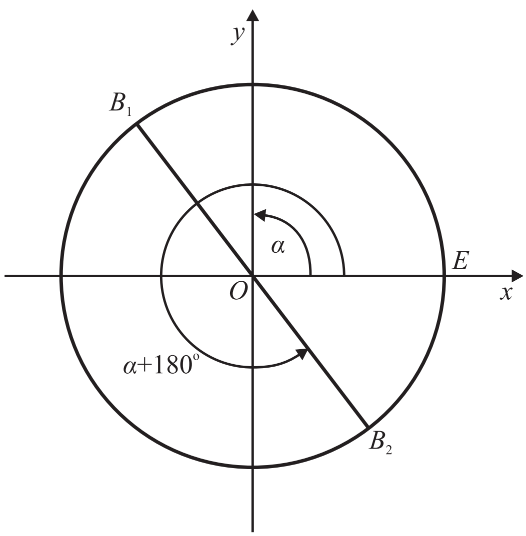


60-njy surat

Bu deňliklerde tangens we kotangens funksiýalaryň periodlarynyň π sana deňdigini, sinus we kosinus funksiýalaryň periodlarynyň bolsa π sana deň bolup bilmejekdigini görmek bolar.

Netijede, trigonometrik funksiýalarynyň ýene-de bir iňňän wajyp häsiýetini ýüze çykardyk.

2-nji häsiýet. Trigonometrik funksiýalaryň her biri periodik funksiýadyr, şeýle hem $\sin x$, $\cos x$ funksiýalaryň periodlary 2π san bolup, $\mathrm{tg}x$ we $\mathrm{ctg}x$ funksiýalaryň periodlary bolsa π sana deňdir.



61-nji surat

Mysallara garalyň.

sin$x$ funksiýanyň 2π periodly funksiýadygyndan peýdalanyp alarys:

$$\sin\frac{5\pi}{3}=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. ctg$x$ funksiýanyň π periodly funksiýadygyndan peýdalanyp alarys:

$$\mathrm{tg}10^{\circ}\cdot\mathrm{ctg}\frac{19}{18}\pi=\mathrm{tg}\frac{\pi}{18}\cdot\mathrm{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{18}\right)=\mathrm{tg}\frac{\pi}{18}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi}{18}.=\mathrm{tg}\frac{\pi}{18}\cdot\frac{1}{tg\frac{\pi}{18}}=1.$$

3. $y=\cos5x$ funksiýanyň periodyny tapalyň. cos$x$ funksiýanyň periodynyň 2π bolýanlygyndan peýdalanyp, $y=\cos5x=\cos(5x+2\pi)=$ $=\cos5(x+\frac{2\pi}{5})$ alarys. Onda x argumetiň her bir ýolbererlik bahasy üçin

$\cos5(x+\frac{2\pi}{5})=\cos5x$ deňlik ýerine ýetýär. Onda $T=\frac{2\pi}{5}$ san $y=\cos5x$

funksiýanyň periodydyr.

Gönükmeler

1. Trigonometrik funksiýalaryň häsiýetlerinden peýdalanyp hasaplamaly:

a) $\sin390^{\circ}$; ç) $\sin\left(-\frac{17}{4}\pi\right)$; e) $\mathrm{tg}(-1110^{\circ})$;

b) $\cos(-60^{\circ})$; d) $\cos\frac{25}{4}\pi$; ä) $\mathrm{ctg}\frac{4}{3}\pi$.

2. Trigonometrik funksiýalaryň häsiýetlerinden peýdalanyp hasaplamaly.

a) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; ç) $\sin750^{\circ}$; e) $\mathrm{tg}\frac{7}{4}\pi$;

b) $\cos\frac{13}{6}\pi$; d) $\cos(-780^{\circ})$; ä) $\mathrm{ctg}(-1125^{\circ})$.

3. Hasaplamaly:

a) $\sin820^{\circ}-\sin100^{\circ}$; ç) $\sin(-600^{\circ})+\sin240^{\circ}$;

b) $\cos(-7363^{\circ})-\cos163^{\circ}$; d) $\cos755^{\circ}-\cos35^{\circ}$;

4. Hasaplamaly:

a) tg 205^0·ctg (-25^o); b) ctg(-185^0)·tg 5^0;

ç) ctg 300^o; d) tg(-210^o).

5. $-180^o \le \alpha \le 180^o$ deňsizlikleri kanagatlandyrar ýaly edip, α burçuň trigonometrik funksiýasy görnüşinde aňladyň:

a) cos729^o; b) sin1268^o; ç) sin(-535^o); d) cos(-1001^o).

6. $-90^o \le \alpha \le 90^o$ deňsizlikleri kanagatlandyrar ýaly edip, α burçuň trigonometrik funksiýasy görnüşinde aňladyň:

a) tg375^o; b) ctg(-90^o); ç) tg(102^o); d) ctg530^o.

7. π sanyň y=sin2x funksiýanyň periody bolýandygyny görkeziň.

8. 4π sanyň $y=\cos\frac{x}{2}$ funksiýanyň periody bolýandygyny görkeziň.

9. $\frac{x}{3}$ sanyň y=tg3x funksiýanyň periody bolýandygyny görkeziň.

10. 3π sanyň $y=\text{ctg}\frac{x}{3}$ funksiýanyň periody bolýandygyny görkeziň.

§5. Trigonometrik funksiýalaryň grafikleri

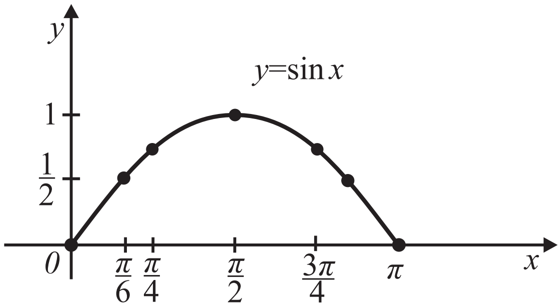
Islendik funksiýanyň grafigini argumente dürli san bahalary berip, funksiýanyň olara degişli bahalaryny hasaplap, soňra bolsa koordinatalar ulgamyndan alnan san jübütlerine degişli nokatlary belläp, olary endigan çyzyk bilen yzygider birleşdirmek arkaly gurup bolýandygy mälimdir.

***y*=sin*x* funksiýanyň grafigi.**

sin$x$ funksiýanyň 2π periodly funksiýa bolany sebäpli, onuň grafigini gurmak üçin grafigiň $[-\pi;\pi]$ aralygy (has takygy, uzynlygy, 2π bolan islendik aralyga degişli bölegini gurup bilmek ýeterlikdir.

Ilki bilen

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	π
$y=\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{2}$	0



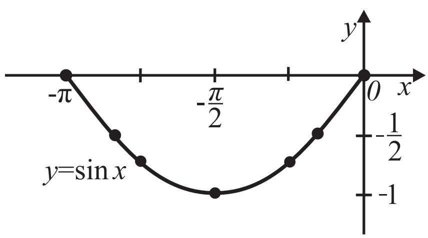
62-nji surat

tablisadan peýdalanyp, çyzgynyň $[0;\pi]$ aralyga degişli bölegini guralyň (*62-nji surat*).

Indi sin$x$ funksiýanyň täkliginden peýdalanyp, tablisa düzeliň.

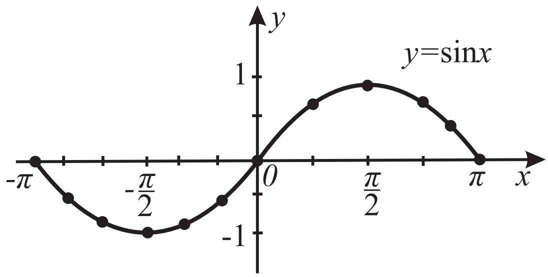
x	$-\pi$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
$y=\sin x$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Bu tablisadan peýdalanyp, çyzgynyň $[-\pi;0]$ aralyga degişli bölegini guralyň (*63-nji surat*).



63-nji surat

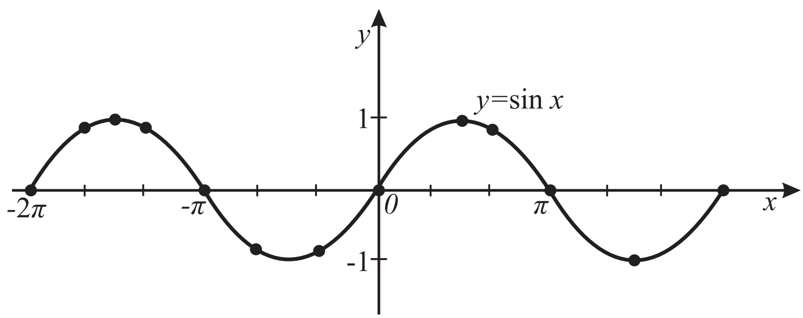
Suratlardaky egri çyzyklary bir çyzyga geçirip, $y = \sin x$ funksiýanyň $[-\pi;\pi]$ aralyga degişli grafigini alarys (*64-nji surat*).



64-nji surat

sin$x$ funksiýanyň periodynyň 2π sana deňdiginden peýdalanyp, çyzgyny çepe we saga dowam etdirip, $y = \sin x$ funksiýanyň tutuş grafigini gurup bolar (*65-nji surat*).

Bu grafik **sinusoida** diýlip atlandyrylýar.



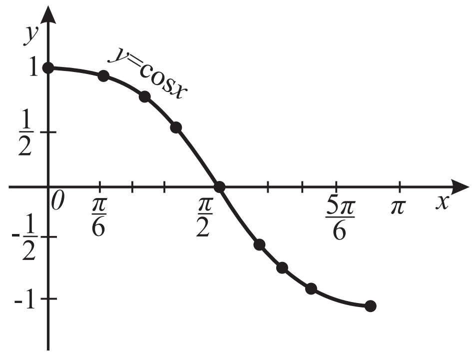
65-nji surat

***y* = cos *x* funksiýanyň grafigi.**

cos x funksiýanyň 2π periodly funksiýa bolany sebäpli, onuň grafigini gurmak üçin grafigiň $[-\pi;\pi]$ aralyga degişli bölegini gurup bilmek ýeterlikdir.

Ilki bilen

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y=cos$x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1



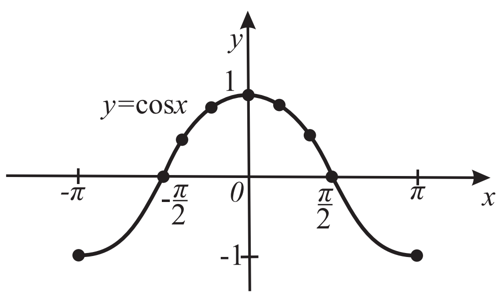
66-njy surat

tablisadan peýdalanyp, çyzgynyň $[0;\pi]$ aralyga degişli bölegini guralyň (*66-njy surat*). Indi cos$x$ funksiýanyň jübütliginden peýdalanyp, tablisa düzeliň.

x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
$y=\cos x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

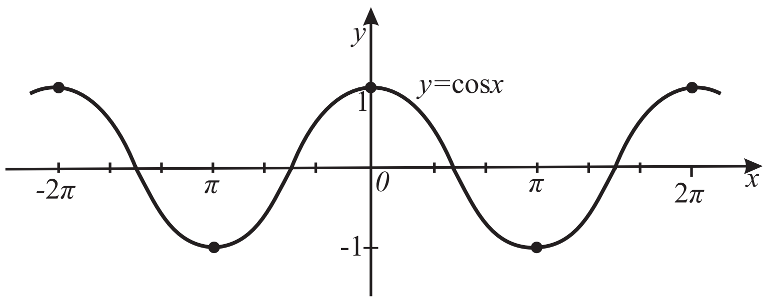
Bu tablisadan peýdalanyp, çyzgynyň $[-\pi;\pi]$ aralyga degişli bölegini guralyň.

Egri çyzyklary bir çyzga geçirip, $y=\cos x$ funksiýanyň $[-\pi;\pi]$ aralyga degişli grafigini alarys (*67-nji surat*).



67-nji surat

Indi $y = \cos x$ funksiýanyň periodynyň 2π-e deňligine esaslanyp, alnan çyzgyny çepe we saga dowam etdireliň. Onda $\cos x$ funksiýanyň tutuş grafigini alarys (*68-nji surat*).



68-nji surat

Bu grafige **kosinusoida** diýilýär.

***y*=tg*x* funksiýanyň grafigi.**

tg$x$ funksiýanyň π periodly funksiýa bolany sebäpli, onuň grafigini gurmak üçin $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ aralyga degişli bölegini gurup bilmek ýeterlikdir.

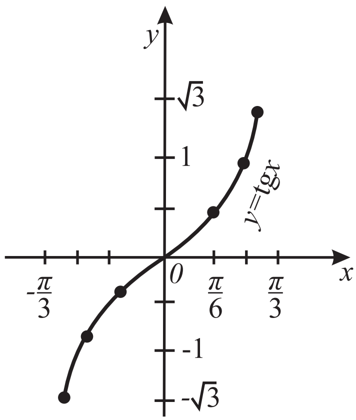
Ilki bilen

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y=\text{tg}\,x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

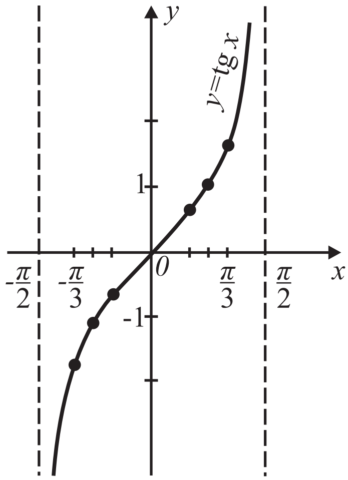
tablisa boýunça grafigiň $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ aralyga degişli bölegini guralyň (*69-njy surat*).

Soňra argumentiň $\frac{\pi}{2}$-ä ýakynlaşmagy bilen tgx-iň bahasynyň barha artýandygyndan we $x = \frac{\pi}{2}$ bolanda onuň kesgitli bahasynyň ýokdugyndan (şol sebäpli grafigiň $x = \frac{\pi}{2}$ wertikal göni çyzygy kesmeýänliginden), şeýle hem bu funksiýanyň täk funksiýadygyndan ugur alyp, grafigi $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ aralyga dowam etdireliň (*70-nji surat*).

Indi $y = \text{tg}x$ funksiýanyň periodynyň π sana deňligine esaslanyp,

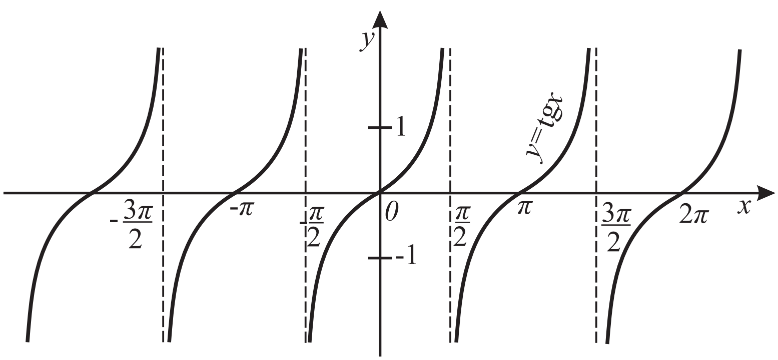


69-njy surat



70-nji surat

grafigiň $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ aralyga degişli bölegini $\left(\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)$,...., şeýle hem $\left(-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{5\pi}{2};-\frac{3\pi}{2}\right)$,..., aralyklara ýaýradyp, funksiýanyň tutuş grafigini gurup bolar (*71-nji surat*).



71-nji surat

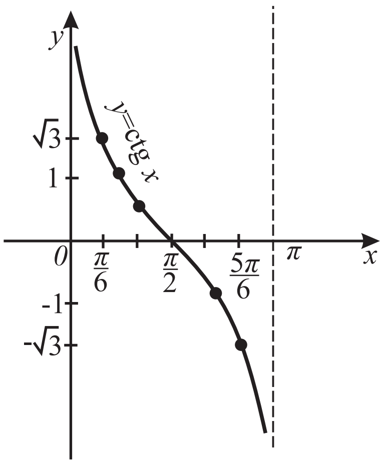
Bu grafik **tangensoida** diýlip atlandyrylýar.

***y* = ctg*x* funksiýanyň grafigi.**

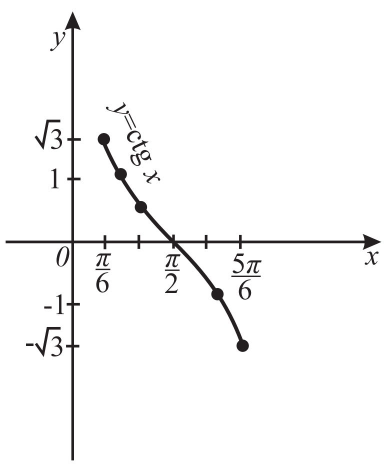
ctg x funksiýanyň π periodly funksiýa bolany sebäpli, onuň grafigini gurmak üçin grafigiň $(0; \pi)$ aralyga degişli bölegini gurup bilmek ýeterlikdir.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
y=ctg x	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	–1	$-\sqrt{3}$

Ilki bilen tablisa boýunça grafigiň $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ aralyga degişli bölegini guralyň (*72-nji surat*).

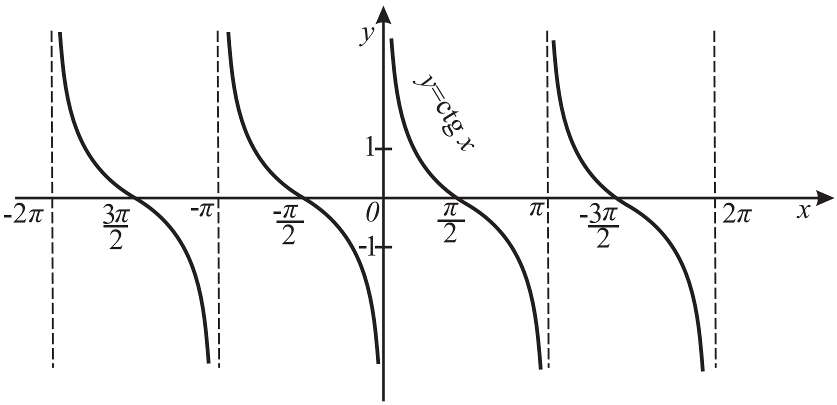


72-nji surat



73-nji surat

Soňra x=0 we $x=\pi$ bolanda ctg$x$-iň kesgitli bahasynyň ýokdugyndan, şol sebäpli grafigiň x=0 we $x=\pi$ wertikal göni çyzyklary kesmeýändiginden ugur alyp, grafigi $(0; \pi)$ aralyga dowam etdireliň (*73-nji surat*). Indi y =ctg$x$ funksiýanyň periodynyň π sana deňdigine esaslanyp, grafigiň $(0; \pi)$ aralyga degişli bölegini $(\pi; 2\pi)$, $(2\pi; 2\pi)$,..., şeýle hem $(-\pi; 0)$,..., aralyklara ýaýradyp, funksiýanyň tutuş grafigini gurup bolar (*74-nji surat*).



74-nji surat

Bu grafige **kotangensoida** diýilýär.

Gönükmeler

1. $y=\sin x$ funksiýanyň görkezilen aralyga degişli grafigini guruň:

a) $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; ç) $[0;\pi]$; e) $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$; f) $[-\pi;\pi]$;

b) $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$; d) $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$; ä) $[-\pi;0]$; g) $[0;2\pi]$.

2. $y=\cos x$ funksiýanyň görkezilen aralyga degişli grafigini guruň:

a) $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; ç) $[0;\pi]$; e) $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$; f) $[-\pi;\pi]$;

b) $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$; d) $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$; ä) $[-\pi;0]$; g) $[0;2\pi]$.

3. $y=\text{ctg}x$ funksiýanyň görkezilen aralyga degişli grafigini gurmaly.

a) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; b) $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$; ç) $\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$; d) $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

4. $y=\text{ctg}x$ funksiýanyň görkezilen aralyga degişli grafigini gurmaly.

a) $(0;\pi)$; b) $(-\pi;0)$; ç) $(\pi;\pi)$; d) $[0;\frac{\pi}{2}]$.

5. $y=\sin x$ funksiýanyň $[0;\pi]$ aralyga degişli grafigini guruň we onuň kömegi bilen argumentiň aşakdaky deňlemäni kanagatlandyrýan bahasyny tapyň:

a) $\sin x=0$; ç) $\sin x=-\frac{1}{2}$; e) $\sin x=-1$;

b) $\sin x=\frac{1}{2}$; d) $\sin x=1$; ä) $\sin x=2$.

6. $y=\cos x$ funksiýanyň $[0;\ 2\pi]$aralyga degişli grafigini guruň we onuň kömegi bilen argumentiň aşakdaky deňlemäni kanagatlandyrýan bahasyny tapyň:

a) $\cos x=0$; ç) $\cos x=-\frac{1}{2}$; e) $\cos x=-1$;

b) $\cos x=\frac{1}{2}$; d) $\cos x=1$; ä) $\cos x=-2$.

7. Grafiki usul bilen deňlemäniň $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ aralyga degişli köküni tapmaly:

a) $\text{tg}x=0$; b) $\text{tg}x=-1$; ç) $\text{tg}x=1$; d) $\text{tg}x=-3$.

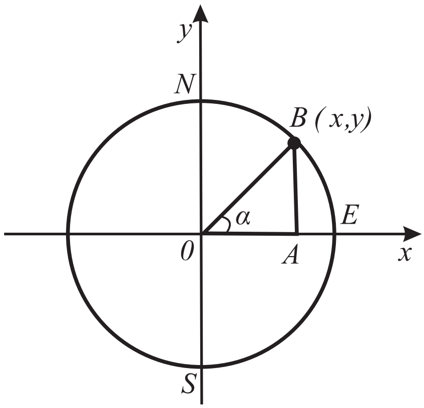
8. Grafiki usul bilen deňlemäniň $(0;\pi)$ aralyga degişli köküni tapmaly:

a) $\text{ctg}x=0$; b) $\text{ctg}x=1$; ç) $\text{ctg}x=-1$; d) $\text{ctg}x=3$.

9. Bir çyzgyda $y=\cos x$ funksiýanyň $[0;\pi]$ aralyga degişli we $y=\sin x$ funksiýanyň $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ aralyga degişli grafiklerini guruň.

10. Bir çyzgyda $y=\sin x$ funksiýanyň $\left[\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ aralyga degişli we $y=\cos x$ funksiýanyň $[0;\pi]$ aralyga degişli grafiklerini guruň.

§6. Şol bir argumentli trigonometrik funksiýalaryň arasyndaky gatnaşyklar



75-nji surat

Merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan birlik töwerek çyzalyň we *OE* başlangyç radiusy *α* burça öwreliň (*75-nji surat*). Şunlukda, ol *OB* ýagdaýa eýe bolar. Töweregiň radiusynyň 1-e deňdigi sebäpli (R=1), sinusyň we kosinusyň kesgitlemelerine laýykykda $y=\sin\alpha$ we $x=\cos\alpha$ deňlikleri alarys.

$(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=y^2+x^2=AB^2+OA^2$ bolar. Pifagoryň teoremasyna görä, *OBA* gönüburçly üçburçlukdan $AB^2+OA^2=OB^2$ alarys. $OB^2=R=1$ bolýandygyny göz öňünde tutup, ýokardaky deňliklerden $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (1) formulany alarys.

Deň argumetli sinus we kosinus funksiýalaryň arabaglanyşygy görkezýän bu deňlik **trigonometriýanyň esasy toždeswosydyr**. (1) deňligiň çep bölegindäki $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$, **aňlatma trigonometrik birlik** diýilýär.

Deň argumentli trigonometrik funksiýalaryň arabaglanyşygyny görkezýän ýene-de birnäçe deňlikleri getirip çykaralyň. Tangens we kotangens funksiýalaryň kesgitlemelerine laýyklykda

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\text{ we }\mathrm{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Ýagny $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. (2)

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \quad (3)$$

deňlikleri almak aňsatdyr. Bu deňlikler α-nyň islendik ýolbererlik bahasynda dogrudyr.

Deňligiň iki bölegini hem $\cos^2\alpha$ aňlatma bölüp ($\cos\alpha\neq 0$)

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

alarys. (2) deňlikden peýdalanyp, soňky deňligi

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad (4)$$

ýa-da $1+\mathrm{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$ ýaly ýazyp bileris.

Şonuň ýaly-da, (1) deňligiň iki bölegini hem $\sin^2\alpha$ aňlatma bölüp, ($\sin\alpha\neq 0$) we (3) deňlikden peýdalanyp,

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (5)$$

ýa-da $1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \mathrm{cosec}^2\alpha$ deňligi alarys. Şol bir argumentli trigonometrik funksiýalarynyň arasyndaky gatnaşyklary görkezýän (1)-(5) deňlikler, şeýle hem bize ozaldan mälim bolan

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad (6)$$

$$\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad (7)$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} \qquad (8)$$

deňlikler trigonometriýanyň esasy toždestwolarydyr.

San argumentli trigonometrik funksiýalar üçin (1)-(8) toždestwolar, degişlilikde, aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\sin^2x+\cos^2x=1, \qquad \mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\mathrm{ctg}\,x=\frac{\cos x}{\sin x}, \qquad 1+\mathrm{tg}^2x=\frac{1}{\cos^2x},$$

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}, \qquad \mathrm{cosec}\,x=\frac{1}{\sin x},, \qquad \mathrm{ctg}\,x=\frac{1}{\mathrm{tg}x}.$$

§7. Trigonometrik funksiýalaryň biri belli bolsa beýlekileri tapmak bilen baglanyşykly mysallary çözmek

Mysallara garalyň. 1. $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ we $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolýandygy belli bolsa $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{ctg}\alpha$ aňlatmalaryň bahalaryny tapalyň.

Trigonometriýanyň esasy toždestwosy bolan $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ formuladan $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ deňligi alarys. α-nyň II çärýege degişli burç bolany sebäpli, onuň kosinusy otrisateldir. Diýmek,

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}.$$

Onda

$$\text{tg}\alpha = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12} \text{ we } \text{ctg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha} = -\frac{1}{-\frac{5}{12}} = -\frac{12}{5}.$$

2. $\text{ctg}^2\alpha\,(\cos^2\alpha - 1)$ aňlatmany ýönekeýleşdirmeli.

$\text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ we $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ formulalardan peýdalanyp alarys:

$$\text{ctg}^2\alpha\,(\cos^2\alpha - 1) = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \cdot (-\sin^2\alpha) = -\cos^2\alpha.$$

3. $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ aňlatmany ýönekeýleşdirmeli.

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Gönükmeler

1. Aňlatmalary ýönekeýleşdirmeli:

a) $1 - \cos^2\alpha$;

b) $\cos^2\alpha + (1 - \sin^2\alpha)$;

ç) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \text{tg}\alpha$;

d) $\frac{\cos\alpha}{\text{ctg}\alpha}$;

e) $(\cos\alpha - 1)(1 - \cos\alpha)$; f) $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha - 1$;

ä) $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1$; g) $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha} + 1$.

2. Aňlatmalary ýönekeýleşdirmeli:

a) $\sin^2\alpha - 1$; e) $\frac{\sin\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}$;

b) $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; ä) $\frac{\sin\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}$;

ç) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$; f) $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha$;

d) $\cos^2\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha)$; g) $\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}$.

3. Eger $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolsa, onda α burçuň beýleki trigonometrik funksiýalaryny hasaplaň:

a) $\cos\alpha = -0{,}6$; b) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

4. Eger $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ bolsa, onda α burçuň beýleki trigonometrik funksiýalaryny hasaplaň:

a) $\sin\alpha = 0{,}6$; b) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$.

5. Aşakdaky deňlikleri kanagatlandyrjak α burç barmy:

a) $\sin\alpha = \frac{9}{41}$ we $\cos\alpha = \frac{40}{41}$;

b) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{9}$ we $\mathrm{ctg}\alpha = 1{,}8$?

6. Aşakdaky deňlikleri kanagatlandyrjak β burç barmy:

a) $\sin\beta = \frac{3}{4}$ we $\cos\beta = \frac{1}{4}$;

b) $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{5}{9}$ we $\mathrm{ctg}\,\beta = \sqrt{2+1}$?

7. Ýönekeýleşdyrmeli:

a) $1 - \frac{1}{\cos\alpha}$; ç) $\frac{1}{\sin x - 1} - \frac{1}{1 + \sin x}$;

b) $1 - \frac{\sin\beta \cdot \cos\beta}{\mathrm{ctg}\beta}$; d) $\frac{1 - \mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha - 1}$;

e) $\operatorname{ctg}\alpha - \frac{\cos\gamma - 1}{\sin\gamma}$;

ä) $\operatorname{tg}^2 x(\sin^2 x - 1)$.

8. Ýönekeýleşdyrmeli:

a) $\frac{1}{\sin\alpha} - 1$;

b) $\frac{\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\beta - \cos\beta}{2\sin\beta}$;

ç) $\operatorname{ctg}^2 x(\cos^2 - 1) + 1$.

d) $\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\cos x}$;

e) $\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}$;

ä) $\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} + \operatorname{tg}\gamma$.

9. Aňlatman özgerdiň:

a) $\operatorname{tg}(-x)\cos x + \sin x$;

b) $\cos^2\beta \cdot \operatorname{tg}^2(-\beta) - 1$;

ç) $\frac{\gamma}{\sin\gamma + \cos(-\gamma)}$;

d) $\frac{\operatorname{tg}^2\varphi - 1}{\operatorname{tg}^2\varphi + 1} + \cos^2\varphi$.

10. Aňlatmany özgerdiň:

a) $\operatorname{ctg} x \cdot \sin(-x) - \cos(-x)$;

b) $\frac{1 - \sin^2(-\alpha)}{\cos\alpha}$;

ç) $\operatorname{tg}(-\beta)\operatorname{ctg}\beta + \sin^2\beta$;

d) $\frac{\operatorname{tg}(-\gamma) + 1}{1 - \operatorname{ctg}\gamma}$;

e) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \operatorname{tg} x$;

ä) $\frac{\sin 3\varphi + \cos 3\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi} + \sin\varphi\cos\beta$.

11. Aňlatmanyň bahasynyň argumente bagly däldigini görkeziň:

a) $\frac{1 + 2\sin x\cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$;

b) $\sin^4 x + \cos^4 2\sin^2 x \cos^2 1$;

ç) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$.

12. Aňlatmanyň bahasynyň argumente bagly däldigini görkeziň:

a) $\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha}$;

b) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha$;

ç) $\frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}$;

d) $\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha$.

13. Aňlatmanyň iň uly bahasyny tapyň:

a) $1+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$;
b) $1-\sin\beta\cos\beta\,\mathrm{ctg}\beta$;
ç) $\sin^2\varphi\,\mathrm{tg}^2\varphi+5\cos^2\varphi-1$;
d) $\cos x+3\cos^2 x+3\cos^2 x$.

14. Aňlatmanyň iň uly bahasyny tapyň:

a) $1+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$;
b) $1-\sin\beta\cos\beta\,\mathrm{ctg}\beta$;
ç) $\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\varphi+5\sin^2\varphi-1$;
d) $\cos x+3\cos^2 x+3\sin^2 x$.

15. Toždestwony subut ediň:

a) $(2+\sin\beta)(2-\sin\beta)+(2+\cos\beta)(2-\cos\beta)=7$;

b) $\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

ç) $\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\mathrm{ctg}^2 x-\mathrm{tg}^2 x}=\sin^2 x\cdot\cos^2 x$;

d) $\dfrac{\cos^3-\sin^3 x}{1+\sin\varphi\cos\varphi}=\cos\varphi-\sin\varphi$;

e) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}$;

ä) $\dfrac{\mathrm{ctg}x}{\mathrm{ctg}x+\mathrm{tg}x}=\cos^2 x$.

16. Toždestwony subut ediň:

a) $(\sin\beta+\sin\alpha)(\sin\alpha-\sin\beta)-(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\beta-\cos\alpha)=0$;

b) $\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\sin\beta=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

ç) $\mathrm{ctg}^2 x-\cos^2 x=\mathrm{ctg}^2 x\cdot\cos^2 x$;

d) $\sin^2\varphi-\cos^4\varphi=\sin^2\varphi-\cos^2\varphi$;

e) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=2\mathrm{tg}\alpha$;   ä) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}=\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$.

17. Eger $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ bosa, onda α burçuň beýleki trigonometrik funksiýalaryny hasaplaň:

a) $\mathrm{tg}\,\alpha=1$;   b) $\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{1}{3}$.

18. Eger $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<\pi$ bolsa, onda α burçuň beýleki trigonometrik funksiýalaryny hasaplaň:

a) $\mathrm{ctg}\,\alpha=2{,}5$;   b) $\mathrm{tg}\,\alpha=-1$.

19. a we b sanlaryň iň bolmanda biri noldan tapawutly bolanda $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ we $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ deňlikleri kanagatlandyrýan α burç barmy?

$a \neq 0$ bolanda $\mathrm{tg}\alpha = a + \dfrac{1}{a}$ we $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{a}{a^2+1}$ deňlikleri kanagatlandyrýan α burç barmy?

20. Aňlatmany ýönekeýleşdirmeli:

a) $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$;

b) $(\mathrm{tg}\beta + \mathrm{ctg}\beta)(1+\cos\beta)(1-\cos\beta)$;

ç) $\dfrac{1+\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{tg}^2\gamma}{1+\mathrm{ctg}\gamma+\mathrm{ctg}^2\gamma}$; d) $\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}} + \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

21. Aňlatmany ýönekeýleşdirmeli:

a) $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;

b) $(\mathrm{ctg}\beta + \mathrm{tg}\beta)(1+\sin\beta)$;

ç) $\dfrac{\mathrm{tg}\gamma}{1-\mathrm{tg}^2\gamma}\cdot\dfrac{\mathrm{ctg}^2\gamma-1}{\mathrm{ctg}\gamma}$;

d) $\left(\dfrac{\sqrt{1-\sin x}}{1+\sin x} - \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)\cdot\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} - \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)$.

22. $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}8$ bolanda $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$-nyň bahasyny tapyň:

$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha = 2{,}3$ bolanda $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha$-nyň bahasyny tapyň.

$\sin\alpha + \cos\alpha = \alpha$ bolsa, onda

a) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; b) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ aňlatmanyň bahasyny tapyň.

23. Toždestwony subut etmeli:

a) $(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)^2 - (\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{ctg}\alpha)^2 = 4$;

b) $\mathrm{ctg}\beta + \dfrac{\sin\beta}{1+\cos\beta} = \dfrac{1}{\sin\beta}$;

ç) $\dfrac{\mathrm{ctg}\varphi}{\mathrm{ctg}\varphi + \mathrm{tg}\varphi} = \cos^2\varphi$;

d) $\dfrac{\mathrm{tg}\gamma}{1-\mathrm{tg}^2\gamma} = \dfrac{\mathrm{ctg}\gamma}{\mathrm{ctg}^2\gamma - 1}$;

e) $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \sin^2 x \cdot \cos^2 x;$

ä) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 a - \sin^2 a}{\operatorname{ctg}^2 a - \cos^2 a} = \operatorname{tg}^6 a.$

24. Toždestwony subut etmeli:

a) $\dfrac{1 + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1;$

b) $\operatorname{tg}\beta + \dfrac{\cos\beta}{1 + \sin\beta} = \dfrac{1}{\cos\beta};$

ç) $\dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi} = \sin^2\varphi;$

d) $\dfrac{\operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}^2\gamma} = \dfrac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}^2\gamma + 1};$

e) $\cos^4 x - \sin x = 1 - 2\sin^2 x;$

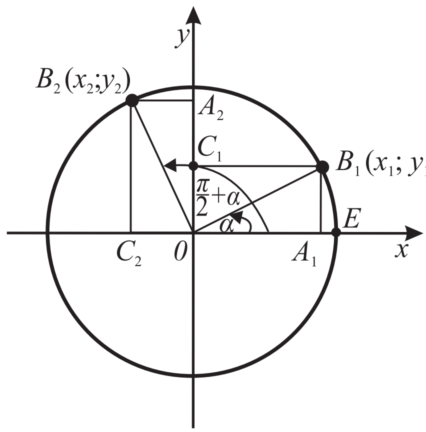
ä) $\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos^4\alpha}{\cos^4\alpha - \sin^2\alpha + \sin^4\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha.$

VIII bap

Trigonometrik formulalar

§1. Getirme formulalary

$\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ we ş.m. görnüşli burçlaryň trigonometrik funksiýalaryny α burçuň trigonometrik funksiýalaryna getirmäge mümkinçilik berýän formulalara **getirme formulalary** diýilýär. Merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan birlik töweregiň OE başlangyç radiusynyn α we $\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ burçlara deň bolan öwrümleri berlen (*76-njy surat*).



76-njy surat

Şunlukda, OE radius, degişlilikde OB_1 we OB_2 ýagdaýlara eýe bolar. B_1 nokatdan koordinatalar oklaryna B_1A_1 we B_1C_1 perpendikulýarlar geçireliň. Soňra $OA_1B_1C_1$ gönüburçluga O nokadyň daşynda $\frac{\pi}{2}$(ýagny 90º) burça deň bolan öwrüm bereliň. Onda B_1 nokat B_2 nokadyň $OA_1B_1C_1$ gönüburçluk bolsa, $OA_2B_2C_2$ gönüburçluga öwrüler. Bu ýerde $OA_2=OA_1$; $OC_1=OC_2$ deňlikler ýerliklidir.

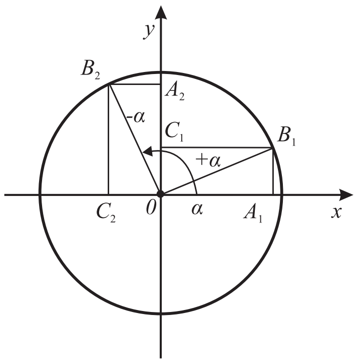
Getirme formulalarynyň tablisasy

α	$-\alpha$	$\pi/2-\alpha$	$\pi/2+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$3\pi/2+\alpha$	$3\pi/2+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$

Tablisadan görnüşi ýaly, üçünji, dördünji, ýedinji we sekizinji sütünlerde trigonometrik funksiýalar öz atlaryny garşylykly funksiýalara öwürýär, ýagny sinus-kosinusa, kosinus-sinusa, tangens-kotangense, kotangens-tangense öwürýär. Ikinji sütünde bolsa trigonometrik funksiýalaryň jübütliginden-täkliginden peýdalanyldy. Trigonometrik funksiýalaryň alamatlary bolsa aşakdaky tablisa boýunça alyndy.

α	I çärýek	II çärýek	III çärýek	IV çärýek
$\sin \alpha$	+	+	–	–
$\cos \alpha$	+	–	–	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	–	+	–
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	–	+	–

B_1 nokatdan koordinatalar oklaryna B_1A_1 we B_1C_1 perpendikulýarlar geçireliň. Soňra $OA_1B_1C_1$ gönüburçluga O nokadyň daşynda $\frac{\pi}{2}$ (ýagny 90º) burça deň bolan öwrüm bereliň (*77-nji surat*).



77-nji surat

Onda B_1 nokat B_2 nokadyň $OA_1B_1C_1$ gönüburçluk bolsa özüne deňululyk bolan $OA_2B_2C_2$ gönüburçlugyň üstüne düşer.

Bu ýerde $OA_1=OA_2$ we $OC_1=OC_2$deňlikler ýerliklidir. $B_1(x_1;\ y_1)$ we $B_2(x_2;\ y_2)$ nokatlaryň ýanaşyk çärýeklerde ýerleşýändiklerini göz öňünde tutup, soňky deňliklerden $y_2 = x_1$ we $x_2 = -y_1$ alarys. Onda töweregiň radiusynyň 1-e deň bolany sebäpli, sinusyň we kosinusyň kesgitlemelerine laýyklykda

$x_1 = \cos \alpha$, $y_1 = \sin \alpha$ hem-de

$x_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; $y_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ bolýandygyna görä alarys:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha \qquad (1)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha \qquad (2)$$

Getirme formulalarynyň her birini hem ýokarda görkezilen usul arkaly getirip çykarmak mümkindir. Ýöne olaryň islendigini (1) we (2) formulalary hem-de trigonometrik funksiýalaryň häsiýetlerini ulanmak arkaly hem alyp bolar.

Argumentiň ýolbererlik bahalarynda tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ we ctgα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ deňlikleriň ýeterlikdigini nazarda tutup, (1) we (2)-den alarys:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\,\mathrm{ctg}\alpha \tag{3}$$

$$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\,\mathrm{tg}\alpha. \tag{4}$$

(1)-(4) formulalarda α-ny – α bilen çalşyryp hem-de kosinusyň jübüt, sinus, tangens we kotangens funksiýalaryň bolsa täk funksiýalardygyny göz öňünde tutup alarys:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=-\mathrm{ctg}(-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=-\mathrm{tg}(-\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$$

Bu formulalar gysgaça:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha.$$

ýaly ýazylýar we α hem-de $\frac{\pi}{2}-\alpha$ burçlaryň jeminiň göni burça deňdigi sebäpli, kähalatlarda goşmaça burçuň formulalary diýlip hem atlandyrylýar. (1)-(4) formulalaryň kömegi bilen $\pi+\alpha$ burç üçin getirme formulalary almak hem kyn däldir.

Mysal üçin,

$$\sin(\pi+\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha.$$

Umuman, $\pi+\alpha$ burç üçin getirme formulalary

$$\sin(\pi+\alpha)=\sin\alpha$$

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}(\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$$

$$\mathrm{ctg}(\pi+\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$$

ýaly ýazylýar. Bu formulalaryň soňky iki sanysyny tangens we kotangens funksiýalarynyň π periodly funksiýalardygyndan peýdalanyp hem alyp bolardy.

$\frac{\pi}{2}-\alpha$ hem-de $\pi+\alpha$ burçlar üçin getirme formulalarynyň alnyş usullaryny ulanyp, $\pi-\alpha$ $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ we ş.m. burçlar üçin getirme formulalary hem getirip çykarmak bolar.

Getirme formulalaryny iki sany tablisa görnüşinde ýazalyň. Olaryň birinde $\pi+a$ $2\pi\pm\alpha$ we ş.m. burçlara, beýlekisinde bolsa $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$ we ş.m. burçlara degişli formulalary ýerleşdireliň.

x	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi+\alpha$	...
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\cos a$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	
$\mathrm{tg}\,x$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	
$\mathrm{ctg}\,x$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	

x	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$	...
sin x	cos α	cos α	–cos α	–cos α	
cos x	–sin α	sin α	sin α	–sin1	
tg x	–ctg α	ctg α	–ctg α	ctg α	
ctg x	–tg α	tg α	–tg α	tg α	

Tablisada görkezilen getirme formulalarynyň käbir kanunalaýyklyklara tabyn bolýandygyna göz ýetirmek bolýar. Munuň ähli getirme formulalary üçin hem şeýle boljakdygy trigonometrik funksiýalaryň periodiklik häsiýetinden gelip çykýar. Şol kanunalaýyklyklary islendik getirme formulany getirip çykarmazdan ýa-da tablisa seretmezden ýazmaga mümkinçilik berýän düzgünler görnüşinde formulirläp bolar:

a) α ýiti burç diýlip hasap edilende, deňligiň çep bölegindäki funksiýa haýsy alamata eýe bolýan bolsa, deňligiň sag böleginde hem şol alamaty goýmaly;

b) $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ we ş.m. burçlar üçin deňligiň sag böleginde, çep bölegindäki funksiýanyň adyny üýtgetmän ýazmaly;

ç) $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$ we ş.m. burçlar üçin bolsa deňligiň sag böleginde çep bölegindäki funksiýanyň adyny üýtgetmeli (özem sinus ýazylan bolsa – kosinus, kosinus bolsa – sinus, tangens bolsa – kotangens, kotangens bolsa - tangens) ýazmaly.

Mysallara garalyň:

1) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$ aňlatmany α burçuň trigonometrik funksiýasy arkaly aňladalyň.

Eger α-ny ýiti burç diýlip hasap etsek, onda $\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$ burç III çärýege degişli bolar. Sinus funksiýanyň III çärýekde otrisatel baha eýe bolýandygy sebäpli ýokarda getirilen düzgünleriň birine laýyklykda, deňligiň sag böleginde „ – “ alamatyny goýmaly.

Şol düzgünleriň beýlekisine görä, $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ burç üçin deňligiň çep böleginde sinus funksiýa bolsa, onda onuň sag böleginde kosinus funksiýa alynmalydyr.

Şeýlelikde, $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ burçuň sinusy üçin $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos a$ getirme formulasyny alarys.

2) $\cos\frac{8\pi}{3}$ aňlatmanyň bahasyny hasaplalyň.

Berlen aňlatmanyň argumentini $\frac{8\pi}{3} = 3\pi - \frac{\pi}{3}$ görnüşde ýazyp we degişli getirme formulasyny ulanyp alarys:

$\cos\frac{8\pi}{3} = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Gönükmeler

1. α burçuň trigonometrik funksiýalary arkaly aňladyň:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; b) $\cos(90^\circ + \alpha)$; ç) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$; d) $\sin(270^\circ - \alpha)$; e) $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$; ä) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$; f) $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$; g) $\operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha)$; h) $\cos(2\pi - \alpha)$; i) $\operatorname{tg}(360^\circ + \alpha)$; j) $\sin(2\pi - \alpha)$; k) $\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha)$.

2. α burçuň trigonometrik funksiýalary arkaly aňladyň:

a) $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; b) $\cos(\pi + \alpha)$; ç) $\operatorname{tg}\frac{3}{2}\pi + \alpha$; d) $\operatorname{ctg}(2\pi + \alpha)$; e) $\sin(360^\circ - \alpha)$; ä) $\cos(270^\circ - \alpha)$; f) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$; g) $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$.

3. Tablisany dolduryň:

x	$3\pi+\alpha$	$3\pi-\alpha$	$4\pi+\alpha$	$4\pi-\alpha$
$\sin x$				
$\cos x$				
$\operatorname{tg} x$				
$\operatorname{ctg} x$				

4. Tablisany dolduryň:

x	$\frac{5}{2}\pi + \alpha$	$\frac{5}{2}\pi - \alpha$	$\frac{7}{2}\pi + \alpha$	$\frac{7}{2}\pi - \alpha$
$\sin x$				
$\cos x$				
$\operatorname{tg} x$				
$\operatorname{ctg} x$				

5. sinα, cosα, tgα we ctgα aňlatmalary ýiti burçuň trigonometrik funksiýalary arkaly aňladyň:

a) $\alpha = 130^\circ$; b) $\alpha = -580^\circ$.

6. sinα, cosα, tgα we ctgα aňlatmalary ýiti burçuň trigonometrik funksiýalary arkaly aňladyň:

a) $\alpha = 190^\circ$; b) $\alpha = -330^\circ$.

7. Hasaplaň:

a) $\sin 240^\circ$; e) $\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$;

b) $\cos(-210^\circ)$; ä) $\cos\frac{2}{3}\pi$;

ç) $\operatorname{tg} 300^\circ$; f) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$;

d) $\operatorname{ctg}(-225^\circ)$; g) $\operatorname{ctg}\frac{7}{6}\pi$.

8. Hasaplaň:

a) $\sin(-330^\circ)$; ç) $\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi$;

b) $\cos 315^\circ$; d) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$.

9. Ýönekeýleşdiriň:

a) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; b) $\operatorname{ctg}(\alpha - 360^\circ)$;

ç) $\cos(\alpha-\pi)$; d) $\operatorname{tg}(-\alpha+270^{\circ})$.

10. Ýönekeýleşdiriň:

a) $\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$; ç) $\operatorname{tg}(\alpha-2\pi)$;

b) $\sin(\alpha-\pi)$; d) $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$.

11. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

a) $\sin(90^{\circ}-\alpha)+\cos(180^{\circ}+\alpha)+\operatorname{tg}(270^{\circ}+\alpha)+\operatorname{ctg}(360^{\circ}+\alpha)$;

b) $\sin(\pi-x)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\pi-x)$.

12. Aňlatmany ýönekeýleşdiriňi:

a) $\sin^2(180^{\circ}-x)+\sin^2(270^{\circ}-x)$;

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(\alpha-\pi)+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$.

13. Ýiti burçuň trigonometrik funksiýasy arkaly aňladyň:

a) $\sin(-178^{\circ})$; ç) $\operatorname{ctg} 680^{\circ}$;

b) $\cos 0{,}7\pi$; d) $\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{5}\right)$.

14. Ýiti burçuň trigonometrik funksiýasy arkaly aňladyň:

a) $\sin 1{,}6\pi$; ç) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3}{5}\pi\right)$;

b) $\cos(-1000^{\circ})$; d) $\operatorname{tg} 137^{\circ}$.

Eger $\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ}$ bolsa, onda $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ bolýandygyny görkeziň.

Eger A, B we C – üçburçlugyň içki burçlary bolsa, onda $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$ bolýandygyny görkeziň.

15. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

a) $\dfrac{\cos(-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(-\alpha)}{\sin(360^{0}-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(180^{0}+\alpha)}$;

b) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos(\alpha+2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\cdot\cos(1{,}5\pi+\alpha)}$.

16. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

$$\frac{\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin(\alpha+2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\cdot\cos(1,5\pi+\alpha)}.$$

17. Hasaplaň:

a) $\operatorname{tg}15^\circ\cdot\operatorname{tg}30^\circ\cdot\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}75^\circ$;

b) $\operatorname{ctg}110^\circ\cdot\operatorname{ctg}340^\circ+\sin160^\circ\cdot\cos110^\circ+\sin250^\circ\cdot\sin122^\circ$.

18. Hasaplaň:

a) $\operatorname{ctg}18^\circ\cdot\operatorname{ctg}36^\circ\cdot\operatorname{ctg}54^\circ\cdot\operatorname{ctg}72^\circ$;

b) $\operatorname{tg}17^\circ\cdot\operatorname{tg}287^\circ+\sin32^\circ\cdot\sin148^\circ-\sin302^\circ\cdot\sin122^\circ$.

19. Toždestwony subut ediň:

a) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\operatorname{tg}^2\alpha$;

b) $\operatorname{ctg}^2(2\pi-\alpha)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

20. Toždestwony subut ediň:

a) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\dfrac{\cos(\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\sin\alpha$;

b) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$.

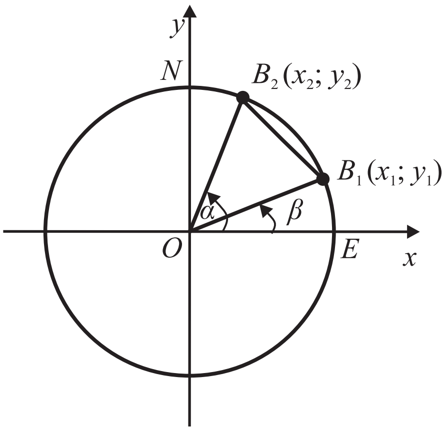
§2. Iki burçuň jeminiň trigonometrik funksiýalary

1. Iki burçuň jeminiň we tapawudynyň sinusy we kosinusy.

Merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan birlik töweregiň OE radiusyna β we α burçlara deň bolan öwrümler bereliň (*78-nji surat*). Onda başlangyç radius, degişlilikde OB_1 we OB_2 ýagdaýlara eýe bolar.

Şunlukda, $\angle B_1OB_2=\alpha-\beta$ hem-de $x_1=\cos\beta$, $y_1=\sin\beta$, $x_2=\cos\alpha$, $y_2=\sin\alpha$ boljakdygy äşgärdir.

$B_1(x_1;y_1)$ we $B_2(x_2;y_2)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklygy tapmagyň formulasyndan peýdalanyp,



78-nji surat

$B_1B_2^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$, ýagny $B_1B_2^2=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$. (1)

Indi bolsa, B_1OB_2 üçburçluk üçin kosinuslar teoremasyny ulanmak arkaly $B_1B_2^2$ ululygy başgaça ýazalyň:

$B_1B_2^2=OB_1^2+OB_2^2-2OB_1\cdot OB_2\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$.

Soňky alnan $B_1B_2^2=2-2\cos(\alpha-\beta)$ deňligi (1) deňlik bilen deňeşdirip,

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$ (2) alarys.

Bu formula iki burçuň tapawudynyň kosinusynyň formulasy diýilýär.

Mysal. 15º-lyk burçuň kosinusyny tapmaly.

$\cos15^\circ=\cos(60^\circ-45^\circ)=\cos60^\circ\cos45^\circ+\sin60^\circ\sin45^\circ=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1).$

Formulada β-ny $-\beta$ bilen çalşyryp hem-de $\cos(-\beta)=\cos\beta$ we $\sin(-\beta)=-\sin\beta$ bolýandygyny nazarda tutup, iki burçuň jemininiň kosinusynyň formulasyny alarys:

$$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.} \quad (3)$$

Getirme formulalarynyň we (2) formulanyň kömegi bilen jemiň sinusynyň formulasyny getirip çykarmak kyn däldir:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

ýagny

$$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.} \quad (4)$$

Bu formulada β-ny $-\beta$ bilen çalşyryp we sinusyň täk, kosinusyň bolsa jübüt funksiýalardygyndan peýdalanyp, iki burçuň tapawudynyň sinusynyň formulasyny alarys:

$$\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.} \quad (5)$$

§3. Iki burçuň jeminiň we tapawudynyň tangensi we kotangensi

(3) we (4) formulalardan jemiň tangensiniň formulasyny alyp bolar:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

ýagny

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \quad (6)$$

Şeýle usul bilen kotangeniň, (2) we (5) formulalaryň kömegi bilen bolsa tapawudyň tangensiniň hem-de kotangensiniň formulalaryny almak bolar:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}; \quad (7)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}; \quad (8)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}. \quad (9)$$

Gönükmeler

1. $75^o=45+30^o$ bolýandygyndan peýdalanyp hasaplaň:
a) sin 75^o; b) $\cos75^o$; ç) $\mathrm{tg}75^o$; d) $\mathrm{tg}75^o$.

2. $15^o=60^o–45^o$ bolýandygyndan peýdalanyp hasaplaň:
a) $\sin15^o$; b) $\cos15^o$; ç) $\mathrm{tg}15^o$; d) $\mathrm{ctg}15^o$.

3. Hasaplaň:
a) $\cos74^o\cdot\cos29^o+\sin74^o\cdot\sin29^o$;
b) $\sin46^o\cdot\cos44^o+\sin46^o\cdot\sin44^o$;
ç) $\dfrac{\mathrm{tg}13^\circ + \mathrm{tg}74^\circ}{1 - \mathrm{tg}13^\circ \cdot \mathrm{tg}74^\circ}$;
d) $\dfrac{\mathrm{ctg}36^\circ \cdot \mathrm{ctg}6^\circ + 1}{\mathrm{ctg}6^\circ - \mathrm{ctg}36^\circ}$.

4. Hasaplaň:
a) $\cos17^o\cdot\cos43^o–\sin17^o\cdot\sin43^o$;
b) $\sin61^o\cdot\cos31^o–\cos61^o\cdot\sin31^o$;
ç) $\dfrac{\mathrm{tg}46^\circ + \mathrm{tg}1^\circ}{\mathrm{ctg}38^\circ \cdot \mathrm{tg}1^\circ}$;
d) $\dfrac{\mathrm{ctg}52^\circ \cdot \mathrm{ctg}38^\circ - 1}{\mathrm{ctg}38^\circ\mathrm{ctg}52^\circ}$.

5. Aňlatmany özgerdiň:
a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \varphi\right)$; ç) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right) - \dfrac{1}{2}\cos\alpha$;
b) $\sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)$; d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

6. Aňlatmany özgerdiň:
a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \varphi\right)$; ç) $\sqrt{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\alpha}$;
b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \varphi\right)$; d) $\sqrt{3\cos\alpha - 2\cos\alpha\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right)}$.

7. Toždestwony subut ediň:
a) $\cos(\alpha–\beta)+\sin(–\alpha)\cdot\sin\beta=\cos\alpha\cdot\cos\beta$;
b) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(–\alpha)\cdot\cos(–\beta)=\cos\alpha\cdot\sin\beta$;
ç) $\cos(\alpha–\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta$;
d) $\sin(30^o– \alpha)–\sin(30^o+\alpha)=-\sqrt{3}\sin\alpha$.

8. Toždestwony subut ediň:

a) $\sin(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta$;

b) $\cos(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\sin(-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta$;

ç) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$;

d) $\cos(60^\circ-\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)=\sqrt{3\sin\alpha}$.

9. Ýönekeýleşdiriň:

a) $\cos2\alpha\cdot\cos\alpha+\sin2\alpha\cdot\sin\alpha$;

b) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$;

ç) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$; d) $\dfrac{\sin(\alpha\beta)+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$.

10. Ýönekeýleşdiriň:

a) $\sin3\alpha\cdot\cos\alpha-\cos3\alpha\cdot\sin\alpha$;

b) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

ç) $\dfrac{\cos\beta(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$; d) $\dfrac{\cos\beta(\alpha-\beta)-2\sin\cdot\sin}{2\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}$.

11. Hasaplaň:

a) $\sin\frac{3}{8}\pi\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)-\cos\frac{3}{8}\pi\cdot\cos\frac{\pi}{8}$;

b) $\sin(-15^\circ)\cdot\cos75^\circ+\cos15^\circ\cdot\sin(-75^\circ)$;

ç) $\dfrac{1-\mathrm{tg}27^\circ\cdot\mathrm{tg}33^\circ}{\mathrm{tg}27^\circ+\mathrm{tg}33^\circ}$; d) $\dfrac{\mathrm{ctg}\frac{\pi}{30}-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{5}}{\mathrm{ctg}\frac{\pi}{5}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi}{30}+1}$.

12. Hasaplaň:

a) $\sin\frac{3}{5}\pi\cdot\sin\left(-\frac{7}{5}\pi\right)+\cos\frac{7}{5}\pi\cdot\cos\frac{3}{5}\pi$;

b) $\sin53^\circ\cdot\cos7^\circ-\cos53^\circ\cdot\sin(-7^\circ)$;

ç) $\dfrac{1+\mathrm{tg}4^\circ\cdot\mathrm{tg}49^\circ}{\mathrm{tg}49^\circ+\mathrm{tg}4^\circ}$; d) $\dfrac{\mathrm{ctg}\frac{2}{15}\pi+\mathrm{ctg}\frac{\pi}{5}}{\mathrm{ctg}\frac{\pi}{5}\mathrm{ctg}\frac{2}{15\pi}-1}$.

13. Toždestwony subut ediň:

a) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\beta$;

b) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\beta}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta}$;

ç) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=2$;

d) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$.

14. Toždestwony subut ediň:

a) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)\cdot\sin^2\beta$;

b) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta}$;

ç) $(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)+(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=-2$;

d) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$.

15. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

a) $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

b) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$; ç) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}$;

d) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

16. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

a) $-\sin^2\alpha+\sin^2\left(\dfrac{2}{3}\pi+\alpha\right)+\sin^2\left(\dfrac{2}{3}\pi-\alpha\right)$;

b) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha+\cos\beta}$;

ç) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-1}$;

d) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

§4. Ikeldilen argumentiň trigonometrik funksiýalary

Iki argumentiň jeminiň trigonometrik funksiýalarynyň formulalaryny ulanyp, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$ aňlatmalary α burçuň trigonometrik funksiýalary arkaly aňladyp bolar.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$,

$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$

formulalarda β-ny α bilen çalşyryp alarys:

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$,

$\operatorname{tg} 2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg} 2\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$

Bu formulalara ikeldilen argumentiň formulalary diýilýär.

Gönükmeler

1. Ýönekeýleşdiriň:

a) $\dfrac{2\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

b) $\cos 2\alpha+\sin^2\alpha$;

ç) $\dfrac{\sin 2\beta}{2\sin\beta}-\cos\beta$;

d) $\dfrac{\cos 2\beta}{\cos\beta-\sin\beta}-\sin\beta$.

2. Ýönekeýleşdiriň:

a) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$;

b) $\cos^2\alpha-\cos 2\alpha$;

ç) $\dfrac{\sin^2\beta}{\cos\beta}-\sin\beta$;

d) $\dfrac{\cos 2\beta}{\cos\beta+\sin\beta}-\cos\beta$.

3. Hasaplaň:

a) $8\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}$;

b) $\dfrac{6\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}$;

ç) $4\cos^2\dfrac{\pi}{8}-4\sin^2\dfrac{\pi}{8}$;   d) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi}{12}-1}{2\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{12}}$.

4. Hasaplaň:

a) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$;   ç) $\sin 15^\circ\cos 105^\circ$;

b) $\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$;   d) $\cos^2\dfrac{7}{12}\pi-\sin^2\dfrac{7}{12}\pi$.

5. Aňlatmany $\dfrac{\alpha}{2}$ burçuň trigonometrik funksiýalary arkaly aňladyň:

a) $\sin\alpha$;   b) $\cos\alpha$;   ç) $\operatorname{tg}\alpha$;   d) $\operatorname{ctg}\alpha$.

6. Aňlatmany $\dfrac{\alpha}{4}$ burçuň trigonometrik funksiýalary arkaly aňladyň:

a) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$;   b) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$;   ç) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$;   d) $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

7. Toždestwony subut ediň:

a) $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-\sin 2\alpha$;

b) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$.

8. Toždestwony subut ediň:

a) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=1+\sin 2\alpha$;

b) $4\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha=\sin 4\alpha$.

9. Hasaplaň:

a) $4\sin 37^\circ 30'\cos 37^\circ 30'(\cos 37^\circ 30'-\sin^2 37^\circ 30')$;

b) $1-6\sin^2\dfrac{\pi}{12}\cos^2\dfrac{\pi}{12}$.

10. Hasaplaň:

a) $4\sin^2 75^\circ\cos^2 75^\circ-(\sin^2 75^\circ-\cos^2 75^\circ)^2$;

b) $\sin\dfrac{\pi}{16}\cos^3\dfrac{\pi}{16}-\sin^3\dfrac{\pi}{16}\cdot\cos\dfrac{\pi}{16}$.

11. Ýönekeýleşdiriň:

a) $\sin\dfrac{\pi-\alpha}{2}\cos\dfrac{\pi-\alpha}{2}$;   ç) $\dfrac{1+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\beta\right)}{2\cos\beta}$;

b) $\dfrac{4}{2\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi+2\alpha}{4}}$;   d) $\dfrac{1-\cos 2\beta+\sin 2\beta}{1+\cos 2\beta+\sin 2\beta}$.

12. Ýönekeýleşdiriň:

a) $2\cos^2\frac{\pi+\alpha}{4}-2\sin^2\frac{\pi+\alpha}{4}$;

b) $\dfrac{4\mathrm{tg}\frac{3\pi-\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{3\pi-\alpha}{2}}$;

ç) $\dfrac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\beta\right)}{2\sin\beta}$;

d) $\dfrac{2\sin 2\beta+\sin 4\beta}{2\sin 2\beta-\sin 4\beta}$.

13. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

a) $4\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{2\pi+\alpha}{2}$;

b) $\dfrac{1}{1-\mathrm{tg}\alpha}-\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}\alpha}$;

ç) $\dfrac{1-\mathrm{ctg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$;

d) $\mathrm{tg}\alpha+2\mathrm{ctg}2\alpha$.

14. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

a) $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

b) $\dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}\alpha}-\dfrac{1}{1-\mathrm{ctg}\alpha}$;

ç) $\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$;

d) $\mathrm{tg}\alpha+2\mathrm{tg}2\alpha+4\mathrm{ctg}4\alpha$.

§5. Ýarym argumentiň trigonometrik funksiýalary

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \qquad (1)$$

we

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha \qquad (2)$$

deňlikleri goşup,

$$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$$

ýa-da

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad (3)$$

formulany alarys.

Şuňa meňzeşlikde (1) deňlikden (2) deňligi aýryp

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad (4)$$

formulany alarys.

(3) we (4) formulalarda α-ny $\frac{\alpha}{2}$ bilen çalşyryp,

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2} \text{ we } \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad (5)$$

deňlikleri alarys. Olary degişlilikde

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \text{ we } \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (6)$$

ýaly ýazyp bolar. Soňky deňliklerden bolsa

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \text{ we } \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \qquad (7)$$

formulalary alyp bolar.

Ýarym argumentiň trigonometrik funksiýalary diýlip atlandyrylýan (5)-(7) formulalar anyk mysallary çözmek üçin ulanylanda deňligiň sag böleginde „+“ ýa-da „–“ alamatlaryň degişlisi saýlanylyp alynmalydyr.

Mysal üçin, (6) formulanyň kömegi bilen $\sin\frac{\pi}{8}$-iň bahasyny hasaplalyň.

Radian ölçegi $\frac{\pi}{8}$ -e deň bolan burç I çärýege degişlidir. I çärýekde sinusyň alamaty položitel bolany sebäpli, deňligiň sag böleginde „+“ alamaty goýulmalydyr. Onda

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Gönükmeler

1. $\cos\alpha = 0{,}6$ hem-de $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ bolsa, aňlatmanyň bahasyny hasaplaň:

a) $\sin\frac{\alpha}{2}$; b) $\cos\frac{\alpha}{2}$; ç) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; d) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

2. $\cos\alpha = –0{,}6$ hem-de $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ bolsa, hasaplaň:

a) $\sin\frac{\alpha}{2}$; b) $\cos\frac{\alpha}{2}$; ç) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; d) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

3. Hasaplamaly:

a) $\sin\frac{\pi}{12}$; b) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$.

4. Hasaplamaly:

a) $\cos\frac{\pi}{12}$; b) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

5. Deňligiň dogrudygyny görkeziň:

a) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; b) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

6. Deňligiň dogrudygyny görkeziň:

a) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; b) $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

7. $1+\sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ toždestwony subut ediň.

8. $1-\sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ toždestwony subut ediň.

§6. Biratly trigonometrik funksiýalaryň jemini we tapawudyny köpeltmek hasylyna özgertmegiň formulalary

Sinuslaryň hem-de kosinuslaryň jemlerini we tapawutlaryny trigonometrik funksiýalaryň köpeltmek hasyly görnüşinde aňlatmak bolar. Onuň üçin iki burçuň jeminiň we tapawudynyň trigonometrik funksiýalaryndan peýdalanarys. $\alpha=x+y$ we $\beta=x-y$ ornuna goýmalary ulanyp,

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y+$$
$$+\sin x\cos y-\cos x\sin y=2\sin x\cos y$$

alarys. Garalýan halda $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ we $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$ bolýandygyna görä

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

bolar. Bu formula **sinuslaryň jeminiň formulasy** diýilýär.

Görkezilen usul bilen sinuslaryň tapawudynyň, şeýle hem kosinuslaryň jeminiň we tapawudynyň formulalaryny getirip çykarmak bolar:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Mysallara garalyň.

1. sin75º+sin15° jemi hasaplalyň.

Formuladan peýdalanyp alarys:

$$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\cdot\cos\frac{75^\circ - 15^\circ}{2} =$$

$$= 2\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

2. $\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{7\pi}{12}$ tapawudy hasaplalyň.

Getirme formulasyndan peýdalanyp

$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$ alarys. Onda

$$\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{7\pi}{12} = \cos\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{7\pi}{12} = -2\sin\frac{\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}}{2}\times$$

$$\times\sin\frac{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2} = -2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6} = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Gönükmeler

1. Hasaplaň:

a) sin105º+sin75º;

b) cos105º–cos75º;

ç) $\sin\frac{11}{12}\pi - \sin\frac{5}{12}\pi$;

d) $\cos\frac{11}{12}\pi + \cos\frac{5}{12}\pi$;

e) $\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{7}{12}\pi$;

ä) $\sin\frac{\pi}{12} - \cos\frac{11}{12}\pi$.

2. Hasaplaň:

a) sin105º–sin75º;

b) cos105º + cos75º;

ç) $\sin\frac{11}{12}\pi + \sin\frac{5}{12}\pi$;

d) $\cos\frac{11}{12}\pi - \cos\frac{5}{12}\pi$;

e) $\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{7}{12}\pi$;

ä) $\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{11}{12}\pi$.

3. Köpeltmek hasyly görnüşinde aňladyň:

a) $\sin 2\alpha - \sin 5\alpha$;

b) $\cos x + \cos 5x$.

4. Köpeltmek hasyly görnüşinde aňladyň:

a) $\sin 3\alpha + \sin\alpha$;

b) $\cos 2x - \cos 3x$.

5. Ýönekeýleşdiriň:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$;

b) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos(6 - \alpha)$.

6. Ýönekeýleşdiriň:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$;

b) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \cos(6 - \alpha)$.

7. Deňligiň dogrudygyny görkeziň:

a) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;

b) $\sin\alpha - \cos\alpha = -\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

8. Deňligiň dogrudygyny görkeziň:

a) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$;

b) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

9. Hasaplaň:

a) $\dfrac{\cos 68^\circ - \cos 22^\circ}{\sin 68^\circ - \sin 22^\circ}$;

b) $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{15}}{\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{15}}$.

10. Hasaplaň:

a) $\dfrac{\cos 130^\circ + \cos 110^\circ}{\sin 130^\circ + \sin 110^\circ}$;

b) $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{15}}{\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{15}}$.

11. Köpeldijilere dagydyň:

a) $\frac{1}{2} - \sin\beta$;

b) $\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}$;

ç) $\sin\alpha + \sin2\alpha + \sin3\alpha$;

d) $\cos2\alpha - \cos4\alpha - \cos6\alpha + \cos8\alpha$.

12. Köpeldijilere dagydyň:

a) $\frac{1}{2} - \cos\beta$;

b) $\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ç) $\cos\alpha + \cos2\alpha + \cos3\alpha$;

d) $\sin\alpha + \sin2\alpha + \sin3\alpha + \sin4\alpha$.

13. Aňlatmany özgerdiň:

a) $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$;

b) $\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$.

14. Aňlatmany özgerdiň:

a) $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$;

b) $\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$.

15. Deňligiň dogrudygyny görkeziň:

a) $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$;

b) $\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$.

16. Deňligiň dogrudygyny görkeziň:

a) $\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$;

b) $\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$.

17. Hasaplaň:

a) $\mathrm{tg}22^\circ30' + \mathrm{tg}67^\circ30'$;

b) $\mathrm{ctg}\frac{11}{12}\pi - \mathrm{ctg}\frac{5}{12}\pi$;

ç) $\mathrm{ctg}22^\circ30' + \mathrm{ctg}67^\circ30'$;

d) $\mathrm{tg}\frac{11}{12}\pi - \mathrm{tg}\frac{5}{12}\pi$.

18. Hasaplaň:

a) $\mathrm{tg}22^\circ30' - \mathrm{tg}67^\circ30'$;

b) $\mathrm{ctg}\frac{11}{12}\pi + \mathrm{ctg}\frac{5}{12}\pi$;

ç) $\mathrm{ctg}22^\circ30' - \mathrm{ctg}67^\circ30'$;

d) $\mathrm{tg}\frac{11}{12}\pi + \mathrm{tg}\frac{5}{12}\pi$.

§7. Köpeltmek hasylyny jeme özgertmegiň formulalary

Köpeltmek hasylyny jeme özgertmegiň formulalaryny hem iki burçuň jeminiň we tapawudynyň trigonometrik funksiýalaryndan getirip çykarmak bolar.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

deňlikleri goşup, alarys:

$$\sin(\alpha+\beta)+ \sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta.$$

Bu deňlikden aşakdaky formulany alarys:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(a+\beta)+\sin(a-\beta)).$$

Eger

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

we

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

deňlikleri goşsak, aşakdaky deňlik alnar:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta.$$

Onda

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(a+\beta)+\cos(a-\beta)).$$

Eger-de (2) deňlikden (1) deňligi aýyrsak, onda $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cdot\sin\beta$ bolar. Bu ýerden

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(a+\beta)+\cos(a-\beta)).$$

Gönükmeler

1. Hasaplaň:

a) $\sin37^{o}30'\cdot\cos7^{o}30'$;

b) $\cos75^{o}\cdot\cos105^{o}$;

ç) $\sin52^{o}30'\cdot\sin7^{o}30'$;

d) $2\sin15^{o}\cdot\cos45^{o}$.

2. Hasaplaň:

a) $\sin7^{o}30'\cdot\cos52^{o}30'$;

b) $\cos37^{o}30'\cdot\cos7^{o}30'$;

ç) $\sin45^{o}30'\cdot\sin15^{o}$;

d) $2\sin105^{o}\cdot\sin75^{o}$.

3. Jem görnüşinde aňladyň:
a) $\sin(x+\alpha)\cdot\sin(x-\alpha)$; b) $4\sin20^{\circ}\cdot\cos50^{\circ}\cdot\cos80^{\circ}$.

4. Jem görnüşinde aňladyň:
a) $\sin(x+\alpha)\cdot\cos(x-\alpha)$; b) $4\cos15^{\circ}\cdot\sin20^{\circ}\cdot\sin40^{\circ}$.

§8. Esasy trigonometrik toždestwolar we olaryň netijeleri

$\sin\alpha$; $\cos\alpha$; $\text{tg}\alpha$ we $\text{ctg}\alpha$ trigonometrik funksiýalaryň özara baglanyşygyny takyklalyň.

1. Şol bir argumentiň kosinusynyň we sinusynyň kwadratlarynyň jemi bire deňdir:

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \qquad (1)$$

Subudy. Goý, α erkin burç bolsun. Birlik tegelegiň absissalar oky bilen α burçuny emele getirýän OM radiusynyň absissa we ordinata oklaryndaky proeksiýalary aşakdakylardyr:

$x=\cos\alpha$ we $y=\sin\alpha$, $OM=1$ bolandygy sebäpli,

$x^2+y^2=1$ ýa-da $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$. Subut etmelimiz hem şudy.

2. Tangensiň we kotangensiň kesgitlemesi boýunça alarys:

$$\text{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\qquad \text{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

(2) deňlikden gelip çykýan netijeler. Bu deňlikleri agzama-agza köpeldip alarys:

$$\text{tg}\alpha\cdot\text{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

Diýmek, $\text{tg}\alpha\cdot\text{ctg}\alpha=1$.

(1) deňligi ilki $\cos^2\alpha$, soňra $\sin^2\alpha$ agzama-agza bölüp aşakdakylary alarys:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha},$$

ýa-da $1+\text{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$. Bu deňligi başgaça şeýle ýazmak bolar:

$$1+\text{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha.$$

Şeýle usulda $\sin^2\alpha$ bölüp alarys:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

ýa-da $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, bu deňligi başgaça şeýle ýazmak bolar:

$1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \mathrm{cosec}^2\alpha.$

Mysal: $\frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\alpha + 1}{\mathrm{tg}\alpha - 1}$ toždestwony subut etmeli.

Subudy.

Çep bölegindäki 1-i $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$ jem bilen çalşyryp öwreris, soňra sanawjyny we maýdalawjyny $\cos\alpha$ böleris:

$$\frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\mathrm{tg}\alpha + 1}{\mathrm{tg}\alpha - 1}.$$

Şeýlelikde, berlen aňlatmanyň sag bölegindäki aňlatma emele geldi.

Mysal. $\sin\alpha = 0{,}62$ we $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ bolsa;

$\mathrm{tg}\alpha = -2{,}1$ we $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ bolsa;

$\cos\alpha = -0{,}23$ we $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ bolsa;

$\mathrm{ctg}\alpha = 3{,}2$ we $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ bolsa, beýleki trigonometrik funksiýalaryň bahalaryny hasaplaň.

§9. Trigonometrik deňlemeler

Aşakdaky deňlemelere has ýönekeý trigonometrik deňlemeler diýip at berilýär:

$$\cos x = m;\ \sin x = m;\ \mathrm{tg}x = m;\ \mathrm{ctg}x = m,$$

bu ýerde m – berlen sandyr.

Has ýönekeý trigonometrik deňlemeleri çözmek diýmek-trigonometrik funksiýanyň berlen bahasyna eýe bolan ähli burçlaryň (dugalaryň) köplügini tapmak diýmekdir.

cos$x$ = m deňleme. arccos m we –arccos m aňlatmalaryň bularyň kosinusy berlen baha eýedir. Bu dugalaryň ýerleşýän aralygy bolan –π-den π-e çenli aralyk ululygy boýunça doly töwerege (kosinusyň periodyna) deňdir, gözlenýän beýleki dugalaryň hemmesi şol nokatlarda gutarýarlar. Deňlemäniň umumy çözülişi (ýagny onuň hemme çözülişleriniň köplügi) şu formula bilen aňladylýar:

$$\boxed{x = \pm \arccos m + 2k\pi}$$

Eger umumy çözülişiň formulasynyň sag böleginde alamat seçip alynsa we k sana käbir bitin bahalar berilse, onda deňlemäniň kesgitli – hususy çözülişi alnar.

Eger $m > 1$ bolsa, onda deňlemäniň çözülişi ýokdur.

Mysallar.

1. $\cos x = \frac{1}{2}$.

$x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2k\pi$ (radian hasabynda)=±60º+360º.

2. cos$x$=0,7251; x=±arccos0,7251+360ºk≈±43º32′+360ºk (gradus hasabynda) ≈ ±0,7598 + 2$k\pi$.
(arccos0,7251 ≈ 43º32′ Bradisiň tablisasy boýunça tapylýar).

sin$x$ = m deňleme. Eger m < 1 bolsa, onda arcsin m we a–arcsin$m$ dugalaryň sinuslary berlen m baha eýedir. Bu dugalaryň uçlary ordinatalar okuna görä simmetrikdir. Hemme gözlenilýän dugalaryň köplügi tapylan iki duganyň üstüne islendik sanda doly aýlawy (sinusyň periodyny) goşmak bilen alnar:

$$x = \begin{Bmatrix} \arcsin x + 2k\pi \\ \pi - \arcsin m + 2k\pi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \arcsin m + 2k\pi \\ - \arcsin m + (2k+1)\pi \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

umumy çözülişini bir formulada ýazmak bolar:

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin m + n\pi}$$

(bu ýerde n – erkin bitin sandyr).

Dogrudan-da, n – jübüt, ýagny $n = 2k$ bolanda (1) formulanyň ýokarky setiri, n täk, ýagny n=2k+1 bolanda bolsa aşaky setiri alynýar.

Eger $|m|$>1 bolsa, onda deňlemäniň çözülişi ýokdur.

Mysallar.

1. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + n\pi = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi.$

2. $\sin x = 1$. Sinusy 1-e deň bolan dugalaryň hemmesi wertikal diametriň ýokarky ujunda gutarýarlar, şoňa görä-de, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ alarys (bu ýerde k – islendik bitin sandyr).

$\sin x = -1$ deňleme hem edil şonuň ýaly çözülýär.

$\mathbf{tg}\,x = m$ deňleme. Uzynlygy boýunça π-e, ýagny tangensiň periodyna deň bolan $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, interwalda m-iň islendik bahasynda berlen tangense eýe bolýan ýeke-täk arctg m duga bardyr.

Gözlenilýan dugalaryň uçlary üçin diametrleýin garşylykly iki ýagdaýyň bolmagy mümkindir. Gözlenilýän dugalaryň hemmesini arctg$m$ duganyň üstüne islendik sanda ýarym aýlawy (tangensiň periodyny) goşmak bilen almak bolar. Şoňa görä, gözlenilýän dugalaryň köplüginiň hemmesi aşakdaky formula bilen aňladylýar:

$$\boxed{x = \mathrm{arctg}\, m + k\pi}$$

$\mathbf{ctg}\,x = m$ deňleme. m-iň islendik bahasynda tükeniksiz köp çözülişlere eýedir:

$$\boxed{x = \mathrm{arcctg}\, m + k\pi}$$

(edil öňki haldaky ýaly degşirilýär).

Mysallar.

1. $\mathrm{ctg}\, x = -1$, $\quad x = \mathrm{arctg}(-1) + k\pi = \frac{3\pi}{4} + k\pi.$

2. $\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{3}$, $\quad x = \mathrm{arctg}\frac{1}{3} + 180°k \approx \mathrm{arctg}\, 0,3333 + 180°k =$
$= 18°26' + 180°k \approx 0,3217 + k\pi.$

Aşakdaky mysallarda has ýönekeý görnüşe getirilýän trigonometrik deňlemeleriň çözülişleri görkezilendir.

1. Deňlemäni çözüň: $2\sin x - 1 = 0$.

Çözülişi. $\sin x = \frac{1}{2}$, bu ýerden $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi.$

2. Deňlemäni çözmeli: $2\cos x + 3 = 0$.

Çözülişi. Deňlemäniň çözüwi ýokdur, sebäbi $\left|-\frac{3}{2}\right|>1$.

3. Deňlemäni çözmeli. $2\cos 3x + 1 = 0$.
Çözülişi.

$$\cos 3x=-\frac{1}{2}; \qquad 3x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k; \qquad x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi k.$$

4. Deňlemäni çözmeli: $2\sin x + \cos x = 0$.
Çözülişi. Deňlemäniň iki bölegini hem $\cos x$ bölüp alarys:

$2\operatorname{tg} x + 1 = 0$, bu ýerden $\operatorname{tg} x=-\frac{1}{2}$, $x=\operatorname{arctg}(-\frac{1}{2})+\pi k$.

§10. Trigonometrik deňlemeleri bir funksiýa getirmek usulynda çözmek

$\cos x$ görä kwadrat deňlemä garalyň:

$$2\cos^2 x+7\cos x+3=0.$$

Bu kwadrat deňlemäni kosinusa görä çözeliň:

$$\cos x=\frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{-7\pm 5}{4}.$$

Bu erden $\cos x=-\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $\cos x=-3$. Bu deňlemäniň çözüwi ýok.

Eger deňlemede näbelliniň dürli funksiýalary bar bolsa, onda olary bir funksiýa arkaly aňladyp, diňe bir funksiýasyny öz içine alýan deňlemäni almak mümkindir.

Trigonometrik funksiýalaryň birini beýlekisi arkaly aňladýan formulalary ulanmaklyk deňlemä kök belgisini girizip biler we deňleme olardan boşadylanda del çözüwleriň ýüze çykmagy mümkindir. Şoňa görä, ornuna goýmagyň radikallar girizmejegini saýlap almak (eger ol mümkin bolsa) maslahat berilýär.

Mysallar.

1. Deňlemäni çözmeli:
$2\cos^2 x+3\sin x=0$.

Ç ö z ü l i ş i. $\cos^2 x$–i $1-\sin^2 x$ bilen çalşyryp alarys:

$2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0$ ýa-da $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$.

Bu ýerden $\sin x = -\frac{1}{2}$ we $\sin x = 2$.

Birinji deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky bolar:

$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Ikinjiniň çözüwi ýokdur.

Bellik. Eger $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ ornuna goýmak ulanylsa, onda radikally deňleme emele geler.

2. Deňlemäni çözmeli:

$\sin x + \cos x = 1$.

$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ ornuna goýup, alnan deňlemäniň iki bölegini hem kwadrata göterip we gysgaldyp alarys:

$\sin^2 x - \sin x = 0$.

Bu ýerden $\sin x = 1$ we $\sin x = 0$ alarys.

Bu ýönekeý deňlemeleri çözüp, çözülişiň iki bölegini taparys:

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = n\pi$ (k we n bitin sanlar).

Barlag. Çözülişiň birinji bölegi üçin:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0.$$

Çözülişiň ikinji bölegi üçin:

$$\sin n\pi = 0; \cos n\pi = \left\{\begin{matrix} \text{eger } n \text{ jübüt bolsa}, 1 \\ \text{eger } n \text{ jübüt bolsa}, -1 \end{matrix}\right\}$$

Diňe $n=2m$ jübüt bahalarynda (1) deňlemäni kanagatlandyrýar. $n=2m+1$ täk bolanda çözülişiň ikinji bölegi del çözüwdir.

Deňlemäniň umumy çözülişi iki bölekden ybaratdyr:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ we } x = 2m\pi.$$

Çylşyrymly argumentiň trigonometrik funksiýalaryň belgisiniň aşagynda näbellisi bolan deňleme üçin hem, ençeme hallarda hemme trigonometrik funksiýalary bir funksiýa arkaly aňladyp, näbelliniň diňe bir trigonometrik funksiýasyny öz içine alýan deňleme almak mümkindir.

Mysal.

Deňlemäni çözmeli: $\cos 2x = \sin^2 x$.

Çözülişi. $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos x}{2}$

Ornuna goýmagy ýerine ýetirip, diňe bir näbelli funksiýasy bolan aşakdaky deňlemäni alarys:

$$\cos 2x = \frac{1-\cos x}{2} \quad \text{ýa-da} \quad 3\cos 2x = 1,$$

bu ýerden:

$$\cos 2x = \frac{1}{3};\ 2x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 360°k.$$

$$x = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + 180°k \approx 35°16' + 180°k.$$

§11. Trigonometrik deňlemeleri köpeldijilere dagytmak usulynda çözmek

Eger deňlemäniň hemme goşulyjylary çep bölegine geçirilenden soň, ony köpeldijilere dagytmak mümkin bolsa, onda deňleme köpeldijileriň köpeltmek hasyly nola deň bolan görnüşi alar. Soňra köpeldijileriň her birini gezekli-gezegine nola deňläp, alnan deňlemeleriň her birini çözmeli we hemme tapylan çözüwleri bir köplüge birikdirmeli.

Mysal. Deňlemäni çözmeli: $\sin 5x - \cos 3x = \sin x$.

Çözülişi. Hemme goşulyjylary çep bölege geçireliň we ony köpeldijilere dagydalyň:

$(\sin 5x - \sin x) - \cos 3x = 0,$

$2\sin 2x\cos 3x - \cos 3x = 0,$

$\cos 3x(2\sin 2x - 1) = 0.$

Çep böleginiň köpeldijilerini nola deňläp, deňlemeleriň toplumyny alarys:

$2\sin 2x - 1 = 0$ we $\cos 3x = 0$.

Birinji deňlemäni çözeliň:

$$\sin 2x = \frac{1}{2};\ 2x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \text{onda}\ x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Ikinji deňlemäni çözeliň:

$$\cos x = 0\,;\ 3x = \frac{\pi}{2} + n\pi;\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}.$$

Berlen deňlemäniň umumy çözülişi iki bölekden ybaratdyr:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \text{ we } x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}.$$

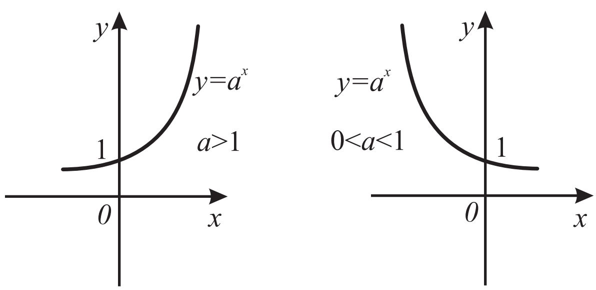
IX bap

Görkezijili we logarifmik funksiýalar. Görkezijili, logarifmik deňlemeler we deňsizlikler, olaryň ulgamlary

§1. Görkezijili funksiýa we onuň grafigi

Esasy hemişelik we görkezijisi üýtgeýän ululykly, $y=\alpha^x$ görnüşdäki funksiýa α esasly görezijili funksiýa diýilýär. Onuň şeýle häsiýetleri bardyr:

1) kesgitleniş oblasty R hakyky sanlaryň köplügi;
2) bahalar köplügi R_+ hemme položitel sanlaryň köplügi;
3) jübüt hem däldir, täk hem däldir;
4) x=0 bolanda funksiýanyň bahasy bire deňdir;



80-nji surat

5) $\alpha>1$ bolanda, san okunda funksiýa artýar, $0<\alpha<1$ bolanda bolsa funksiýa kemelýär. Funksiýanyň grafigi 80-nji suratda şekillendirilen.

Gönükmeler

1. Funksiýanyň grafigini guruň:

a) $y=4^x$; ç) $y=(0,7)^x$;
b) $y=(0,2)^x$; d) $y=(2,5)^x$.

2. Funksiýanyň bahalar köplügini görkeziň:

a) $y=-2^x$; $(1;+\infty)$, $(-\infty;0)$, $(-\infty;-1)$, $(-\infty;+\infty)$;

b) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$; $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$, $(1;+\infty)$, $(2;+\infty)$, $(0;+\infty)$;

ç) $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^x$; $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$, $(0;+\infty)$, $(-\infty;-1)$, $(-\infty;0)$;

d) $y=5^x-2$; $(5;+\infty)$, $(-2;+\infty)$, $(-1;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$.

§2. Görkezijili deňlemeleriň çözülişi

Näbellisi görkezijide bolan deňlemä görkezijili deňleme diýilýär. $\alpha^x=b$ görnüşdäki deňlemäni grafiki usulda çözmek bolar. Onuň üçin $y=\alpha^x$ funksiýanyň we $y=b$ göni çýzygyň grafiklerini gurup, olaryň kesişme nokatlarynyň absissalaryny tapmaly. Eger deňleme $\alpha^{r(x)}=\alpha^{p(x)}$ görnüşde berlen bolsa, onda deňlemedäki aňlatmalaryň iki böleginiň hem esaslarynyň deňligi sebäpli, ony çözmeklik $r(x)=p(x)$ görnüşdäki deňlemäni çözmekligi aňladýar, çünki olar deňgüýçlüdirler.

1-nji mysal. Görkezijili deňlemeleri çözmeli:

1) $3^{x^2-(5/7)x}=\sqrt[7]{9}$; 2) $3^{2x+2}+3^{2x}=30$; 3) $4^x+2^{x+1}-24=0$.

Birinji deňlemäniň sag bölegini hem 3 esasa getirip, $3^{x^2-\frac{5}{7}x}=3^{\frac{2}{7}}$ deňlemäni alarys. Ol deňleme $x^2-\frac{5}{7}x=\frac{2}{7}$ kwadrat deňlemä deňgüýçlüdir. Onuň kökleri $x_1=-\frac{2}{7}, x_2=1.$.

Ikinji deňlemäni çözmek üçin ony $3^2 \cdot 3^{2x} + 3^{2x} = 30$ görnüşde ýazyp we $3^{3x} = y$ çalşyrmany ulanyp, $9y + y = 30$ deňleme alarys. Onuň çözüwi $y=3$ bolar. Şoňa görä, başdaky näbellini tapmak üçin $3^{2x} = 3$ deňleme alarys. Onuň çözüwi $2x=1$, $x=\dfrac{1}{2}$ bolar.

Üçünji deňlemäni $4^x=(2^x)^2$, $2^{x+1}=2\cdot 2^x$ deňlikleri ulanyp, $(2^x)^2 + 2\cdot 2^x - 24 = 0$ görnüşde ýazmak bolar. Bu deňlemede $2^x = y$ çalşyrma girizip, $y^2 + 2y - 24 = 0$ kwadrat deňleme alarys. Onuň kökleri $y_1 = 4$, $y_2 = -6$ bolar. Şonuň üçin berlen deňlemäni çözmek $2^x = 4$, $2^x = -6$ deňlemeleri çözmeklige getirildi. Olaryň birinjisiniň köki $x=2$, ikinjisiniň bolsa köki ýokdur.

2-nji mysal. $\dfrac{(0.2)^{x-0,5}}{\sqrt{5}} = 5(0,04)^{x-1}$ deňlemäni çözmeli.

Deňlemäniň iki bölegini hem $\dfrac{1}{5}$ esasly dereje görnüşine getireliň:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-0,5}\left(\frac{1}{5}\right)^{0,5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\right)^{x-1} \text{ ýa-da } \left(\frac{1}{5}\right)^{x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-3}.$$

Esaslary deň bolan bu görkezijili deňleme $x = 2x - 3$ deňlemä deňgüýçlüdir. Onuň köki $x = 2$ bolar.

Gönükmeler

Deňlemäni çözmeli.

1. a) $3^{x+1} - 2\cdot 3^{x-2} = 75$; ç) $5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 1 = 162$;

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} - 5^{-(x+1)} = 4,8$; d) $3\cdot 9x + 9^{x-2} = 4,6$.

2. a) $\sqrt[4]{a^{x+1}} = \sqrt[3]{a^{x-2}}$; ç) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x} = \left(\frac{3}{2}\right)$;

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x} = \left(\frac{4}{3}\right)^{5}$; d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{x}$.

3. a) $\sqrt[16]{(0,25)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$; b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$.

4. a) $3^{x+2} + 3^{x-1} = 28$; b) $3^{2x} - 3^{x} = 702$;

ç) $7^{x+2}+2\cdot 7^{x-1}=345$; d) $4^x+2^{x+1}=80$.

§3. Görkezijili deňsizlikleriň çözülişi

Görkezijili $a^{r(x)}<a^{p(x)}$ görnüşdäki deňsizlikler çözülende görkezijili funksiýalaryň $a>1$ bolanda artýandygy we $0<a<1$ bolanda kemelýändigi ulanylýar, ýagny $a^{r(x)}<a^{p(x)}$ deňsizlikden $0<a<1$ bolanda $r(x)>p(x)$ deňsizlik we $a>1$ bolanda $r(x)<p(x)$ deňsizlik gelip çykýar.

1-nji mysal. Görkezijili deňsizlikleri çözmeli:

1) $2^{3x+7}<2^{2x-1}$; 2) $(0,04)^{5x-x^3-8}\le 625$.

Birinji deňsizlikdäki derejäniň esasy 1-den uludyr we şonuň üçin ol deňsizlikden $3x+7<2x-1$ deňsizlik gelip çykýar, onuň çözüwi $x<-8$ bolar. Ikinji deňsizligi çözmek üçin onuň sag bölegini $625=(25)^2=(1/25)^{-2}=(0,04)^{-2}$ görnüşde ýazyp, deňsizligi $(0,04)^{5x-x^3-8}\le(0,04)^{-2}$ görnüşde ýazmak bolar. Ol deňsizlikdäki derejäniň esasynyň 1-den kiçidigi esasynda ondan $5x-x^2-8\ge -2$ deňsizlik gelip çykýar, ýagny $x^2-5x+6\le 0$ deňsizlik alynýar. Ony $(x-2)(x-3)\le 0$ görnüşde ýazyp, ol deňsizligiň çözüwini taparys: $2\le x\le 3$.

2-nji mysal. $8\dfrac{3^{x-2}}{3^x-2^x}>1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ deňsizligi çözmeli.

Deňsizligiň çep böleginiň sanawjysyny hem, madalawjysyny hem 3^x köpeldip alarys: $8\dfrac{3^{-2}}{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^x}>1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$. Bu ýerde $t=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$, $t>0$ çalşyrma girizip, deňsizligi $8\dfrac{3^{-2}}{1-t}>1+t$ görnüşde ýazarys, ýagny $\dfrac{8}{9(1-t)}>1+t$. Ony $\dfrac{8}{9(1-t)}-1-t>0$ görnüşde ýazyp çözeliň:

$$\frac{8}{9(1-t)}-1-t>0 \Leftrightarrow \frac{9t^2-1}{9(1-t)}>0 \Leftrightarrow \frac{9t^2-1}{9(t-1)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(9t^2-1)<0 \Leftrightarrow (t-1)(t-\frac{1}{3})(t+\frac{1}{3})<0 .$$

Interwallar usuly esasynda bu deňsizligiň çözüwleri $t<-\frac{1}{3}$ ýa-da $\frac{1}{3}<t<1$ bolar. $t=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ çalşyrmanyň esasynda alynýan $\left(\frac{2}{3}\right)^x<-\frac{1}{3}$ deňsizligiň çözüwi ýokdur, $\left(\frac{2}{3}\right)^x<-\frac{1}{3}$ deňsizligi bolsa logarifm toždestwosy esasynda $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}}<\left(\frac{2}{3}\right)^x<\left(\frac{2}{3}\right)^0$ görnüşinde ýazmak bolar. Ol deňsizlikden bolsa görkezijili funksiýanyň häsiýeti boýunça $0<x<\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}$ deňsizlik alynýar. Şeýlelikde, deňsizligiň çözüwi $\left(0;\ \log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}\right)$ interwaldyr.

§4. Görkezijili deňlemeler we deňsizlikler ulgamy

Belli bolan algebraik deňlemeler we deňsizlikler ulgamlarynyň çözüliş usullaryny görkezijili deňlemeler we deňsizlikler ulgamlary. üçin hem ulanmak bolar.

1-nji mysal. Görkezijili deňlemeler ulgamlaryny çözmeli:

$$1)\begin{cases}2^x\cdot 3^y=24,\\ 2^7\cdot 3^x=54.\end{cases}\quad 2)\begin{cases}(x-y)0,5^{y-x}=5\cdot 2^{x-y},\\ (x-y)^{(x+y)/7}=125.\end{cases}$$

Birinji ulgamy şeýle görnüşde ýazalyň:

$$\begin{cases}2^x\cdot 3^y=2^3\cdot 3,\\ 2^y\cdot 3^x=2\cdot 3^3.\end{cases}$$

Ulgamyň birinji we ikinji deňlemelerini köpeldip alarys:

$$2^{x+y}\cdot 3^{x+y}=2^4\cdot 3^4 \Leftrightarrow 6^{x+y}=6^4 \Leftrightarrow x+y=4\cdot$$

Ulgamyň birinji deňlemesini ikinjisine bölüp alarys:

$$2^{x-y}\cdot 3^{y-x}=2^2\cdot 3^{-2} \Leftrightarrow 2^{x-y}/3^{x-y}=2^2/3^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2/3)^{x-y}=(2/3)^2 \Leftrightarrow x-y=2\,.$$

Alnan $x+y=4,\ x-y=2$ ulgamy çözüp, berlen ulgamyň çözüwini taparys: $x=3,\ y=1$.

Ikinji ulgamyň birinji deňlemesini $(x-y)2^{x-y}=5\cdot 2^{x-y}$ görnüşinde ýazyp we onuň iki bölegini hem $2^{x-y}\neq 0$ aňlatma bölüp, $x-y=5$ deňlemäni alarys. Ulgamyň ikinji deňlemesinde $x-y$ tapawudyň ornuna 5 goýup alarys:

$$5^{(x+y)/7}=125 \Leftrightarrow 5^{(x+y)/7}=5^3 \Leftrightarrow (x+y)/7=3 \Leftrightarrow x+y=21\cdot$$

Alnan $x-y=5,\ x+y=21$ ulgamy çözüp taparys: $x=13,\ y=8$.

2-njy mysal. Görkezijili deňsizlikler ulgamyny çözmeli:

$$\begin{cases}(2/3)^x\cdot(8/9)^{-x}>27/64,\\ 2^{x^2-6x-3,5}<8\sqrt{2}.\end{cases}$$

Bu ulgamy çözmek üçin özgertmeler geçireliň:

$$\begin{cases}(2/3)^x\cdot(8/9)^{-x}>27/64,\\ 2^{x^2-6x-3,5}<8\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(3/4)^x>(3/4)^3,\\ 2^{x^2-6x-3,5}<2^{7/2}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x<3\\ x^2-6x-3,5<3,5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<3,\\ x^2-6x-7<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<3,\\ (x+1)(x-7)<0\end{cases}$$

Ikinji deňsizligiň çözüwi $(-1,\ 7)$ interwaldyr. Şonuň üçin hem berlen ulgamyň çözüwi $(-1,\ 3)$ interwal bolar.

§5. Logarifmiň kesgitlenişi we häsiýetleri

1. Logarifm düşünjesi. Goý, $0<a\neq 1$ bolsun. b sany almak üçin α esasy derejä götermek gerek bolan derejäniň k görkezijisine

b sanyň α esasa görä logarifmi diýilýär we ol san $\log_a b = k$ bilen belgilenýär (okalyşy: logarifm α esasa görä b deňdir k).

Bu kesgitleme boýunça $a^k = b$ we $k = \log_a b$ deňlikler deňgüýçlüdir. Olardan esasy logarifm toždestwosy diýlip atlandyrylýan

$$a^{\log_a b} = b$$

deňlik alynýar. Şeýlelikde, $2^5 = 32$ we $5 = \log_2 32$; $3^4 = 81$ we $4 = \log_3 81$; $(0,5)^{-3} = 8$ we $-3 = \log_{0,5} 8$ deňlikler deňgüýçlüdir.

2. Logarifmiň häsiýetleri we bir esasdan beýleki esasa geçmek formulalary. Logarifmiň kesgitlemesinden we derejeleriň häsiýetlerinden gelip çykýan şeýle häsiýetleri bardyr:

1. $\log_a 1 = 0$; 2. $\log_a a = 1$; 3. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$;

4. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; 5. $\log_a x^p = p \log_a x$.

Birinji we ikinji häsiýetler gös-göni logarifmiň kesgitlemesinden gelip çykýar. Esasy logarifm toždestwosy boýunça ýerine ýetýän

$x = a^{\log_a x}$, $y = a^{\log_a y}$ deňlikleri köpeldip,

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y} \qquad (1)$$

deňligi alarys. Esasy logarifmik toždestwo boýunça $xy = a^{\log_a (xy)}$. Bu deňligiň we (1) deňligiň çep bölekleriniň deňliginden olaryň sag bölekleriniň deňligi gelip çykýar: $a^{\log_a (xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Esaslary deň bolan derejeleriň bu deňliginden olaryň görkezijileriniň deňligi gelip çykýar: $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$. Edil şonuň ýaly

$$\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}, \quad \frac{x}{y} = a^{\log_a \left(\frac{x}{y}\right)}$$

deňlikler esasynda $a^{\log_a x - \log_a y} = a^{\log_a \left(\frac{x}{y}\right)}$ deňlik ýerine ýetýär we ondan $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ deňlik gelip çykýar. Derejäniň häsiýetini we esasy logarifm toždestwosyny ulanyp,

$$a^{p\log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^p = x^p = a^{\log_a x^p}$$

deňligi alarys. Ondan bolsa derejeleriň we esaslaryň deňliginden $\log_a x^p = p\log_a x$ deňlik gelip çykýar.

Berlen aňlatmadan logarifm aňlatma geçmeklige logarifmlemek diýilýär, oňa ters bolan amala bolsa potensirlemek diýilýär. Logarifmiň häsiýetlerinden peýdalanyp, $\log_b x = \log_b\left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x \cdot \log_b a$ esasy logarifm toždestwosyny logarifmläp,

$$\log_b x = \log_b\left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x \cdot \log_b a$$

deňligi alarys. Bu deňlikden logarifmde bir esasdan beýleki esasa geçmegiň

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \log_b x = \log_b a \cdot \log_a x \qquad (2)$$

formulalaryny alarys. Olardan görnüşi ýaly, esaslary üýtgände logarifmiň bahalary proporsional üýtgeýär. (2) formulalardan

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}, \quad \log_b a \cdot \log_a b = 1,$$

$$\log_{a^n} x^n = \frac{\log_a x^n}{\log_a a^n} = \frac{n\log_a x}{n\log_a a} = \log_a x,$$

$$\log_{a^n} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^n} = \frac{\log_a}{n}, \quad \log_{1/a} b = -\log_a b.$$

formulalar gelip çykýar.

3. Onluk logarifm we onuň häsiýetleri. Eger logarifmiň esasy 10 bolsa, onda oňa onluk logarifm diýilýär we ol esasy görkezilmän lg bilen belgilenýär, ýagny $\log_{10} b$ ýazgynyň ýerine lg$b$ ýazylýar.

Esasy α bolan logarifmler üçin görkezilen häsiýetleriň hemmesi onluk logarifmler üçin hem ýerine ýetýär. Ýöne onluk logarifmiň olardan başga diňe onluk logarifme mahsus bolan häsiýetleri hem bardyr.

1) Birlik we yzyndan nullar ýazylyp aňladylýan bitin sanyň onluk logarifmi ol sandaky nollaryň sanyna deňdir. Mysal üçin,

$$\lg 1000 = \lg 10^3 = 3; \ \lg 100000 = \lg 10^5 = 5\lg 10 = 5.$$

2) Birlik we öňünden nollar ýazylyp aňladylýan onluk droblaryň onluk logarifmi aýyrmak alamaty bilen alnan ol sandaky nollaryň sanyna deňdir (nol bitini hem hasaba almak bilen). Mysal üçin, $\lg 0,001 = \lg(1/1000) = \lg 10^{-3} = -3\lg 10 = -3.$

$10^k,\ k \in \mathrm{Z}$ görnüşdäki sandan tapawutlanýan islendik sanlaryň onluk logarifminiň noldan tapawutly drob bölegi bardyr.

b sanyň onluk logarifminiň bitin bölegine onuň häsiýetlendirijisi, drob bölegine mantissasy diýilýär we olar degişlilikde $\left[\lg b\right]$ we $\left\{\lg b\right\}$ bilen belgilenýär. Mysal üçin, belli bolan $\lg 2 \approx 0,3010$ deňlik esasynda $\left[\lg 2\right] = 0,\ \left\{\lg 2\right\} \approx 0,3010$; $\lg 543,1 \approx 2,7349$ deňlik esasynda $\left[\lg 543,1\right] = 2,\ \left\{\lg 543,1\right\} \approx 0,7349$; $\lg 0,005 \approx -2,3010$ deňlik esasynda $\left[\lg 0,0051\right] - 32,\ \left\{\lg 0,0051\right\} \approx 0,6990$.

Islendik položitel b sany $b = a \cdot 10^n,\ 1 \le a < 10;\ n \in N$ standart görnüşde aňladyp bolýar we $\ln b = \ln(a \cdot 10^n) = \ln a + n$ bolýany üçin *b* sanyň häsiýetlendirijisi *n* sana, mantissasy lg *a* sana deňdir.

Mysal üçin,

$$\lg 4650 = \lg(4,65 \cdot 10^3) = 3 + \lg 4,65;$$

$$\lg 46,5 = \lg(4,65 \cdot 10^1) = 1 + \lg 4,65;$$

$$\lg 0,4650 = \lg(4,65 \cdot 10^{-1}) = -1 + \lg 4,65;$$

$$\lg 0,0465 = \lg(4,65 \cdot 10^{-2}) = -2 + \lg 4,65.$$

Bu mysallaryň esasynda şeýle häsiýetler alynýar:

3) Birden uly bolan islendik sanyň häsiýetlendirijisi onuň bitin bölegini düzýän sifrleriň sanyndan bir san kiçidir.

Mysal üçin, [lg74,561]=1, [lg4537,4]=3.

4) Birden kiçi bolan položitel onluk drobuň onluk logarifminiň häsiýetlendirijisi aýyrmak alamaty bilen alnan ol sandaky ilkinji nuldan tapawutly sifriň öňündäki nullaryň sanyna deňdir (nul bitini hem hasaba almak bilen). Mysal üçin, $\left\{0,0016\right\} = -3,\ \left\{0,7\right\} = -1$.

5) b san 10^n sana köpeldilende onuň onluk logarifmi n san köpeler: $\lg(b\cdot 10^n)=\lg b+\lg 10^n=\lg b+n$. Mysal üçin,

$$\lg(11\cdot 10^2)=\lg 11+2,\quad \lg(342{,}12\cdot 10^2)=\lg 342{,}12+2$$

Položitel onluk drobda otury n belgi saga geçirmek ol droby 10^n sana köpeltmeklige deňgüýçlüdir. Şonuň üçin položitel onluk drobda otur n belgi saga geçirilende hem onluk logarifm n san köpeler.

6) b san 10^n sana bölünende onuň onluk logarifmi n san kiçeler:

Mysal üçin,

$$\lg(b:10^n)=\lg b-\lg 10^n=\lg b-n.$$

$$\lg(13:10^2)=\lg 13-3,\quad \lg(42{,}1:10^2)=\lg 42{,}1-2.$$

Položitel onluk drobda otur n belgi çepe geçirilende onluk logarifm n san kiçeler. Mysal üçin, $\lg 0{,}0045=\lg 0{,}45-2$.

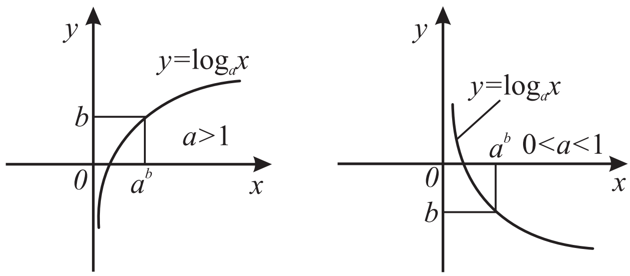
$\lg(b\cdot 10^n)=\lg b+\lg 10^n=\lg b+n$ deňligiň esasynda we sana bitin san goşulanda onuň drob böleginiň üýtgemeýändigi sebäpli, onluk logarifmiň mantissasy üçin şeýle häsiýet ýerine ýetýär:

7) Položitel san islendik bitin görkezijili 10^n sana köpeldilende onluk logarifmiň mantissasy üýtgemeýär.

§6. Logarifmik funksiýa. Logarifmik deňlemeler, deňsizlikler we olaryň ulgamlary

1. Logarifmik funksiýa we onuň grafigi. Belli bolşy ýaly, görkezijili $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$ funksiýa $(0,+\infty)$ interwalda kesgitlenen bolup, onuň bahalar köplügi $(0,+\infty)$ interwaldyr we ol monotondyr ($a>1$ bolanda artýar we $a<1$ bolanda kemelýär).

Şonuň üçin hem Oy okuň $(0,+\infty)$ interwalynyň islendik y_0 nokady üçin $(0,+\infty)$ interwalyň ýeke-täk x_0 nokady tapylyp, $y_0=a^{x_0}$ bolar, ýagny $y=a^x$ funksiýanyň görkezilen aralykda ters funksiýasy bardyr, ol logarifm diýlip atlandyrylýar we $x=\log_a y$ bilen belgilenýär. Ol $y=\log_a x$ görnüşde ýazylýar we logarifm funksiýa diýilýär. Onuň şeýle häsiýetleri bardyr:



81-nji surat

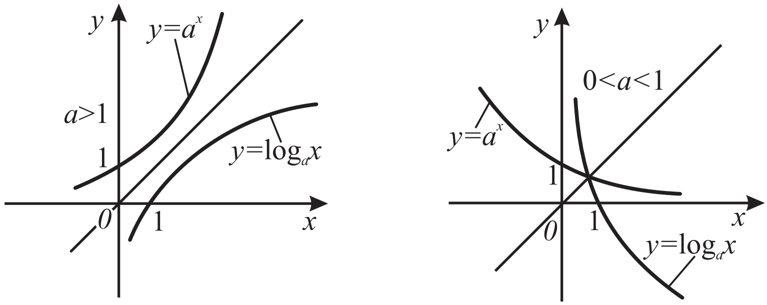
1. Kesgitleniş ýaýlasy hemme položitel sanlaryň köplügidir. (onuň grafigi *81-nji suratda* şekillendirilendir).

2. Bahalar ýaýlasy hemme hakyky sanlaryň köplügidir.

3. Funksiýa jübüt hem däldir, täk hem däldir.

4. $a>1$ bolanda funksiýa artýar, $0<a<1$ bolanda bolsa kemelýär.

5. Islendik hakyky y san üçin $\log_a\left(a^y\right)=y$ deňlik ýerine ýetýär, Indi $y=\log_a x$ we $y=a^x$ funksiýalaryň grafiklerini bir koordinatalar ulgamynda çyzalyň (*82-nji surat*). Suratdan görnüşi ýaly, esaslary deň bolanda $y=\log_a x$ we $y=a^x$ funksiýalaryň grafikleri I we III çärýekleriň bissektrisasyna görä simmetrikdir.



82-nji surat

2. Logarifmik deňlemeleriň çözülişi. Näbellisi logarifm belgisinde ýa-da onuň esasynda bolan deňlemä logarifmik deňleme diýilýär. Şeýle deňlemäniň iň ýönekeýi $\log_a x=b$ görnüşdäki deňleme bolup, onuň çözüwi $x=a^b$ bolar we ol kesgitleme boýunça alynýar. Beýleki logarifmik deňlemeler hem köplenç şolar ýaly deňlemelere getirilip çözülýär.

1-nji mysal. Logarifmik deňlemeleri çözmeli:

1) $\log_2(1+\frac{1}{x})=3$; 2) $\log_{(x^2-1)} 27=3$; 3) $\log_x(x+6)=2$.

1) Logarifmiň kesgitlemesi boýunça $1+\frac{1}{x}=2^3$. Şoňa görä, $1+\frac{1}{x}=8$, $\frac{1}{x}=7$, $x=\frac{1}{7}$.

2) Kesgitlemä görä, $(x^2-1)^3=27$.

Ondan bolsa $x^2-1=\sqrt[3]{27}$, $x^2-1=3$, $x^2=4$ deňleme alynýar.

Onuň çözüwleri: $x_1=2$, $x_2=-2$.

3) Kesgitleme boýunça $x^2=x+6$. Ol kwadrat deňlemäniň kökleri $x_1=3$, $x_2=-2$, ýöne berlen deňlemäniň köki diňe $x_1=3$ bolar.

2-nji mysal. $3+2\log_{x+1}3=2\log_3(x+1)$ logarifmik deňlemäni çözmeli:

Deňlemede $\log_{x+1}3=\dfrac{1}{\log_3(x+1)}$ deňligi ulanyp, 3 esasa geçeliň.

Onda deňleme $3+\dfrac{2}{\log_3(x+1)}=2\log_3(x+1)$ görnüşi alar. Täze üýtgeýän ululygy $y=\log_3(x+1)$ deňlik boýunça girizip alarys:

$$3+\frac{2}{y}=2y \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2-3y-2=0, \\ y\neq 0. \end{cases}$$

Alnan kwadrat deňlemäniň kökleri $y_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{25}}{4}$ ýa-da $y_1=2$, $y_2=-\dfrac{1}{2}$. Şunlukda, $\log_3(x+1)=2$ deňlemeden $x+1=3^2$, $x_1=8$, $\log_3(x+1)=-\dfrac{1}{2}$ deňlemeden $x+1=3^{-\frac{1}{2}}$ ýa-da $x_2=-1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-3}{3}$.

Şeýlelikde, $x=\dfrac{\sqrt{3}-3}{3}$, $x=8$.

Käbir hallarda görkezijili deňlemeleri hem logarifmik deňlemelere getirip çözmek amatly bolýar.

3-nji mysal. $5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$ deňlemäni çözmeli.

Deňlemäniň iki bölegini hem 2 esasda logarifmirläp,

$x\log_2 5 + \dfrac{2x-1}{x+1} = \log_2 50$ deňlemäni alarys. Bu ýerden bolsa şeýle deňleme alynýar:

$$x^2 \log_2 5 + x\log_2 5 + 2x - 1 = (x+1)(\log_2 25 + \log_2 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 \log_2 5 - x(\log_2 5 - 1) - 2(\log_2 5 + 1) = 0.$$

Alnan kwadrat deňlemäni çözmek üçin ilki diskriminanty tapalyň:

$$D = (\log_2 5 - 1)^2 + 4\log_2 5 \cdot 2(\log_2 5 + 1) = (3\log_2 5 + 1)^2 > 0 \cdot$$

Şoňa görä, deňlemäniň iki köki bardyr:

$$x_{1,2} = \frac{\log_2 5 - 1 \pm (3\log_2 5 + 1)}{2\log_2 5}; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{\log_2 5 + 1}{\log_2 5}.$$

Şeýlelikde, berlen deňlemäniň kökleri $x_1 = 2, \ \ x_2 = -\dfrac{\log_2 5 + 1}{\log_2 5}$.

3. Logarifmik deňsizligiň çözülişi.

Logarifmik deňsizlikler çözülende logarifmik funksiýanyň häsiýetlerinden peýdalanylýar.

1-nji mysal. Logarifmik deňsizlikleri çözmeli:

1) $\log_8(x^2 - 4x + 3) < 1$; 2) $\log_{0,2}(x^2 + 6x + 8) > \log_{0,2}(5x + 10)$;

3) $x^{\lg x} > 10$.

1) Esasy 8 bolan logarifmiň artýandygy, kesgitleniş ýaýlasynyň položitel sanlaryň köplügi bolýanlygy we $1 = \log_8 8$ deňlik esasynda, şeýle deňgüýçli ulgamy alarys:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ x^2 - 4x + 3 < 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ x^2 - 4x - 5 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3) > 0, \\ (x+1)(x-5) < 0. \end{cases}$$

Interwallar usulynyň esasynda ulgamyň birinji deňsizliginiň çözüwi $x < 1$ ýa-da $x > 3$, ikinjiniňki $-1 < x < 5$. Şoňa görä, ulgamyň çözüwi: $(-1, 1) \cup (3, \ 5)$. Bu çözuw berlen logarifmik deňsizligiň hem çözüwidir.

2) Logarifmiň esasynyň birden kiçi bolany üçin şeýle ulgamy alarys:

$$\begin{cases} x^2+6x+8>0, \\ 5x+10>0, \\ x^2+6x+8<5x+10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+4)>0, \\ 5x>-10, \\ (x+2)(x-1)<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x<-4, \\ x>-2, \\ -2<x<1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -2<x<1$. Şeýlelikde, ulgamyň we şol birwagtda berlen deňsizligiň çözüwi: (–2,1).

3) Deňsizligi 10 esasda logarifmläp, $\lg x \lg x>1$, $\lg^2 x-1>0$ deňsizligi alarys. Şoňa görä, $t=\lg x$ çalşyrmany girizip, $t^2-1>0$ kwadrat deňsizligi alarys. Onuň çözüwleriniň $t<-1$ ýa-da $t>1$ bolýandygy sebäpli, $\lg x<-1$ logarifmik deňsizligiň çözüwleri

$$\begin{cases} \lg x<\lg(1/10), \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1/10, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{10}$$

köplükdir we $\lg x>1$ logarifmik deňsizligiň çözüwleri

$$\begin{cases} \lg x>\lg 10, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>10, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow x>10$$

köplükdir. Şoňa görä, berlen deňsizligiň çözüwi $(0, \frac{1}{10}) \cup (10,\infty)$ köplükdir.

4. Logarifmik deňlemeler we deňsizlikler ulgamlary. Şeýle ulgamlaryň çözülişleri hem algebraik deňlemeler we deňsizlikler ulgamlarynyň çözülişleri ýalydyr. Şunlukda, logarifmiň häsiýetleri hem peýdalanylýar. Olary mysallarda görkezeliň.

2-nji mysal. Logarifmik deňlemeler ulgamyny çözmeli:

$$1) \begin{cases} x^{\lg y}=100, \\ \log_y x=2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \lg(x-y)-2\lg 2=1-\lg(x+y), \\ \lg x-\lg 3=\lg 7-\lg y. \end{cases}$$

1) $0<x$, $0<y\neq 1$ şertlerde birinji deňlemäni logarifmläp we ikinjiden, $x=y^2$ tapyp, şeýle ulgamy alarys:

$$\begin{cases} x=y^2, \\ \lg y\cdot\lg x=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2, \\ \lg y\cdot\lg y^2=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2, \\ \lg^2 y=1. \end{cases}$$

Ahyrky ulgamdan aşakdaky iki ulgam alynýar:

$$\begin{cases} x = y^2, \\ \lg y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 100, \\ y_1 = 10; \end{cases} \quad \text{we} \quad \begin{cases} x = y^2, \\ \lg y = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0,01, \\ y_2 = 0,1. \end{cases}$$

Şeýlelikde, ulgamyň çözüwleri: (100; 10) we (0,01; 0,1).

$x > y > 0$ şertlerde ulgamy şeýle görnüşde ýazmak bolar:

$$\begin{cases} \lg(x-y) + \lg(x+y) = 1 + 2\lg 2, \\ \lg x + \lg y = \lg 7 + \lg 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x^2 - y^2) = \lg 40, \\ \lg(xy) = \lg 21; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 40, \\ xy = 21; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (21^2/x^2) = 40, \\ xy = 21; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 40x^2 - 21^2 = 0, \\ xy = 21. \end{cases}$$

Bu ulgamyň $x > y > 0$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwi $x = 7$ we $y = 3$ bolar. Ol berlen logarifmik ulgamyň hem çozüwidir.

3-nji mysal. Logarifmik deňsizlikler ulgamyny çözmeli:

$$\begin{cases} \lg 7 - \lg(-8x - x^2) > 0, \\ \lg(x+3) > 0. \end{cases}$$

Ol ulgam şeýle ulgama deňgüýçlüdir:

$$\begin{cases} \lg 7 > \lg(-8x - x^2), \\ \lg(x+3) > \lg 1, \\ -8x - x^2 > 0, \\ x + 3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 > -8x - x^2, \\ x + 3 > 1, \\ 8x + x^2 < 0, \\ x > -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)(x+1) > 0, \\ x > -2, \\ x(x+8) < 0. \end{cases}$$

Bu ulgamyň çözüwi (–1,0) interwaldyr.

Logarifmiň taryhyndan

Logarifm düşünjesi iňlis matematigi Ž.Neper (1550-1617) we şweýsar matematigi I. Býurgi (1552-1632) tarapyndan (biri-birinde habarsyz) girizilýär. Logarifmler teoriýasyny Neper ösdürýär. Ol arifmetik aňlatmalary, amallary logarifmler arkaly hasaplamagyň usulyny işläp taýýarlaýar we logarifmleriň doly tablisalaryny düzýär. Neperiň tablisalary natural logarifmleriň häzirki wagtdaky tablisalaryndan az tapawutlanýar. Onluk logarifmler iňlis matematigi G.Briggs (1556-1630) tarapyndan girizildi. Leýbnis eýýäm XVII asyryň ahyrlarynda logarifmleriň düzgünleri arkaly görkezijili deňlemeleri çözüpdir. Logarifmleriň tablisalaryny, gijräk bolsa logarifmik çyzgyjy ulanmak hasaplamalary ep-esli ýönekeýleşdirýär we olar uzak wagtlap hasaplamagyň esasy serişdeleriniň biri bolupdyr. Fransuz matematigi Laplas logarifmleri oýlap tapmak hasaplaýjylaryň ömrüni uzaltdy diýip aýdypdyr.

Gönükmeler

1. Deňlemäni çözüň:

a) $\log_3 x = \log_3 1{,}5 + \log_3 8$;
b) $\lg(\lg x) = 0$;
ç) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 5) = 1$;
d) $\log_7 x = \log_7 12 - \log_7 3$;
e) $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0$;
ä) $\log_x 2 - \log_x 3 = 4$.

2. Deňlemäni çözüň:

a) $4^{x+1{,}5} + 9^x = 6^{x+1}$;
b) $3 \cdot 9^x - 29 \cdot 6^{x-1} + 2^{2x-1} = 0$;
ç) $3^x = 7$;
d) $2^x \cdot 3^x = 7$;
e) $5^{3-2x} = 4$;
ä) $2^{\sin x} = 1$.

3. Deňlemäni çözüň:

a) $\log_3(2^x + 1) = 2$;
b) $\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2}$;
ç) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$;
d) $\ln(x^2 + 3x + 1) = \ln 11$;
e) $\log_2 \sin x + 1 = 0$;
ä) $\ln(0{,}5 + x) = \ln 0{,}5 - \ln x$.

4. Deňlemäni çözüň:

a) $3^{x+1} = \frac{1}{9^{2x-1}}$;
b) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 2 \cdot 3^x = 16$;
ç) $5^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-1} = 135$;
d) $\frac{8^{x+1}}{2^{x-1}} = 16^{x+1}$.

5. Deňlemeler ulgamyny çözüň:

a) $\begin{cases} x + y = 7, \\ \lg x + \lg y = 1; \end{cases}$
b) $\begin{cases} \log_4(x + y) = 2, \\ \lg_3 x + \lg_3 y = 2 + \lg_3 7; \end{cases}$
ç) $\begin{cases} x + y = 34, \\ \lg_2 x + \lg_2 y = 1; \end{cases}$
d) $\begin{cases} \log_4 x - \log_4 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

MAZMUNY

I bap. Birinji derejeli deňlemeler, birinji derejeli iki we üç näbellili deňlemeler ulgamy

II bap. Deňsizlikler we deňsizlikler ulgamy

III bap. Rasional görkezijili derejeler

IV bap. Funksiýa barada esasy düşünjeler

V bap. Kwadrat deňlemeler we deňsizlikler

VI bap. Arifmetik we geometrik progresiýalar