TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI

Magtymguly adyndaky
TÜRKMEN DÖWLET UNIWERSITETI

A. Öwezow, H.Geldiýew, H. Hudaýberdiýew

ÜÇBURÇLUGYŇ TÄZE GEOMETRIÝASY

Ýokary okuw mekdepleriň talyplary üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi

AŞGABAT- 2010

A. Öwezow, H.Geldiýew, H. Hudaýberdiýew

Üçburçlugyň täze geometriýasy. – Aşgabat, 2010

Okuw kitabynda Üçburçlugyň täze geometriýasy dersiniň esasy düşünjeleri beýan edilýär.Köpsanly mysallar işlenip görkezilýär. Bu kitapdan talyplar we matematika mugallymlary peýdalanyp bilerler.

GIRIŞ

Soňky 200 ýyllykda, hususan-da 19-njy asyrdan başlap matematika ylmy güýçli depginler bilen ösüp başlady. Köplükler nazaryýeti, topologiýa, ähtimallyklar nazaryýeti we ş.m. ýaly köp täze ugurlar döredi. Şu döwürlerde tekizlik geometriýasyna degişli, hususan-da üçburçluklar bilen baglanyşykly hem köp täze teoremalar, kanunalaýyklyklar açyldy. Bu açyşlar 20-nji asyryň başlarynda D. Ýefremow tarapyndan toplanyldy we ulgamlaşdyrylyp [7] neşir edildi. Soňra şol asyryň ikinji ýarymynda S. Zetel [8], G. Kokseter we S. Greýtser [3] bu maglumatlaryň üstüni alymlaryň täze açyşlary bilen dolduryp, öz işlerini çap etdirdiler.

Magtymguly adyndaky Türkmen döwlet uniwersitetinde "Üçburçlugyň täze geometriýasy" atly ýörite ders köp ýyllaryň dowamynda talyplara okalyp gelinýär. Bu dersi ilkinji bolup okadyp başlan, matematika mugallymlarynyň köp nesliniň halypasy, Türkmenistanyň halk mugallymy, hormatly professor, merhum **Baýramdurdy Berdiýew** bolupdy. Soňra bu dersi **Kaka Beşerow** okadypdy. Ol bu ders boýunça gollanma taýýarlamaga hem başlapdy. Emma biwagt gelen nägehan ajal zehinli we ýaş alymyň bu maksadyna böwet bolupdy.

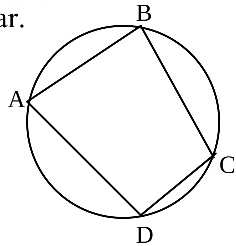
Mugallymçylyk tejribeligini geçýän 4-5-nji ýyl talyplary fakultatiw okuwlaryny okatmaly we hasap sapaklaryny tabşyrmaly bolýarlar. Emma türkmen dilinde degişli edebiýatlaryň bolmazlygy mugallymlarda we talyplarda käbir kynçylyklary döredýär. Şoňa görä-de biz üçburçlugyň täze geometriýasyny 8-nji synpda fakultatiw sapaklaryny okatmak üçin gollanma hökmünde hem hödürleýäris. Bu dersi özleşdirmäge matematika bilen gyzyklanýan 8-nji synp okuwçylarynyň bilim derejeleri ýeterlikdir.

Bu fakultatiw dersiň mazmunyny 5 bölümde bermäge synanyşdyk. Her bir bölümiň başynda nazary maglumatlar berilip, soňunda bolsa şol maglumatlardan peýdalanylyp çözülýän meseleler getirilýär. Biziň pikirimizçe, fakultatiw dersine berilýän 34 sagadyň 7 sagadyny 1-nji bölüme, 6 sagadyny 2-nji bölüme, 7 sagadyny 3-nji bölüme, 8 sagadyny 4-nji bölüme we 6 sagadyny 5-nji bölüme berip bolar. Emma mugallymlar we tejribelik geçýän talyplar, okuwçylaryň dersi özleşdiriş ýagdaýyna seredip, bu sagat bölünişigine öz üýtgetmelerini girizip bilerler.

Kitap baradaky öz pikiriňizi we bellikleriňizi Türkmen döwlet uniwersitetiniň umumy matematika kafedrasyna ýollasaňyz minnetdar bolardyk.

I. Içinden we daşyndan çyzylan dörtburçluklar. Brahmagupta teoremalary

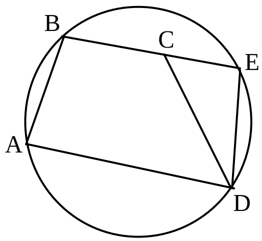
Belli bolşy ýaly, islendik üçburçlugyň içinden we daşyndan töwerek çyzyp bolýar. Emma islendik dörtburçlugyň içinden, şeýle hem daşyndan töwerek çyzyp bolmaýar. Meselem, gönüburçly trapesiýanyň daşyndan töwerek çyzyp bolmaýar; ini we boýy deň, ýagny kwadrat bolmadyk gönüburçlugyň içinden töwerek çyzyp bolmaýar.

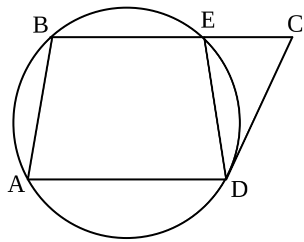


Teorema 1. Dörtburçlugyň daşyndan töwerek çyzmak üçin onuň garşylykly burçlarynyň jeminiň 180°-a deň bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Subudy: Zerurlyk şerti.
Goý, *ABCD* töweregiň içinden çyzylan dörtburçluk bolsun. *A, B, C* we *D* burçlar töweregiň içinden çyzylan burçlar. Şoňa görä-de $\angle A=0{,}5\cup BCD$, $\angle C=0{,}5\cup BAD$.
Bu ýerden $\angle A+\angle C=0{,}5(\cup BCD+\cup DAB)$ gelip çykýar. *BCD* we *DAB* dugalar töweregi düzýärler, diýmek, $\angle A+\angle C=0{,}5\bullet 360°=180°$.
$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$ bolany üçin $\angle B+\angle D=180°$ gelip çykýar.

Ýeterlik şerti. Goý, $\angle A+\angle C=180°$ bolan *ABCD* dörtburçlugyň *A, B, D* depeleriniň üstünden töwerek geçireliň we *C* nokadyň hem bu töweregiň üstünde ýatýanlygyny görkezeliň. Goý, *C* töweregiň içinde ýatsyn.



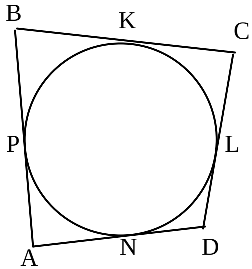


E nokat bolsa *BC* tarapyň töwerek bilen kesişme nokady bolsun.
Onda $\angle A+\angle E=180°$ bolar. Bu ýerden *C* we *E* nokatlaryň gabat gelýänligi gelip çykýar. *C* nokat töweregiň içinde ýatyp bilmez. Edil şuňa meňzeş *C* nokadyň töweregiň daşynda ýatyp bilmejekligi görkezilýär. Diýmek, *C* nokat diňe töweregiň üstünde ýatyp biler.S.E.Ş.

Teorema 2. Daşyndan çyzylan dörtburçlugyň garşylykly taraplarynyň uzynlyklarynyň jemi deňdir.

Subudy. Goý, *ABCD* dörtburçlugyň içinden töwerek çyzylan bolsun.

Belli bolşy ýaly, bir nokatdan töwerege geçirilen galtaşýanlaryň kesimleri deň.



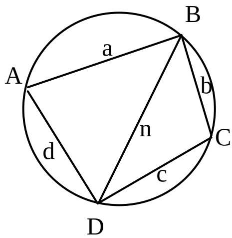
AP=AN, BP=BK, CK=CL, DN=DL.
AB+CD=AP+BP+CL+DL=
=AN+BK+CK+DN=AD+BC.
S.E.Ş.

7-nji asyrda ýaşap geçen hindi matematigi Brahmagupta içinden çyzylan dörtburçluklar bilen baglanyşykly aşakdaky iki teoremany açypdyr we subut edipdir.

Teorema 3. (Birinji teorema).
Eger töweregiň içinden çyzylan dörtburçlugyň taraplary *a, b, c, d* we ýarym perimetri *p* bolsa, onda onuň meýdany

S=$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

formula boýunça hasaplanylýar.



Subudy. Goý, *ABCD* töweregiň içinden çyzylan dörtburçluk bolsun .
$\angle A+\angle C=180°$ bolany üçin, getirme formulalaryny ulanyp $\cos C=-\cos A$, $\sin C=\sin A$ deňlikleri alarys.
ABD üçburçluk üçin kosinuslar teoremasyny ulanyp *BD=n* diagonaly kesgitläris:

$n^2= a^2+d^2-2ad\bullet\cos A$

Edil şuňa meňzeşlikde *BCD* üçburçluk üçin kosinuslar teoremasyny ulanyp *BD=n* diagonaly kesgitleýäris:
$n^2=b^2+c^2-2bc\bullet\cos C= b^2+c^2+2bc\bullet\cos A$.
Soňky iki deňligiň çep bölekleri deň bolany üçin olaryň sag böleklerini deňläp alarys:
$a^2+d^2-2ad\bullet\cos A= b^2+c^2+2bc\bullet\cos A$;
$2\cos A(ad+bc)=a^2+d^2-b^2-c^2$ (1) .
Indi *ABD* we *BCD* üçburçluklaryň meýdanlaryny tapmak arkaly *ABCD* içinden çyzylan dörtburçlugyň meýdanyny kesgitleýäris;

$$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}ad\cdot\sin A\ ;\ S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin C=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$$

$S=\frac{1}{2}ad\bullet\sin A+\frac{1}{2}bc\bullet\sin A=\frac{1}{2}\sin A\,(ad+bc)$. Soňky deňligiň iki bölegini hem 4-e köpeldip aşakdaky deňligi alarys: $2\sin A(ad+bc)=4S$ (2)

(1) we (2) deňlikleri kwadrata göterip, olaryň çep we sag böleklerini agzama-agza goşýarys:

$4\cos^2 A \bullet (ad+bc)^2+4\sin^2 A \bullet (ad+bc)^2=(a^2+d^2-b^2-c^2)^2+16S^2$;

$4(ad+bc)^2(\sin^2 A+\cos^2 A)=(a^2+d^2-b^2-c^2)^2+16S^2$.

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ bolýanlygyny göz öňünde tutup alarys:

$4(ad+bc)^2=(a^2+d^2-b^2-c^2)^2+16S^2$.

Soňky deňlikden S-i kesgitleýäris:

$16S^2=(2ad+2bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$.

Kwadratlaryň tapawudyny köpeldijilere dagadyp alarys:

$16S^2=(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2)(2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2)$.

Jemiň we tapawudyň kwadratlarynyň formulalaryny ulanyp alarys:

$16S^2=((b^2+2bc +c^2)– (a^2-2ad +d^2))((a^2+2ad+ d^2)-(b^2-2bc+ c^2))$;

$16S^2=((b+c)^2-(a-d)^2)((a+d)^2-(b-c)^2)$.

Kwadratlaryň tapawudyny köpeldijilere dagadyp alarys:

$16S^2=(b+c-a+d)(b+c+a-d)(a+d-b+c)(a+d+b-c)$;

$$S^2=\left(\frac{-a+b+c+d}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)\left(\frac{a+b-c+d}{2}\right);$$

$$S^2=\left(\frac{a+b+c+d}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c+d}{2}-d\right)\left(\frac{a+b+c+d}{2}-b\right)\text{x}$$

$$\text{x}\left(\frac{a+b+c+d}{2}-c\right); \quad p=\frac{a+b+c+d}{2}$$ bolýanlygyny göz öňünde tutup alarys: $S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$;

$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. S.E.Ş.

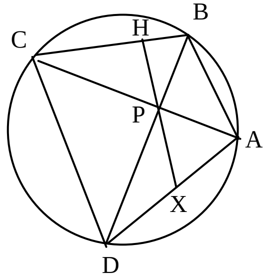
Dörtburçlugyň bir tarapy, meselem d nula ymtylsa, onda dörtburçlugyň üçburçluga ymtyljakdygyny göz öňüne getirmek kyn däldir. Islendik üçburçlugyň daşyndan töwerek çyzyp bolýar. Diýmek, üçburçluk üçin Brahmaguptanyň bu teoremasyny ulanyp, üçburçlugyň meýdanyny tapmak üçin Geronyň formulasyny alarys. $d=0$ bolanda biz aşakdaky formulany getirip çykarýarys:

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Teorema 4. (Ikinji teorema). Eger töweregiň içinden çyzylan dörtburçlugyň P nokatda kesişýän perpendikulýar diago-nallary bar bolsa, onda P nokatdan geçýän we dörtburçlugyň bir tarapyna perpendikulýar göni çyzyk garşydaky tarapy deň ýarpa bölýändir.

Subudy. Şol bir AB duga daýanýanlygy üçin PCB we ADP içinden çyzylan burçlar özara deňdir. PBC gönüburçly üçburçlugyň ýiti burç-

lary bolany üçin ∠*PCB*+∠*PBC*=90°.
PHB gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlary bolany üçin ∠*PBC*+∠*BPH*=90°. Bu ýerden ∠*PCB*=∠*BPH* gelip çykýar. Wertikal burçlar bolany üçin ∠*BPH*=∠*DPX*.
∠*PCB*=∠*BPH*=∠*DPX*=∠*ADP* bolany üçin *DPX* üçburçluk deňýanlydyr we onuň *DX* we *XP* taraplary özara deňdir.



Şol bir *CD* duga daýanýanlygy üçin *CBP* we *DAP* içinden çyzylan burçlar özara deňdir. ∠*PCB*+∠*PBC*=90° we ∠*PCB*+∠*CPH*=90° deňliklerden ∠*PBC*=∠*CPH* gelip çykýar. Wertikal burçlar bolany üçin ∠*CPH*=∠*APX*. ∠*CBP*=∠*PAD*=∠*CPH*=∠*APX* bolany üçin *PAX* üçburçluk deňýanlydyr we onuň *PX* we *AX* taraplary özara deňdir. *DX*=*XP* we *XP*=*AX* bolany üçin *DX*=*AX*. SEŞ.

Meseleler

1. Geronyň formulasyndan peýdalanyp taraplary: a) 13, 14, 15; b) 3, 14, 15 bolan üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

2. ∠*A*=112°, ∠*C*=68°, *AB*=4, *BC*=5, *CD*=7, *DA*=9 bolan *ABCD* dörtburçlugyň meýdanyny tapyň.

3. Içinden çyzylan *ABCD* dörtburçlugyň taraplary *AB*•*BC*=*AD*•*DC* şerti kanagatlandyrýar. *ABC* we *ADC* üçburçluklaryň meýdanlarynyň deňdigini subut etmeli.

4. Güberçek *ABCD* dörtburçlugyň meýdanynyň

$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\,\cos^2\dfrac{B+D}{2}$ (bu ýerde *a,b,c,d* taraplar, *p* bolsa ýarym perimetr) formula boýnça hasaplanýandygyny subut etmeli.

5. Eger *ABCD* daşyndan çyzylan dörtburçluk bolsa, onuň meýdanynyň $S^2=abcd\sin^2\dfrac{B+D}{2}$ formula boýnça hasaplanýandygyny subut etmeli.

6. Eger *ABCD* birwagtda hem içinden hem daşyndan çyzylan dörtburçluk bolsa, onuň meýdanynyň $S^2=abcd$ formyla boýunça hasaplanýandygyny subut etmeli.

7. Eger güberçek dörtburçlugyň taraplary *a,b,c,d* we onuň daşyndan çyzylan töweregiň radiusy *R* bolsa, onuň meýdanynyň

$S=\sqrt{\dfrac{(bc+ad)(ca+bd)(ab+cd)}{16R^2}}$ formula boýunça hasaplanýandygyny subut etmeli.

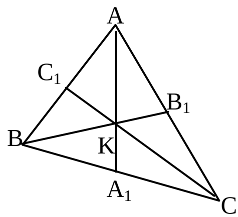
8. *R* radiusly töweregiň içinden çyzylan deňýanly trapesiýanyň uly esasy onuň beýleki taraplarynyň her birinden iki esse uly. Trapesiýanyň meýdanyny tapmaly.
9. Deňýänly trapesiýanyň diagonaly onuň kütek burçuny deňýarpa bölýär. Trapesiýanyň kiçi esasy 3 sm, perimetri 42 sm deň bolsa, onuň meýdanyny tapmaly.
10. Deňýanly trapesiýanyň içinden töwerek çyzylypdyr. Gapdal taraplaryň biri galtaşma nokady arkaly *m* we *n* böleklere bölünýär. Trapesiýanyň meýdanyny tapmaly.
11. Eger esaslary 8 sm we 14 sm, meýdany 44 sm^2 bolsa, deňýanly trapesiýanyň gapdal taraplaryny tapmaly.

II. Çewy teoremasy we onuň ulanylyşy. Koatpon teoremasy. Nagel nokady baradaky teorema

Üçburçlugyň depesini onuň garşysyndaky tarapyň nokady bilen birikdirýän kesime çewynyň göni çyzygy ýa-da çewiana diýilýär. Şeýlelikde, eger ABC üçburçlugyň BC, CA, AB taraplarynyň üstünde degişlilikde A_1, B_1, C_1 nokatlar ýatýan bolsalar, onda AA_1, BB_1, CC_1 kesimlere çewianalar diýilýär. Bu at italýan matematigi Jowanni Çewynyň ady bilen baglanyşyklydyr. Çewy 1678-nji ýylda aşakdaky örän peýdaly teoremany çap etdi .

Teorema 5. ABC üçburçlugyň AA_1, BB_1, CC_1 üç çewianasy konkurent bolsalar , onda $\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$ deňlik dogrydyr.

Üç çewiana konkurent diýenimizde biz olaryň üçüsiniň hem bir nokadyň üstünden geçýänligini göz öňünde tutýarys.



Subudy. Eger iki üçburçlugyň beýiklikleri deň bolsa, onda olaryň meýdanlary olaryň esaslary ýaly gatnaşýarlar. Subut etmeli deňligimizdäki her bir gatnaşygy degişli üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşyklary bilen çalşyrýarys. BAA_1 we CAA_1 üçburçluklaryň A depeden BC tarapa inderilen deň beýiklikleri bardyr. Edil şuňa meňzeş BKA_1 we CKA_1 üçburçluklaryň K depeden BC tarapa inderilen deň beýiklikleri bardyr. Şoňa görä-de biz aşakdaky deňligi ýazyp bileris:

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{\Delta BAA_1}}{S_{\Delta CAA_1}}=\frac{S_{\Delta BKA_1}}{S_{\Delta CKA_1}}=\frac{S_{\Delta BAA_1}-S_{\Delta BKA_1}}{S_{\Delta CAA_1}-S_{\Delta CKA_1}}=\frac{S_{\Delta BKA}}{S_{\Delta CKA}}.$$

Edil şuňa meňzeş subut etmeli deňligimizdäki ikinji we üçünji gatnaşyklary degişli üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşyklary bilen çalşyrýarys:

$$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{\Delta CBB_1}}{S_{\Delta ABB_1}}=\frac{S_{\Delta CKB_1}}{S_{\Delta AKB_1}}=\frac{S_{\Delta CBB_1}-S_{\Delta CKB_1}}{S_{\Delta ABB_1}-S_{\Delta AKB_1}}=\frac{S_{\Delta BKC}}{S_{\Delta BKA}};$$

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{\Delta ACC_1}}{S_{\Delta BCC_1}}=\frac{S_{\Delta AKC_1}}{S_{\Delta BKC_1}}=\frac{S_{\Delta ACC_1}-S_{\Delta AKC_1}}{S_{\Delta BCC_1}-S_{\Delta BKC_1}}=\frac{S_{\Delta CKA}}{S_{\Delta BKC}}.$$

Üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşyklaryny subut etmeli deňligimiziň çep böleginde ornuna goýup alarys:

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{\Delta BKA}}{S_{\Delta CKA}}\cdot\frac{S_{\Delta BKC}}{S_{\Delta BKA}}\cdot\frac{S_{\Delta CKA}}{S_{\Delta BKC}}=1.\quad \text{S.E.Ş.}$$

Bu teorema ters teorema hem dogrydyr.

Teorema 6. Eger AA_1, BB_1, CC_1 üç çewiana üçin

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$$

deňlik ýerine ýetse, onda olar konkurentdirler.

Subudy. Goý, AA_1 we BB_1 çewianalar K nokatda kesişýän bolsunlar. K nokatdan geçýäň üçünji çewiana bolsa, AB tarapy C_1 nokatda dälde, eýsem C_2 nokatda kesýän bolsun. Onda biz Çewy göni teoremasyna görä $\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_2}{C_2B}=1$ deňligi ýazyp bileris.

Emma teoremanyň şertine görä $\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$. Diýmek,

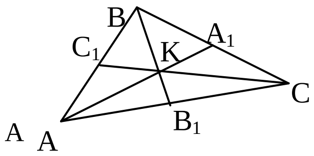
$\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{AC_1}{C_1B}$. Görnüşi ýaly, C_1 we C_2 nokatlar gabat gelýär. Bu bolsa AA_1, BB_1, CC_1 çewianalaryň bir nokatda kesişýändikleri barada netije çykarmaga mümkinçilik berýär. SEŞ.

Çewy teoremasy, hususan-da onuň ters teoremasy mekdep geometriýasyna degişli we beýleki köp tassyklamalary ýeňillik bilen subut etmäge mümkinçilik berýär. Indiki getirjek teoremalarymyza Cewy teoremasyndan gelip çykýan netijeler hökmünde garamak bolar.

Teorema 7. Üçburçlugyň medianalary bir nokatda kesişýärler.

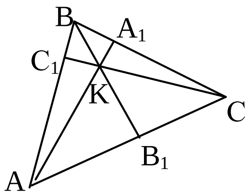
Subudy. Goý, AA_1, BB_1 we CC_1 göni çyzyklar berlen üçburçlugyň medianalary bolsunlar. $AC_1=C_1B$, $BA_1=A_1C$, $CB_1=B_1A$ bolany üçin

$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$ deňligiň ýerine ýetýänligine göz ýetirmek kyn däldir. Çewy teoremasyna ters teorema görä üçburçlugyň medianalary bir nokatda kesişýärler. SEŞ.



Teorema 8. Üçburçlugyň beýiklikleri bir nokatda kesişýärler.

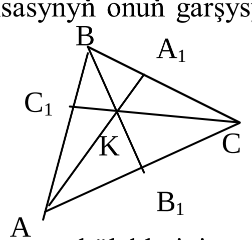
Subudy. Bu teoremany ýiti burçly üçburçlyk üçin subut edýäris.Goý, AA_1, BB_1 we CC_1 göni çyzyklar berlen üçburçlugyň beýiklikleri bolsunlar. A ýiti burçy umumy bolany üçin AC_1C we AB_1B gönüburçly üçburçluklar meňzeşdirler. Bu meňzeşlikden $\frac{AC_1}{AB_1}=\frac{AC}{AB}$ (1) deňligi alarys. Edil şuňa meňzeşlikde BC_1C we BA_1A gönüburçly üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{BA_1}{BC_1}=\frac{AB}{BC}$ (2) deňligi hem-de CA_1A we CB_1B gönüburçly üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{CB_1}{CA_1}=\frac{BC}{AC}$ (3) deňligi alarys. (1), (2) we (3) deňlikleriň çep we sag böleklerini agzama-agza köpeldip alarys:



$\frac{AC_1}{AB_1}\cdot\frac{BA_1}{BC_1}\cdot\frac{CB_1}{CA_1}=\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{AC}=1$. Çewy teoremasyna ters teorema görä üçburçlugyň beýiklikleri bir nokatda kesişýärler. SEŞ.

Teorema 9. Üçburçlugyň bissektrisalary bir nokatda kesişýärler.

Subudy. Goý, AA_1, BB_1, CC_1 göni çyzyklar ABC üçburçlugyň bissektrisalary bolsunlar. Onda üçburçlugyň bissektrisasynyň onuň garşysyndaky tarapy gapdal taraplara proporsional bolan böleklere bölýänligini göz öňünde tutup aşakdaky deňlikleri alarys:

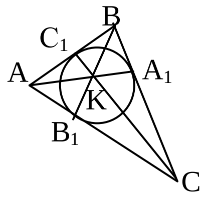


$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC}{BC}$ (4); $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{AB}{AC}$ (5);

$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{BC}{AB}$ (6). (4), (5) we (6) deňlikleriň çep we sag böleklerini agzama-agza köpeldip alarys: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}=1.$

Çewy teoremasyna ters teorema görä üçburçlugyň bissektrisalary bir nokatda kesişýärler. SEŞ.

Teoerema 10. Içinden çyzylan töweregiň üçburçlugyň taraplaryna galtaşma nokatlaryny olaryň garşysyndaky depeler bilen birikdirýän göni çyzyklar bir nokatda kesişýärler.



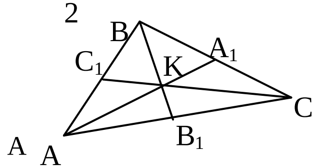
Subudy. Burçuň içinden çyzylan töwerek onuň taraplaryndan deň kesimleri kesip alýar. Diýmek, $AC_1=AB_1$, $BC_1=BA_1$ we $CA_1=CB_1$. Bu deňlikleri göz öňünde tutup alarys:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{AB_1}\cdot\frac{BA_1}{BC_1}\cdot\frac{CB_1}{A_1C}=1\cdot1\cdot1=1.$$

Diýmek, Çewy teoremasyna ters teorema görä üçburçlugyň depesini içinden çyzylan töweregiň galtaşma nokatlary bilen birikdirýän göni çyzyklar bir nokatda kesişýärler. SEŞ.

Teorema 11. Üçburçlugyň depesinden çykyp, onuň perimetrini deň ýarpa bölýän göni çyzyklar bir nokatda kesişýärler.

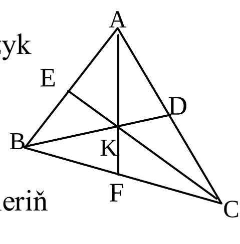
Subudy. Goý, $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$ we $p=\frac{a+b+c}{2}$ bolsun.



Teoremanyň şertine görä
$c+AB_1=a+CB_1=b+CA_1=$
$=c+BA_1=a+BC_1=b+AC_1=p$
bolar.Bu ýerden $AB_1=p-c$, $CB_1=p-a$,
$CA_1=p-b$, $BA_1=p-c$, $BC_1=p-a$, $AC_1=p-b$ deňlikleri alarys.

$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{p-b}{p-a}\cdot\frac{p-c}{p-b}\cdot\frac{p-a}{p-c}=1.$ Çewy teoremasyna ters teorema görä, bu göni çyzyklar bir nokatda kesişýärler.

Teorema 12. (Koatpon).Üçburçlugyň depesinden çykyp, onuň garşysyndaky tarapy şol tarapa sepleşýän burçlara proporsional bolan böleklere bölýän üç göni çyzyk bir nokatda kesişýändir.



Subudy. Teoremanyň şertine görä aşakdaky deňlikleri ýazyp bileris:

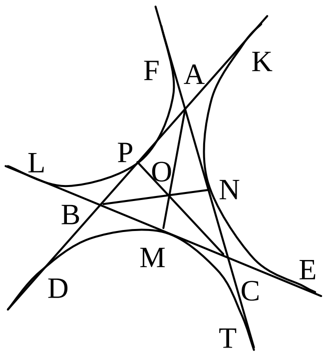
$\frac{BE}{EA}=\frac{\angle B}{\angle A}$; $\frac{AD}{DC}=\frac{\angle A}{\angle C}$; $\frac{CF}{BF}=\frac{\angle C}{\angle B}$. Bu deňlikleriň çep we sag böleklerini degişlilikde agzama-agza köpeldip alarys:

$\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CF}{BF}=\frac{\angle B}{\angle A}\cdot\frac{\angle A}{\angle C}\cdot\frac{\angle C}{\angle B}=1.$ Çewy teoremasyna ters teorema görä *AF, BD, CE* bir nokatda kesişýärler. S.E.Ş.

Nemes matematigi Nagel 1836-njy ýylda öz adyny göterýän aşakdaky teoremany çap etdirdi.

Üçburçlugyň iki tarapynyň dowamyna we üçünji tarapynyň özüne galtaşýan töwerege üçburçlugyň daşyndan galtaşýan töwerek diýilýär.

Teorema 13. Üçburçlugyň depelerini onuň daşyndan galtaşýan töwerekleriň üçburçlugyň taraplaryna galtaşma nokalary bilen birikdirýän göni çyzyklar bir nokatda kesişýärler.



Subudy. *B* burçuň içinden çyzylan töwerek onuň taraplaryndan özara deň bolan *BK* we *BE* kesimleri kesip alýar. Edil şuňa meňzeş *C* burçuň içinden çyzylan töwerek özara deň *CF* we *CL*, *A* burçuň içinden çyzylan töwerek bolsa özara deň *AD* we *AT* kesimleri kesip alýar. Indi bolsa bu kesimleriň ählisiniň üçburçlugyň ýarym perimetrine deňdigini görkezeliň: $2BK=2BE=BK+BE=AB+AK+BC+CE$; $AK=AN$ we $CE=CN$ bolýanlygyny göz öňünde tutup alarys: $AB+AN+BC+CN=$ $=AB+BC+AC=2p=a+b+c$. Bu ýerden $BK=BE=p$ gelip çykýar.Edil şuňa meňzeş $CF=CL=AD=AC=p$ bolýanlygyny görkezmek kyn däldir. Indi Çewy teoremasyna ters teoremany ulanmak üçin oňa girýän her bir kesimi üçburçlugyň ýarym perimetriniň we tarapynyň üsti bilen aňladýarys: $BP=BL=CL-BC=p-a;$ $PA=AF=CF-CA=p-b;$

$AN=AK=BK-AB=p-c;$ $CN=CE=BE-BC=p-a;$

$CM=CT=AT-AC=p-b;$ $BM=BD=AD-AB=p-c.$

Bu alnanlary Çewy teoremasyna ters teoremadaky deňligiň çep bölegine goýup alarys: $\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CM}{MB}\cdot\frac{p-a}{p-b}\cdot\frac{p-c}{p-a}\cdot\frac{p-b}{p-c}=1$.Çewy teoremasyna ters teorema görä *BN*, *AM*, *CP* göni çyzyklar bir nokatda kesişýärler. S.E.Ş.

Meseleler

1. *ABC* üçburçlugyň *BC*, *CA* we *AB* taraplarynyň üstünde AA_1, BB_1 we CC_1 kesimler bir nokatda kesişer ýaly edilip, degişlilikde A_1, B_1 we C_1 nokatlar saýlanylyp alynypdyr. A_1B_1 we A_1C_1 göni çyzyklar *A* depäniň üstünden *BC* tarapa parallel edilip geçirilen göni çyzygy degişlilikde C_2 we B_2 nokatlarda kesýär. $AB_2=AC_2$ deňligi subut etmeli.

2. Töweregiň daşyndan çyzylan altyburçlugyň garşylykly depelerini birikdirýän kesimleriň bir nokatda kesişýänligini subut etmeli.

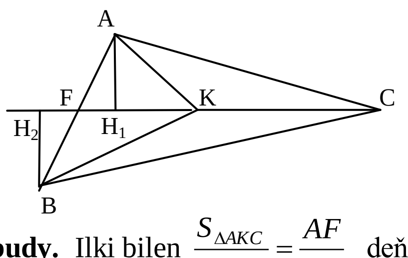
3. Töweregiň daşyndan çyzylan *ABCD* dörtburçlugyň *A* we *C* depeleri degişlilkde *CD* we *AD* taraplaryň töwerege galtaşma nokatlary bolan A_1 we C_1 bilen birikdirilipdir. *BD* diagonalyň AA_1 we CC_1 kesimleriň kesişme nokadynyň üsti arkaly geçýänligini subut etmeli.

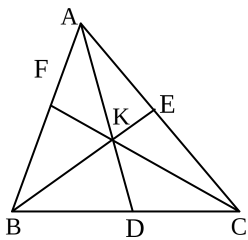
4. Üçburçlugyň islendik iki daşky burçunyň bissektrisalarynyň we üçünji burçunyň bissektrisasynyň bir nokatda kesişýändigini subut etmeli.

5. Güberçek altyburçlugyň garşylykly taraplary jübüt-jübütden parallel. Garşylykly taraplaryň ortalaryny birikdirýän göni çyzyklaryň bir nokatda keşişýändigini subut etmeli.

III. Wan-Obel teoremasy. Stýuart teoremasy. Žergon teoremasy

Teorema 14. (Wan-Obel). Üçburçlugyň depelerinden çykyp, onuň içinde kesişýän göni çyzyklaryň her biri üçin $\frac{AK}{KD}=\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}$ gatnaşyk dogrydyr.





Subudy. Ilki bilen $\frac{S_{\Delta AKC}}{S_{\Delta BKC}}=\frac{AF}{FB}$ deňligiň dogrylygyny görkezeliň.

$S_{\Delta AKC}$=0,5•KC•AH_1 we $S_{\Delta AKC}$=0,5•KC•BH_2 bolýanlygy düşnüklidir.

Onda $\frac{S_{\Delta AKC}}{S_{\Delta BKC}}=\frac{AH_1}{BH_2}$. BFH_2 we AFH_1 gönüburçly üçburçluklar bir ýiti burçlary deň ($\angle BFH_2$=$\angle AFH_1$– wertikal burçlar) bolany üçin meňzeşdirler. Olaryň meňzeşliginden $\frac{AH_1}{BH_2}=\frac{AF}{BF}$ gelip çykýar.

Indi teoremanyň subudyna geçýäris. $\frac{S_{\Delta AKC}}{S_{\Delta BKC}}=\frac{AF}{FB}$ we $\frac{S_{\Delta AKB}}{S_{\Delta BKC}}=\frac{AE}{EC}$ deňlikleri subut etmeli deňligimiziň çep böleginde ornuna goýup alarys:

$$\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{ES}=\frac{S_{\Delta AKC}}{S_{\Delta BKC}}+\frac{S_{\Delta AKB}}{S_{\Delta BKC}}=\frac{S_{\Delta AKC}+S_{\Delta AKB}}{S_{\Delta BKC}} \quad (1).$$

Degişlilikde AKC we CKD, AKB we BKD üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnasyklaryny degişli taraplaryň gatnaşyklary bilen çalşyrýarys. Şunlukda C depeden AD esasa inderilen beýikligiň AKC we CKD üçburçluklaryň ikisi üçin hem umumylygyny, B depeden AD esasa inderilen beýikligiň AKB we BKD üçburçluklaryň ikisi üçin hem umumylygyny göz öňünde tutýarys:

$$\frac{S_{\Delta AKC}}{S_{\Delta CKD}}=\frac{AK}{KD};\quad \frac{S_{\Delta AKB}}{S_{\Delta BKD}}=\frac{AK}{KD};\quad \frac{S_{AKC}+S_{AKB}}{S_{CKD}+S_{BKD}}=\frac{S_{AKC}+S_{AKB}}{S_{BKC}}=\frac{AK}{KD} \quad (2).$$

(1) we (2) deňlikleri deňeşdirip alarys: $\frac{AK}{KD}=\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}$. S.E.Ş.

Wan-Obel teoremasy käbir belli gatnaşyklary ýeňillik bilen subut etmäge mümkinçilik berýär. Mysala seredeliň.

Teorema 15. Üçburçlugyň medianalary kesişme nokadynda bir-birini 2:1 ýaly gatnaşykda bölýärler.

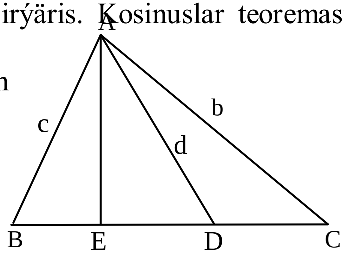
Subudy. AD mediana üçin subut edeliň. $AF=FB$ we $AE=EC$ bolany üçin $\frac{AK}{KD}=\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=1+1=2$ deňligi alarys. Bu deňlikden AK=2KD gelip çykýar. S.E.Ş.

Indiki getirjek teoremamyz M. Stýuartyň adyny göterýär. Sebäbi bu teoremany ol 1746-njy ýylda formulirläpdir (emma subut etmändir). Bu teoremanyň subudyny R. Simson 1751-nji ýylda çap etdiripdir.

Teorema 16. Eger $AD=d$ kesim ABC üçburçlugyň $BC=a$ tarapyny $BD=m$ we $CD=n$ böleklere bölýän bolsa, onda

$d^2a= b^2m+ c^2n-amn$ deňlik dogrudyr.

Subudy. *A* depeden *AE* beýikligi geçirýäris. Kosinuslar teoremasyny ulanyp, *BDA* üçburçlukdan *c* tarapy we *ADC* üçburçlukdan bolsa *b* tarapy kesgitleýäris:



$c^2=d^2+m^2-2m\bullet d\bullet\cos D=$

$=d^2+m^2-2md\cdot\dfrac{ED}{d}=d^2+m^2-2m\bullet ED$. (1).

$b^2=d^2+n^2-2n\bullet d\bullet\cos\angle ADC=$

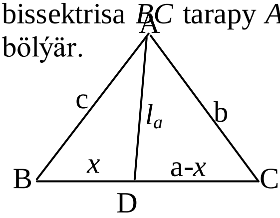
$=d^2+n^2-2n\bullet d\bullet(-\dfrac{ED}{d})=d^2+n^2-2n\bullet ED$. (2).

(1) deňligi n-e, (2) deňligi bolsa m-e köpeldip, soňra olaryň çep we sag böleklerini agzama-agza goşýarys:
$b^2m+c^2n=d^2n+m^2n+d^2m+n^2m=d^2(n+m)+mn(m+n)$. $m+n=a$ bolýanlygyny göz öňünde tutup alarys: $b^2m+c^2n=ad^2+amn$; $ad^2=b^2m+c^2n-amn$.
Stýuart teoremasy üçburçlugyň taraplary berlende onuň medianasyny we bissektrisasyny ýeňillik bilen hasaplamaga mümkinçilik berýär. $ad^2=b^2m+c^2n-amn$ formuladan d^2-y kesgitleýäris:
$d^2=\dfrac{b^2m+c^2n-amn}{a}$. Goý, d kesim a tarapa geçirilen mediana bolsun. Bu ýagdaýda $m=\dfrac{a}{2}$ we $n=\dfrac{a}{2}$ bolar. Bu bahalary soňky formulada ornuna goýup a tarapa geçirilen medianany tapmagyň formulasyny getirip çykararys:

$$m_a{}^2=\frac{b^2\cdot\frac{a}{2}+c^2\cdot\frac{a}{2}-a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}{a}=\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}.$$

$$m_a=\sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

Görnüşi ýaly, Stýuart teoremasyndan peýdalanyp medianany tapmagyň formulasyny getirip çykarmak ol diýen kyn däl. Üçburçlugyň bissektrisasyny tapmagyň formulasyny getirip çykarmak käbir goşmaça hasaplamalary geçirmekligi talap edýär. Üçburçlugyň *a* tarapyna geçirilen bissektrisanyň uzynlygyny tapmagyň formulasyny getirip çykaralyň. Onuň üçin ilki bilen bissektrisanyň häsiýetini ulanyp, *BD* we *CD* kesimleri kesgitläliň. Goý, $m=BD=x$ bolsun. Onda $n=CD=a-x$ bolar. *AD* bissektrisa BC tarapy AB we AC taraplara proporsional bolan böleklere bölýär.



$$\frac{x}{c}=\frac{a-x}{b},\ bx=ac-cx\ ,\ x(b+c)=ac$$

$$m=BD=\ x=\frac{ac}{b+c},$$

$n=CD=\ a-\dfrac{ac}{b+c}=\dfrac{ab}{b+c}$. $d^2=\dfrac{b^2m+c^2n-amn}{a}$. Goý, Stýuart teoremasyndaky d kesim a tarapa geçirilen bissektrisa bolsun. Bu ýagdaýda $m=\dfrac{ac}{b+c}$ we $n=\dfrac{ab}{b+c}$ bolar. Bu bahalary soňky formulada ornuna goýup a tarapa geçirilen bissektrisany tapmagyň formulasyny getirip çykararys:

$$l_a^{\ 2}=\frac{b^2\cdot\dfrac{ac}{b+c}+c^2\cdot\dfrac{ab}{b+c}-a\cdot\dfrac{ac\cdot ab}{(b+c)^2}}{a}=$$

$$=\frac{b^2c(b+c)+c^2b(b+c)-a^2cb}{(b+c)^2}=$$

$$=\frac{bc(b^2+cb+cb+c^2-a^2)}{(b+c)^2}=\frac{bc((b+c)^2-a^2)}{(b+c)^2}=$$

$=\dfrac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$. $\quad l_a^{\ 2}=\dfrac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$. Bu deňligiň iki böleginden hem kök alyp, gözlenilýän formulany taparys:

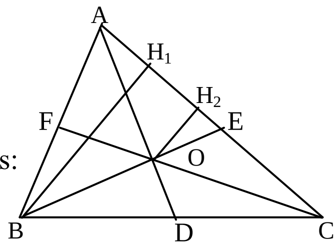
$$l_a^{\ 2}=\frac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c}.$$

Fransuz matematigi Žergon 1818-nji ýylda şu teoremany çap etdirýär.

Teorema 17. Eger AD, BE, CF göni çyzyklar ABC üçburçlugyň içindäki O nokatda kesişýän bolsalar, onda

$\dfrac{OD}{AD}+\dfrac{OE}{BE}+\dfrac{OF}{CF}=1$ we $\dfrac{AO}{AD}+\dfrac{BO}{BE}+\dfrac{CO}{CF}=2$ deňlikler dogrudyr.

Subudy. *ABC* üçburçlugyň BH_1 beýikligini we *AOC* üçburçlugyň OH_2 beýikligini indereliň. Bu üçburçluklaryň meýdanlary olaryň beýikleri ýaly gatnaşarlar. BEH_1 we OEH_2 gönüburçly üçburçluklar meňzeş bolany üçin degişli katetleriň gatnaşyklary gipotenuzalaryň gatnaşyklaryna deňdir:



$$\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{OH_2}{BH_1}=\frac{OE}{BE}.$$

Edil şuňa meňzeş aşakdaky deňlikleri alarys:

$\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{OD}{AD}$; $\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{OF}{CF}$. Subut etmeli birinji deňligimizde meýdanlaryň gatnaşyklaryny ornuna goýup alarys:

$$\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta ABC}}=$$

$$\frac{S_{\Delta BOC}+S_{\Delta AOC}+S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}}=1.$$ Teoremanyň birinji bölegi subut edildi . Teoremanyň ikinji bölegini subut edýäris:

$$\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=\frac{AD-OD}{AD}+\frac{BE-OE}{BE}+\frac{CF-OF}{CF}=$$

$$=1+1+1-\left(\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}\right)=3-1=2.$$ S.E.Ş.

Meseleler

1. *ABC* üçburçlugyň *AH* beýikliginiň üstünde *K* nokat alnypdyr. $AB^2 - AC^2 = KB^2 - KC^2$ deňligi subut etmeli.

2. Islendik *ABC* üçburçluk üçin $a = b \cos C + c \cos B$ deňligi subut etmeli.

3. Islendik *ABC* üçburçluk üçin $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B)=0$ deňligi subut etmeli.

4. Taraplary 3, 4, 5 bolan gönüburçly üçburçlugyň göni burçunyň bissektrisasynyň uzynlygyny tapmaly.

5. Merkezleri *ABC* üçburçlugyň depelerinde ýerleşen we her bir ikisi jübüt-jübütden galtaşýan üç sany töwerek çyzylypdyr. Olaryň radiuslarynyň $p-a$, $p-b$, $p-c$ (a, b, c üçburçlugyň taraplary, p bolsa ýarym perimetri) bolýanlygyny subut etmeli.

6. Islendik *ABC* üçburçluk üçin *abc=4pRr* (*a, b,* c üçburçlugyň taraplary, *p* ýarym perimetri, *R* we *r* daşyndan we içinden çyzylan töwerekleriň radiuslary) deňligiň dogrulygyny subut etmeli.

IY. Menelaý teoremasy. Simson teoremasy. Lemuan teoremasy. Dezarg teoremasy

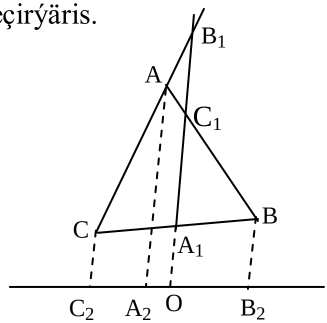
Aleksandriyýaly Menelaý 100-nji ýyllarda ýazan "Sferika" atly işinde sferik üçburçlugyň käbir häsiýetlerini ulanypdyr. Şunlukda ol tekiz üçburçluklaryň muňa meňzeş häsiýetini öň belli zat hökmünde kabul edipdir. Şoňa görä-de indiki getirjek teoremamyz barada Menelaýyň bu işinden öň hiç bir ýazgyda aýdylmany üçin oňa Menelaý teoremasy ady berilipdir.

Figurany kesip geçýän göni çyzyga kesiji ýa-da transwersal diýilýär. Eger figura köpburçlyk bolsa, transwersal figuranyň diňe tarapyny däl-de, eýsem onuň dowamyny hem kesip biler.

Teorema 18. Eger transwersal *ABC* üçburçlugyň *AB, BC, CA* taraplaryny ýa-da olaryň dowamlaryny degişlilikde C_1, A_1, B_1 nokatlarda kesip geçýän bolsa, onda

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$ deňlik ýerine ýetýändir.

Subudy. Goý, *ABC* üçburçlugyň taraplary ýa-da olaryň dowamlary $C_1A_1B_1$ transwersal bilen kesilen bolsun. *ABC* üçburçlugyň tekizliginde C_2B_2 göni çyzygy geçirýäris we üçburçlugyň depelerinden $B_1C_1A_1$ transwersala parallel bolan göni çyzyklary geçirýäris.



Parallel göni çyzyklar bilen kesilen göni çyzyklaryň kesimleri özara proporsionaldyrlar. Şu teorema görä CC_2, AA_2, B_1O we BB_2 özara parallel göni çyzyklaryň arasyndaky göni çyzyklaryň kesimleri özara proporsionaldyrlar. Şuňa laýyklykda aşakdaky deňlikleri ýazyp bileris:

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{A_2O}{OB_2};\ \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{B_2O}{OC_2};\ \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{OC_2}{A_2O}$$

Bu deňlikleriň sag böleklerini subut etmeli deňligimiziň çep böleginde ornuna goýup alarys.

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$ S.E.Ş.

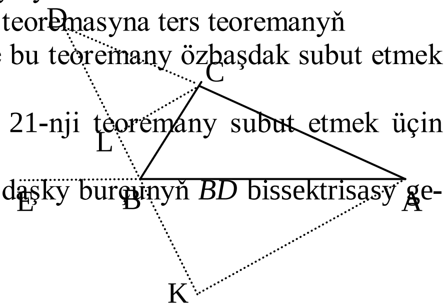
Menelaýyň bu teoremasyna ters teorema hem dogrudyr.

Teorema 19. Eger C_1, A_1, B_1 nokatlar ABC üçburçlugyň degişlilikde AB, BC, AC taraplarynda ýa-da olaryň dowamlarynda ýatyp,

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$ deňlik ýerine ýetse, onda bu nokatlar bir göni çyzygyň üstünde ýatýarlar.

Bu teoremanyň subudy Çewy teoremasyna ters teoremanyň subudyna meňseşdir. Şoňa görä-de bu teoremany özbaşdak subut etmek üçin hödürleýäris.

Aşakdaky getirjek teoremamyz 21-nji teoremany subut etmek üçin gerekdir.



Teorema 20. ABC üçburçlugyň B daşky burçunyň BD bissektrisasy geçirilipdir. Onuň AC tarapyň dowamyny $AD:DC=AB:BC$ ýaly gatnaşykda bölýändigini subut etmeli.

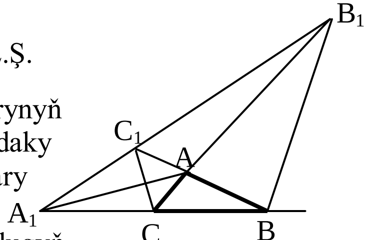
Subudy.
C we A depelerden BD göni çyzyga CL we AK perpendikulýarlary inderýäris. D ýiti burçy umumy bolany üçin CDL we ADK gönüburçly üçburçluklar meňzeşdirler.

Bu üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{AD}{CD}=\frac{AK}{CL}$ (1) deňligi alarys.

BD bissektrisa bolany üçin $\angle EBL=\angle LBC$ we wertikal burçlar bolany üçin $\angle EBL=\angle ABK$. Bu ýerden $\angle LBC=\angle ABK$ gelip çykýar. Diýmek, ýiti burçlary deň bolany üçin CLB we AKN gönüburçly üçburçluklar meňzeşdirler. Olaryň meňzeşliginden

$\frac{AK}{CL}=\frac{AB}{CB}$ (2) deňligi alarys. (1) we (2) deňliklerden subut etmeli deňligimiz gelip çykýar: $\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{CB}$. S.E.Ş.

Teorema 21. Üçburçluguň daşky burçlarynyň bissektrisalarynyň ol burçlaryň garşysyndaky taraplaryň dowamlaryny kesişme nokatlary bir göni çyzygyň üstünde ýatýarlar.



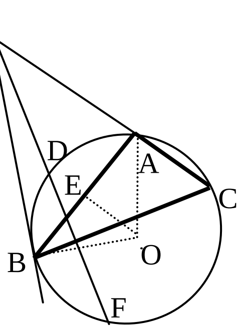
Subudy. A_1, B_1, C_1 nokatlar ABC üçburçlugyň taraplarynyň dowamlarynda ýatýar. Diýmek,ol üç nokadyň bir göni çyzygyň üstünde ýatýanlygyny subut etmek üçin

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1\,(3)$$ bolýanlygyny görkezmek ýeterlikdir.

Üçburçlugyň daşky burçlarynyň bissektrisalarynyň häsiýetine görä $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{AB}{AC}$, $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC}{BC}$ deňlikleri alarys. Bu deňlikleriň sag böleklerini (3) deňligiň çep böleginde ornuna goýup alarys:

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AC}{BC}=1.$$

Menelaý teoremasyna ters teorema görä A_1, B_1, C_1 nokatlar bir göni çyzygyň üstünde ýatýarlar.



Bu getyirjek teoremamyz hem 23-nji teoremany subut etmek üçin gerekdir.

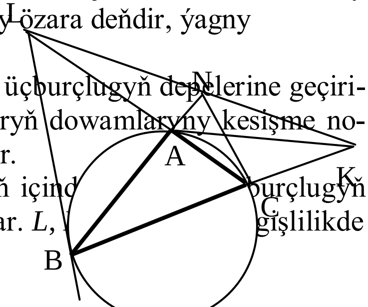
Teorema 22. Töweregiň daşynda alnan *L* nokatdan oňa *LB* galtaşýan hem-de töweregi *A* we *C* nokatlarda kesýän kesiji göni çyzyk geçirilen bolsa, onda $LB^2=LC\bullet LA$ deňlik dogrudyr.

Subudy. Ilki bilen $\angle LBA=\angle ACB$ bolýandygyny görkezeliň. Içinden çyzylan *ACB* burç *AOB* merkezi burçuň ýarysy bilen ölçelýänligi üçin $\angle ACB=0{,}5\angle AOB=\angle AOE=\angle BOE$. $\angle LBO=\angle LBE+\angle EBO=90°$ we $\angle EBO+\angle EOB=90°$ bolany üçin $\angle LBE=\angle EOB=\angle ACB$ gelip çykýar. Diýmek, *L* burçy umumy we $\angle LBA=\angle LCB$ bolany üçin *ALB* we *BLC* üçburçluklar meňzeşdirler. Bu üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{AL}{LB}=\frac{AB}{BC}=\frac{LB}{LC}$ deňlikleri alarys. $\frac{LB}{LC}=\frac{AL}{LB}$ deňlikden subut etmeli $LB^2=LC\bullet LA$ deňligimizi alarys.

Netije. Bir nokatdan töwerege geçirilen iki kesijiniň her biriniň daşky bölegininiň onuň özüne köpeltmek hasyllary özara deňdir, ýagny

$$LC\bullet LA=LF\bullet LD$$

Teorema 23. Töweregiň içinden çyzylan üçburçlugyň depelerine geçirilen galtaşýanlaryň, garşysyndaky taraplaryň dowamlaryny kesişme nokatlary bir göni çyzygyň üstünde ýatýarlar.



Subudy. Goý, *AK*, *BL* we *CN* töweregiň içind [illegible] burçlugyň depelerine geçirilen galtaşýanlar bolsunlar. *L*, [illegible] gişlilikde *AC*, *AB*, *BC* taraplaryň dowamlaryny bu galtaşýanlaryň kesişme nokatlarydyr. Bize *L*, *N*, *K* nokatlaryň bir göni çyzygyň üstünde ýatýanlygyny subut etmek gerek. Bu nokatlaryň ABC üçburçlugyň taraplarynyň dowamlarynda ýatýanlygy üçin

$\frac{AL}{LC}\cdot\frac{CK}{KB}\cdot\frac{BN}{NA}=1$ deňligiň dogrulygyny subut etmek ýeterlikdir. Munuň üçin $\frac{AL}{LC}$ gatnaşyga seredeliň.

Subut eden 22-nji teoremamyza görä $\frac{AL}{LB}=\frac{AB}{BC}=\frac{LB}{LC}$ deňlik dogrudyr.

Subut etmeli deňligimizdäki birinji gatnaşygy aşakdaky ýaly ýazýarys:

$$\frac{AL}{LC}=\frac{AL}{LB}\cdot\frac{LB}{LC}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2.$$

Edil şuňa meňzeş subut etmeli deňligimizdäki ikinji we üçünji gatnaşyklary hem aşakdaky ýaly ýazýarys:

$$\frac{CK}{KB}=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2;\quad \frac{BN}{ND}=\left(\frac{BC}{AC}\right)^2$$

Bu alnan gatnaşyklary subut etmeli deňligimizde ornuna goýup alarys:

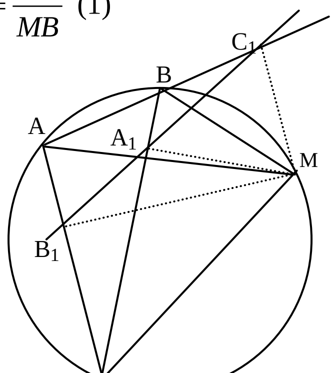
$$\frac{AL}{LC}\cdot\frac{CK}{KB}\cdot\frac{BN}{NA}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2\cdot\left(\frac{AC}{AB}\right)^2\cdot\left(\frac{BC}{AC}\right)^2=1.\ \text{S.E.Ş.}$$

Indiki getirjek teoremamyz Robert Simsonyň (1687–1768) ady bilen baglanyşyklydyr. R.Simson geometriýa we arifmetika ylymlaryna düýpli goşant goşan alym hökmünde tanalýar.

Teorema 24. Üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň islendik nokadyndan onuň taraplaryna ýa-da olaryň dowamlaryna inderilen perpendikulýarlaryň esaslary bir göni çyzygyň üstünde ýatýar.

Subudy. $\angle MBC_1=\angle MCB_1$. Sebäbi $\angle MBC_1+\angle MBA=180°$ we $\angle MCB_1+\angle MBA=180°$. Bu ýiti burçlaryň deňliginden MBC_1 we MB_1C gönüburçly üçburçluklaryň meňzeşligi gelip çykýar. Bu üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{BC_1}{MB}=\frac{CB_1}{MC}$ ýa-da $\frac{CB_1}{C_1B}=\frac{MC}{MB}$ (1)

gatnaşygy alýarys. Şol bir MC duga daýanýanlygy üçin MAB_1 we MBA_1 içinden çyzylan burçlar özara deňdirler. Bu ýiti burçlaryň deňliginden MAB_1 we



MBA_1 gönüburçly üçburçluklaryň meň-
zeşligi gelip çykýar. Bu üçburçluklaryň meňzeşliginden

$$\frac{BA_1}{B_1A}=\frac{MB}{MA}$$ (2) gatnaşygy alarys.

. Şol bir MB duga daýanýanlygy üçin C_1AM we MCA_1 içinden çyzylan burçlar özara deňdirler. Bu ýiti burçlaryň deňliginden MAC_1 we MCA_1 gönüburçly üçburçluklaryň meňzeşligi gelip çykýar. Bu üçburçluklaryň meňzeşliginden

$$\frac{AC_1}{A_1C}=\frac{MA}{MC}$$ (3) gatnaşygy alarys. (1), (2), (3) deňlikleriň çep we sag böleklerini agzama- agza köpeldip alarys:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{A_1C}\cdot\frac{BA_1}{B_1A}\cdot\frac{CB_1}{C_1B}=\frac{MC}{MB}\cdot\frac{MB}{MA}\cdot\frac{MA}{MC}=1.$$

Menelaý teoremasyna ters teorema görä A_1, B_1, C_1 nokatlar bir göni çyzygyň üstünde ýatýarlar. S.E.Ş.

A_1, B_1, C_1 nokatlaryň üsti bilen geçýän göni çyzyga Simson göni çyzygy diýilýär. Fransuz matematigi Lemuan bolsa Simson teoremasynyň subudyndaky meňzeş gönüburçly üçburçluklaryň taraplarynyň beýleki gatnaşyklaryna üns berip, onuň teoremasynyň üstüni doldurdy.

Teorema 25. Töweregiň islendik nokadyndan içinden çyzylan üçburçlugyň depelerine we ol depeleriň garşysyndaky taraplara çenli uzaklyklaryň köpeltmek hasyllary ol nokat üçin hemişelikdir, ýagny $MA{\bullet}MA_1=MB{\bullet}MB_1=MC{\bullet}MC_1$

Subudy. Simson teoremasynyň subudyndaky çyzgydan peýdalanýarys. MBC_1 we MCB_1 gönüburçly üçburçluklaryň meňzeşliginden alarys:

$$\frac{MB}{MC}=\frac{MC_1}{MB_1}$$ ýa-da $MC_1{\bullet}MC= MB_1{\bullet}MB$ (4).

MA_1C we MC_1A gönüburçly üçburçluklaryň meňzeşliginden alarys:

$$\frac{MC}{MA}=\frac{MA_1}{MC_1}$$ ýa-da $MC_1{\bullet}MC= MA_1{\bullet}MA$ (5).

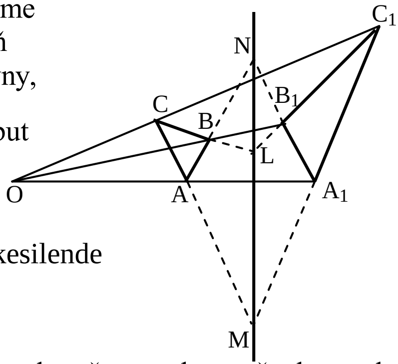
(4) we (5) deňlikleri deňeşdirip alarys:

$MA{\bullet}MA_1=MB{\bullet}MB_1=MC{\bullet}MC_1$ S.E.Ş.

Arhitektor Žerar Dezarg (1591–1661) öz adyny göterýän aşakdaky teoremany formulirledi we ony Menelaý teoremasyndan peýdalanyp subut etdi.

Teorema 26. Eger ABC we $A_1B_1C_1$ iki üçburçlugyň degişli depelerini birikdirýän AA_1, BB_1, CC_1 göni çyzyklar şol bir O nokatda kesişýän bolsalar, onda degişli taraplaryň dowamlarynyň kesişme nokatlary bir göni çyzygyň üstünde ýatýarlar.

Subudy. Goý, AB we A_1B_1 taraplaryň dowamlarynyň kesişme nokady N, BC we B_1C_1 taraplarynyň dowamlarynyň kesişme nokady L, AC we A_1C_1 taraplaryň dowamlarynyň kesişme nokady M bolsun. L, M, N nokatlaryň bir göni çyzygyň üstünde ýatýanlygyny, ýagny $\frac{LB}{LC}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{NA}{NB}=1$ deňligi subut etmeli.



OBC üçburçlugyň taraplarynyň dowamlary LB_1C_1 transwersal bilen kesilende

$\frac{LB}{LC}\cdot\frac{CC_1}{C_1O}\cdot\frac{B_1O}{B_1B}=1$ deňlik alynýar.

Edil şuňa meňzeşlikde OCA üçburçlugyň taraplarynyň dowamlary MC_1A_1 transwersal, OAB üçburçlugyň taraplarynyň dowamlary bolsa NA_1B_1 transwersal bilen kesilende degişlilikde

$\frac{MC}{MA}\cdot\frac{A_1A}{A_1O}\cdot\frac{C_1O}{C_1C}=1$ we $\frac{NA}{NB}\cdot\frac{B_1B}{B_1O}\cdot\frac{A_1O}{A_1A}=1$ deňlikler alynýar.

Bu deňlikleriň çep we sag böleklerini degişlilikde agzama-agza köpeldip alarys:
$$\frac{LB}{LC}\cdot\frac{CC_1}{C_1O}\cdot\frac{B_1O}{B_1B}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{A_1A}{A_1O}\cdot\frac{C_1O}{C_1C}\cdot\frac{NA}{NB}\cdot\frac{B_1B}{B_1O}\cdot\frac{A_1O}{A_1A}=$$
$$=\frac{LB}{LC}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{NA}{NB}=1.$$

Subut etmek talap edilýän deňlik alyndy. Diýmek, Menelaý teoremasyna ters teorema görä L, M we N nokatlar bir göni çyzygyň üstünde ýatýarlar. S.E.Ş.

Depelerini birikdirýän göni çyzyklar bir nokatda kesişýän üçburçluklara gomologiki üçburçluklar diýilýär.

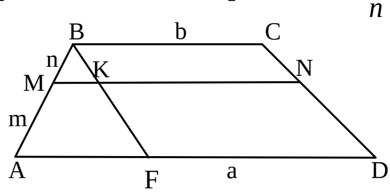
Meseleler

1. S töwerek S_1 we S_2 töwereklere degişlilikde A_1 we A_2 nokatlarda galtaşýar. A_1A_2 göni çyzygyň S_1 we S_2 töwereklere geçirilen umumy daşky galtaşýanlaryň ýa-da umumy içki galtaşýanlaryň kesişme nokadynyň üstünden geçýänligini subut etmeli.

2. Bir göni çyzygyň üstünde A_1, B_1 we C_1 nokatlar, beýleki göni çyzygyň üstünde bolsa A_2, B_2 we C_2 nokatlar alynypdyr. A_1B_2 we A_2B_1 göni çyzyklar C nokatda, B_1C_2 we B_2C_1 göni çyzyklar A nokatda, C_1A_2 we C_2A_1 göni çyzyklar B nokatda kesişýärler. A, B we C nokatlaryň bir göni çyzygyň üstünde ýatýanlygyny subut etmeli.
3. Töweregiň içinden çyzylan altyburçlugyň garşylykly taraplary özara parallel däl. Bu altyburçlugyň garşylykly taraplarynyň kesişme nokatlarynyň bir göni çyzygyň üstünde ýatýanlygyny subut etmeli.
4. *ABCD* içinden çyzylan dörtburçlugyň *AB* we *CD* taraplarynyň dowamlarynyň kesişme nokadynyň, *BC* göni çyzygyň töwerege *D* nokatda geçirilen galtaşýän bilen kesişme nokadynyň hem-de *AD* göni çyzygyň töwerege *C* nokatda geçirilen galtaşýän bilen kesişme nokadynyň bir göni çyzygyň üstünde ýatýanlygyny subut etmeli.
5. *ABCD* içinden çyzylan dörtburçlugyň *B* we *D* depelerinde töwerege geçirilen galtaşýanlaryň kesişme nokadynyň, *AB* we *CD* göni çyzyklaryň kesişme nokadynyň we *AD* we *BC* göni çyzyklaryň kesişme nokadynyň bir göni çyzygyň üstünde ýatýanlygyny subut etmeli.
6. Üç töweregiň her bir ikisine geçirilen umumy daşky galtaşýanlar degişlilikde *A*, *B* we *C* nokatlarda kesişýärler. *A*, *B* we *C* nokatlaryň bir göni çyzygyň üstünde ýatýanlygyny subut etmeli.
7. Dürli taraply üçburçlugyň daşky burçlarynyň bissektrisalarynyň garşylykly taraplaryň dowamlaryny kesişme nokatlarynyň bir göni çyzygyň üstünde ýatýanlygyny subut etmeli.

Y. Trapesiýa baradaky 1-nji we 2-nji teoremalar.
Eýler teoremasy. Ptolomeý teoremasy. Bretşneýder teoremasy

Teorema 27. (Trapesiýa baradaky 1-nji teorema).Esaslary a we b bolan trapesiýanyň gapdal tarapyny a esasdan hasaplananda $\frac{m}{n}$ gatnaşykda bölýän we esasa parallel kesimiň uzynlygy $\frac{na+mb}{m+n}$ formula boýunça hasaplanylýar.



Subudy. *CD* gapdal tarapa parallel bolan *BF* kesimi geçirýäris.Onda *BC=KN=FD=b, AF=AD-FD=a-b* bolar. Bize *MK* kesimiň uzynlygyny kesgitlemek galýar. Sebäbi *MN=KN+MK* (1) deňlikde *KN* kesimiň uzynlygy belli, *MK* kesimiň uzynlygy bolsa näbelli. *MBK* we *ABF* üçburçluklar meňzeşdir. Sebäbi olaryň *B* burçy umumy we parallel *AD* we BC göni çyzyklary AB göni çyzyk kesip geçende alynýan degişli burçlar bolany üçin $\angle BMK=\angle BAF$. Bu üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{AF}{MK}=\frac{AB}{MB}$ gelip çykýar. $AB=m+n$, $MB=n$ bolýanlygyny göz öňünde tutup alýarys: $MK=\frac{AF\cdot MB}{AB}=\frac{(a-b)\cdot n}{m+n}$ (2).

MK kesimiň bu bahasyny (1) deňlikde ornuna goýup alarys:

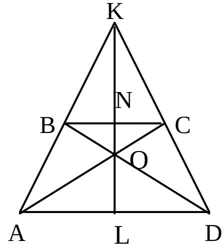
$MN=KN+MK=b+\frac{(a-b)n}{m+n}=\frac{bm+bn+an-bn}{m+n}=\frac{an+bm}{m+n}$. S.E.Ş.

$m=n$ bolanda bu trapesiýa baradaky 1-nji teorema trapesiýanyň orta çyzygy baradaky teoremany berýär. Muny görkezeliň:

$$MN=\frac{na+mb}{m+n}=\frac{na+nb}{n+n}=\frac{n(a+b)}{2n}=\frac{a+b}{2}.$$

Teorema 28. (Trapesiýa baradaky 2-nji teorema). Trapesiýanyň diagonallarynyň kesişme nokadyny onuň gapdal taraplarynyň dowamlarynyň kesişme nokady bilen birikdirýän göni çyzyk trapesiýanyň esaslaryny deň ýarpa bölýär.

Subudy. Wertikal burçlar bolany üçin $\angle NOC=\angle AOL$. BC we AD parallel göni çyzyklary AC göni çyzyk kesip geçende alynýan atanak ýatýan burçlar bolany üçin $\angle NCO=\angle OAL$. Diýmek, NOC we LOA üçburçluklar meňzeşdirler. Olaryň meňzeşliginden



$\frac{AL}{NC}=\frac{LO}{NO}$ gelip çykýar. Edil ýokardaky üçburçluklaryň meňzeşligi ýaly, LOD we NOB üçburçluklar hem meňzeşdirler. Bu meňzeşlikden $\frac{LD}{BN}=\frac{OL}{NO}$ gelip çykýar. Bu iki gatnaşygyň sag bölekleri deň bolany üçin $\frac{AL}{NC}=\frac{LD}{BN}$ ýa-da $AL\bullet BN=NC\bullet LD$ (1) alarys.

ALK we BNK üçburçluklar meňzeşdirler. Sebäbi K burç umumy we AL we BN parallel göni çyzyklary AK göni çyzyk kesip geçende alynýan degişli burçlar bolany üçin $\angle KBN=\angle KAL$. KLA we KNB üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{AL}{BN}=\frac{KL}{NK}$ deňligi alarys.

Ýokardaky üçburçluklaryň meňzeşligi ýaly, *KLD* we *KNC* üçburçluklar hem meňzeşdirler. Bu meňzeşlikden $\frac{LD}{NC}=\frac{KL}{NK}$ alarys.

Bu iki gatnaşygyň sag bölekleri deň bolany üçin $\frac{AL}{BN}=\frac{LD}{NC}$ ýa-da $AL \bullet NC = BN \bullet LD$ (2) deňligi alarys.

(1) we (2) deňlikleriň çep we sag böleklerini köpeldip alarys:

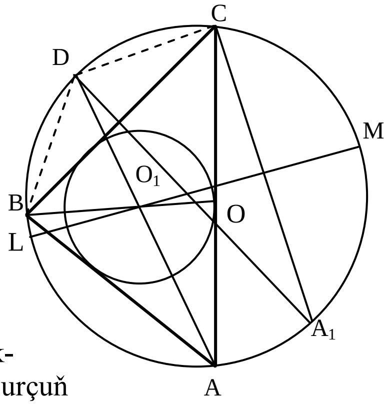
$AL \bullet BN \bullet AL \bullet NC = NC \bullet LD \bullet BN \bullet LD$; $AL^2 = LD^2$; $AL = LD$.

Indi (1) denligiň çep bölegi bilen (2) deňligiň sag bölegini we(1) denligiň sag bölegi bilen (2) deňligiň çep bölegini köpeldip alarys: $AL \bullet BN \bullet BN \bullet LD = NC \bullet LD \bullet AL \bullet NC$; $NB^2 = NC^2$, $NB = NC$. S.E.Ş.

L.Eýler(1727–1783) öz adyny göterýän aşakdaky örän peý-daly teoremany formulirledi we subut etdi.Matematikanyň dürli ugurlarynda uly açyşlar eden bu alym Şweýsariýanyň Bazel şähe-rinde dünýä inýär. Ol köp ýyllap Orsýediň Sankt-Peterburg şähe-rinde, Germaniýanyň Berlin şäherinde ýaşaýar we işleýär.

Teorema 29. *ABC* üçburçlugyň içinden we daşyndan çyzylan töwerekleriň merkezleriniň arasyndaky *d* uzaklyk $d=\sqrt{R^2-2Rr}$ formula boýunça hasaplanylýar. Bu ýerde *R*-üçburçlugyň daşyndan, *r*- bolsa içinden çyzylan töwerekleriň radiuslary.

Subudy. AO_1 bissektrisany dowam etdirýäris we onuň töwerek bilen ke-sişme nokadyny *D* bilen belgileýäris.



O we O_1 nokatlaryň üstünden *LM* diametri geçirýäris. Kesişýän iki hor-danyň bölekleriniň köpeltmek hasyl-lary deň bolany üçin

$LO_1 \bullet O_1M = AO_1 \bullet O_1D$

deňligi ýazýarys. $LO_1 = R-d$ we $O_1M = R+d$ bolýanlygyny göz öňünde tutup alarys:

$(R-d)(R+d) = AO_1 \bullet O_1D$ (1).

BO_1D üçburçlugyň deňýanly üçburçluk-dygyny görkezeliň. BO_1 göni çyzyk *B* burçuň bissektrisasy, AO_1 göni çyzyk bolsa *A* burçuň bissektrisasy. Onda ABO_1 üçburçlugyň daşky burçy bolany üçin $\angle BO_1D = \frac{\angle A + \angle B}{2}$.

$\angle O_1BD=\angle O_1BC+\angle CBD$ bolýanlygyna göz ýetirmek kyn däldir. Şol bir DC duga daýanýanlygy üçin $\angle CBD=\angle CAD=\frac{\angle A}{2}$. O_1BC burç hem B burçuň ýarysyna deňdir. Onda $\angle O_1BD=\frac{\angle A+\angle B}{2}$. Diýmek, iki burçy özara deň bolany üçin BO_1D üçburçluk deňýanlydyr, ýagny $BD=DO_1$.

Özara deň BD we DC dugalary dartýan hordalar hökmünde BD we DC kesimler hem özara deňdirler. $BD=DO_1$ we $BD=DC$ deňliklerden $O_1D=DC$ gelip çykýar.

D we O nokatlaryň üstünden diametr geçirýäris we onuň töwerek bilen kesişme nokadyny A' bilen belgileýäris. Şol bir CD duga daýanýanlygy üçin $\angle DAC=\angle DAC'=\frac{\angle A}{2}$ bolar. DA' diametr bolany üçin DCA' üçburçluk C burçy göni bolan gönüburçly üçburçlukdyr. Diýmek, $\frac{CD}{DA'}=\sin\angle DAC'=\sin\angle DAC$. $DA'=2R$ bolýanlygyny göz öňünde tutup alarys:

$$DO_1=CD=\sin\angle DAC\cdot 2R \quad (2).$$

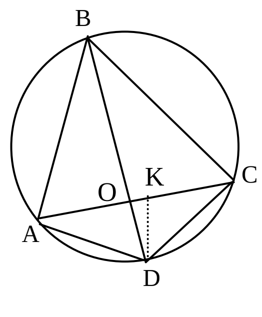
$$\frac{r}{AO_1}=\sin\angle DAC\ ;\quad AO_1=\frac{r}{\sin\angle DAC} \quad (3).$$

(2) we (3) deňlikleri (1) deňlikde ornuna goýup alarys:

$R^2-d^2=AO_1\cdot O_1D=\sin\angle DAC\cdot 2R\cdot\frac{r}{\sin\angle DAC}=2Rr$. Bu ýerden subut etmeli deňligimizi alarys: $d=\sqrt{R^2-2Rr}$. S.E.Ş.

Teorema 30. (Ptolomeý). Içinden çyzylan dörtburçlugyň garşylykly taraplarynyň köpeltmek hasyllarynyň jemi olaryň diagonallarynyň köpeltmek hasylyna deňdir.

Subudy. CD şöhläniň üstünde ADO burça deň bolan CDK burçy alyp goýýarys. ABD we CDK üçburçluklar meňzeşdirler. Sebäbi şol bir AD duga daýanýanlygy üçin $\angle ABD=\angle KCD$ we gurluşy boýunça $\angle BDA=\angle CDK$. Bu üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{CK}{CD}=\frac{AB}{BD}$ ýa-da



$CK\cdot BD=AB\cdot CD$ (1) deňligi alarys.

AKD we BDC üçburçluklar meňzeşdirler. Sebäbi şol bir CD duga daýanýanlygy üçin

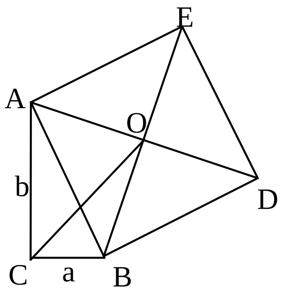
$\angle KAD=\angle CBD$, $\angle ADK=\angle ADO+\angle ODK$
we $\angle CDB= \angle CDK+\angle ODK$ bolýanlygy üçin
$\angle ADK=\angle CDB$.Bu üçburçluklaryň meňzeşliginden
$\frac{AK}{AD}=\frac{BC}{BD}$ ýa-da $AK \cdot BD=AD \cdot BC$ (2)deňligi alarys. (1) we (2) deňlikleriň çep we sag böleklerini degişlilikde agzama-agza goşyp alarys:

$$CK \cdot BD+AK \cdot BD=AB \cdot CD+AD \cdot BC;$$

$$BD(CK+AK)=AB \cdot CD+AD \cdot BC; \quad BD \cdot AC=AB \cdot CD+AD \cdot BC.$$ S.E.Ş.

Ptolomeýiň bu teoremasy mekdep kursuna degişli köp meseleleriň çözülişini ýeňilleşdirýär. Eger mesele çözülýän döwründe daşyndan töwerek çyzyp bolýan, ýagny garşylykly burçlarynyň jemi 180° deň bolan dörtburçluk bilen iş salyşylýan bolsa, onda ol me-seläni çözmekde Ptolomeý teoremasyny üstünlikli peýdalanyp bolar. Aýdylanlara mysal hökmünde, aşakdaky meseläniň Ptolomeý teoremasyny ulanman we ony ulanyp çözülişlerine seredeliň.

Mesele. Katetleri *a* we *b* bolan gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy tarap hökmünde alnyp, üçburçlugyň daş ýanyndan kwadrat çyzylypdyr. Kwadratyň diagonallarynyň kesişme nokadyndan üçburçlugyň göni burçunyň depesine çenli uzaklygy tapmaly.



Çözülişi 1. Meseläni Ptolomeý teoremasyny ulanman çözýäris:

$AB=BD=DE=AE=\sqrt{a^2+b^2}$;

$AD=BE=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{2(a^2+b^2)}$;

$AO=BO=0{,}5AD=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

$\angle OAB=45°$ we $\cos\angle CAB=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\angle CAB=\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

bolýanlygyny göz öňünde tutýarys hem-de kosinuslar teoremasyny ulanyp, *AOC* üçburçlugyň *OC* tarapyny kesgitleýäris:

$$OC^2=AC^2+OA^2-2AC \cdot OA \cdot \cos\angle OAC=$$

$$=b^2+\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2-2b \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \cdot \cos\left(45^o+\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=$$

$$=b^2+\frac{a^2+b^2}{2}-2b\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}-\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2+b^2}}\right)=$$

$$=b^2+\frac{a^2+b^2}{2}-b\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=$$

$$=b^2+\frac{a^2+b^2}{2}-b(b-a)=\frac{a^2+b^2+2a}{2}=\frac{(a+b)^2}{2};$$

$$OC^2=\frac{(a+b)^2}{2};\quad OC=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}};\quad CO=\frac{a+b}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

Görnüşi ýaly, meseläniň çözülişı ýterlik derejede çylşyrymly we uzyn bolup, ol ýeterlik derejede köp zähmeti talap etdi.

2. Indi meseläni Ptolomeý teoremasyny ulanyp çözýäris. *ACBO* dörtburçluga seredeliň. Bu dörtburçlukda $\angle C+\angle O=90°+90°=180°$ bolany üçin onuň daşyndan töwerek çyzyp bolar. Diýmek, bu dörtburçluk üçin Ptolomeý teoremasyny ulanmak mümkin.

$$CO\bullet AB=AC\bullet OB+AO\bullet CB.$$

Bu deňlikden *CO*-ny kesgitleýäris. Şunlukda *AO*=*OB* bolýanlygyny we $AO=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$; $AB=\sqrt{a^2+b^2}$; *AC*=*b*;*CB*=*a* deňlikleri göz öňünde tutýarys.

$$\mathrm{CO}=\frac{AC\cdot OB+AO\cdot CB}{AB}=\frac{AO\cdot(AC+CB)}{AB}=\frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}=$$

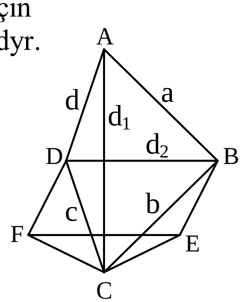
$=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$. Görnüşi ýaly, Ptolomeý teoremasyny ulanmak çylşyrymly hasaplamalary geçirmekden halas etdi.

Bretşneýderiň adyny göterýän indiki getirjek teoremamyza dörtburçluklar üçin kosinuslar teoremasy hem diýilýär.

Teorema 31. *a*, *b*, *c*, *d*- *ABCD* dörtburçlugyň taraplary, d_1 we d_2 onuň diagonallary bolsa, onda diagonallar we taraplar üçin $(d_1d_2)^2=(ac)^2+(bd)^2-2abcd\bullet\cos(A+C)$ deňlik dogrudyr.

Subudy.

CD tarapyň daş ýanynda *ABC* üçburçluga meňzeş bolan *CFD* üçburçlugy guryarys:



Şunlukda, ol üçburçlugy $\angle CAB=\angle DCE$
we $\angle ACB=\angle EDC$ bolar ýaly edip gurýarys.
CB tarapyň daş ýanynda CDA üçburçluga
meňzeş bolan CEB üçburçlugy gurýarys.
Şunlukda, ol üçburçlugy $\angle DAC=\angle ECB$, $\angle DCA=\angle CBE$ bolar ýaly edip gurýarys. ABC we CFD üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{FC}{CD}=\frac{AB}{AC}$ ýa-da $FC=\frac{AB\cdot CD}{AC}=\frac{a\cdot c}{d_1}$ deňligi alarys.Yene-de şu üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{FD}{CD}=\frac{CB}{AC}$ ýa-da $FD=\frac{CB\cdot CD}{AC}=\frac{b\cdot c}{d_1}$ (1) deňligi alarys.

CDA we CEB üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{CE}{CB}=\frac{AD}{AC}$ ýa-da $CE=\frac{AD\cdot CB}{AC}=\frac{d\cdot b}{d_1}$ deňligi alarys. Yene-de şu üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{BE}{BC}=\frac{CD}{AC}$ ýa-da $BE=\frac{CD\cdot BC}{AC}=\frac{b\cdot c}{d_1}$ (2) deňligi alarys.
Diýmek, (1) we (2) deňlikleri deňeşdirip, $FD=BE$ bolýanlygyna göz ýetireris.

Indi FDB we DBE burçlaryň jeminiň 180° deňligini görkezeliň.
$\angle FDB+\angle DBE=\angle FDC+\angle CDB+\angle DBC+\angle CBE$; $\angle FDC=\angle BCA$ we $\angle CBE=\angle DCA$ bolýanlygyny göz öňünde tutup alarys:
$\angle FDC+\angle CDB+\angle DBC+\angle CBE=\angle BCA+\angle CDB+\angle DBC+\angle DCA=$
$=\angle CDB+\angle DBC+\angle DCB=180°$ (üçburçlugyň burçlarynyň jemi 180° deň). Diýmek, FD we BE göni çyzyklary üçünji BD göni cyzyk kesip geçende alynýan FDB we DBE birtaraplaýyn burçlaryň jemi 180° deň bolany üçin FD we BE göni çyzyklar özara paralleldirler. Belli bolşy ýaly, eger dörtburçlugyň garşylykly iki tarapy deň we parallel bolsa, onda ol dörtburçluk parallelogramdyr. Diýmek, $FDBE$ dörtburçluk parallelogram. Onda $DB=FE=d_2$.

$$\angle FCE=\angle FCD+\angle DCB+\angle BCE=\angle CAB+\angle DCB+\angle DAC=$$
$$=\angle DAB+\angle DCB.$$

FEC üçburçluk üçin kosinuslar teoremasyny ulanýarys:

$$FE^2=FC^2+CE^2-2FC\bullet CE\bullet\cos\angle FCE=$$
$$=FC^2+CE^2-2FC\bullet CE\bullet\cos(\angle DAB+\angle DCB)$$

$$d_2^2=(\frac{a\cdot c}{d_1})^2+(\frac{d\cdot b}{d_1})^2-2\cdot\frac{a\cdot c\cdot d\cdot b}{d_1^2}\cos(\angle DAB+\angle DCB);$$

$$(d_1\bullet d_2)^2=(a\bullet c)^2+(d\bullet b)^2-2abcd\bullet\cos(\angle DAB+\angle DCB).$$ S.E.Ş.

$\angle DAB+\angle DCB=180°$ bolanda *ABCD* dörtburçlugyň daşyndan töwerek çyzyp bolýar. $\cos180°=-1$ bolýanlygyny göz öňünde tutsak Bretşneýderiň teoremasy Ptolomeýiň teoremasyny berer:

$$(d_1\bullet d_2)^2=(a\bullet c)^2+(d\bullet b)^2-2abcd\bullet(-1); \qquad (d_1\bullet d_2)^2=(a\bullet c)^2+(d\bullet b)^2+2abcd;$$

$$(d_1\bullet d_2)^2=(a\bullet c+b\bullet d)^2; \qquad d_1\bullet d_2=a\bullet c+b\bullet d.$$

Meseleler

1. *ABCD* içinden çyzylan dörtburçluk. $\frac{AC}{BD}=\frac{AB\cdot AD+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}$ deňligi subut etmeli.

2. *ABCD* kwadratyň daşyndan çyzylan töweregiň *CD* dugasynyň üstünde P nokat alnypdyr. $PA+PC=\sqrt{2}PB$ deňligi subut etmeli.

3. *ABCD* parallelogram berilipdir. *A* nokadyň üstünden geçýän töwerek *AB*, *AC* we *AD* kesimleri degişlilikde *P, Q* we *R* nokatlarda kesýär. $AP\bullet AB+AR\bullet AD=AQ\bullet AC$ deňligi subut etmeli.

4. *ABC* içinden çyzylan üçburçlugyň *A* burçunyň bissektrisasy töweregi *D* nokatda kesýär.$AB+AC\leq 2\,AD$ deňsizligi subut etmeli.

5. Eger deňýanly trapesiýanyň gapdal tarapy *a*, esaslary *b* we *c*, diagonaly *d* deň bolsa, $d^2=a^2+bc$ deňligi subut etmeli.

6. Eger *P* nokat, deňtaraply *ABC* üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň *AB* dugasyna degişli bolsa, onda $PA+PB=PC$ deňligiň dogrudygyny subut etmeli.

7. Eger *P* nokat, deňýanly *ABC* üçburçlugyň ($AC=BC$) daşyndan çyzylan töweregiň *AB* dugasyna degişli bolsa, onda $\frac{PA+PB}{PC}=\frac{AB}{AC}$ deňligiň dogrudygyny subut etmeli.

8. Eger *P* nokat, *ABCD* kwadratyň daşyndan çyzylan töweregiň *AB* dugasyna degişli bolsa, onda $\frac{PA+PC}{PB+PD}=\frac{PD}{PC}$ deňligiň dogrudygyny subut etmeli.

9. Eger *P* nokat, *ABCDE* dogry bäşburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň *AB* dugasyna degişli bolsa, onda $PA+PB+PD=PC+PE$ deňligiň dogrudygyny subut etmeli.

10. Eger *P* nokat, *ABCDEF* dogry altyburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň *AB* dugasyna degişli bolsa, onda *PD +PE =PA+PB+PC+PF* deňligiň dogrudygyny subut etmeli.

Edebiýat.

1. Аргунов Б.И.,Балк М.Б. Элементарная геометрия. Москва:1966.
2. Адамар Ж.. Элементарная геометрия. Часть 1. Планиметрия. Москва:1948.
3. Коксетер Г.С., Грейтцер С.М. Новые встречи с геометрией. Москва: 1978.
4. Клопский В.М.,Скопец З.А., Ягодовский М.И. Геометрия 9-10. Москва:1983.
5. Погорелов А.В. Геометрия. Москва:1984.
6. Погорелов А.В. Геометрия 6-10. Москва:1986.
7. Ефремов Д. Новая геометрия треугольника. Одесса:1902.
8. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. Москва:1940.
9. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч.1. Москва:1991.
10. Гурбанов Н.Г., Овездурдыев Х.О. Учбурчлукларын элементлери ве оларын хэсиетлери. Чэржев, 1999.
11. Карп А.П. Даю уроки математики… Москва: Просвещение, 1992.

MAZMUNY