TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI
**TÜRKMEN POLITEHNIKI INSTITUTY**

**G. T. Taýjanow**

# Maglumat hadysalaryň we dolandyryşyň matematiki modelleri

**Hünär:** Maglumatlary işläp taýýarlamagyň we dolandyrmagyň awtomatlaşdyrylan ulgamlary

Aşgabat 2010 ý.

# GIRIŞ

Kompýuter tehnologiýasy – iň ýaş ugurlaryň biridir. Kompýuter tehnologiýasynyň ösüş taryhy beýlekilere garaňda kän bir uly döwri alýan däldir – 40-50 ýyl. Kompýuter tehnologiýasy, tehnikasy diýen adalgalar bolsa ondan hem ýaşdyr. Bilişimiz ýaly, ilkibaşda elektron-hasaplaýyş maşyn, hasaplaýyş tehnikasy diýen adalgalar ulanylardy. 20 ýyldan bäri bolsa EHM diýlen adalga ýuwaş-ýuwaşdan ýitip kompýuter adalga öz örnuny berdi, tehnika bolsa öňküler ýaly hasaplaýyş dälde kompýuter tehnikasy diýlip atlandyrylýar.

Kompýuter tehnologiýasy ýaş bolmak bilen, dünýäde öňdebaryjy ugurlaryň biri bolup durýar. Häzirki wagtda habarlar-aragatnaşyk tehnologiýalaryň ýokary depginde ösýändigi barada aýdylýar. Öýjükli telefon aragatnaşygyň, maglumat tehnologiýalaryň ösmegi muňa subut bolup durýar. Şol tehnologiýalaryň düzümine çuňlaýyn seredilen mahalynda olaryň kompýuter ugruna esaslanýandygyna göz ýetirmek bolýar.

Öz gezeginde, kompýuterler öz düzüminde tehnikanyň başga ugurlarynyň soňky derejelerini jemländir. Bu bolsa onuň bilen işlemegi diňe ýeňilletmän, eýsem amatly edip goýýar.

Türkmenistan dünýä ösüşiniň gapdalynda durman, kompýuter tehnologiýalaryň soňky gazananlaryny ulanmaklyga ymtylýar. Ýurdumyzda öňdebaryjy tehnologiýalary öwrenmeklik boýunça uly işler alnyp barylýar. Şol işlerde Hormatly Prezidentimiziň ýardam bermegi olaryň tiz depginde amala aşmagyny üpjün edýär. Ýurdumyzyň Baştutany öz gymmatly wagtyny tygşytlaman dünýäniň ösüşindäki ymtylyşlara üns berýär we olaryň has netijelilerini döwletimizde gerekli ugurlarda ornaşdyrylmagyna ýardam berýär.

Täze galkynyşlar zamanasynda ýurdumyzda islendik pudagyň öňünde täze meseleler goýuldy. Şol meseleleri üstünlikli çözmek üçin diňe bir tehnologiýalar ýeterlikli däl. Şol tehnologiýalary ulanyp biljek ýokary derejeli hünärmenler zerur.

Kompýuter tehnologiýalary öz düzümine birnäçe ugurlary we dersleri alýar. Olara umuman aýdanyňda maksatnama düzme, multimediýa tilsimatlary, grafika we bezeg işleri, tory dolandyrma, amallar ulgamy we maksatnama üpjünçiligi, kompýuteriň içki gurluşy we ş.m. degişli etmek bolýar.

Kompýuterler bir wagtyň içinde birnäçe amallary ýerine ýetirýärler. Mysal üçin şol bir wagtyň içinde ol çylşyrymly hasap işleri, çap etmegi, ses çykarmagy, faýllar bilen işlemekligi we ş.m. amala aşyryp bilýär.

Häzirki wagtda kompýuterler önümçiligiň islendik pudagynda giňden ýaýrandyr. Şonuň üçin hem hasaplaýyş tehnikasy bilen tanyşlyk talyplaryň haýsy hünär boýunça bilim alýanlygyna garamazdan öwrenilýär.

Ýokarda aýdyşymyz ýaly Täze Galkynyş zamanasy täze talaplary bildirýär. Her bir hünäriň öz aýratynlygy bar hem bolsa, onuň kompýuter tehnikasy bilen iş salyşýan meseleleri hökman bardyr.

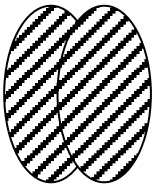
### Köplukler teoriýasy. Köplükleriň üstünde geçirilýän amallar.

Köplükler biz uly A, B ... harplary bilen olaryň elementlerini kiçi a, b, ... belgiläris. aЭA (Aэa) - şu ýazgy a element A köplüge degişlidir diýen tassyklama simwoliki aЭA (Aэa) görnüşinde ýazylýar.

Eger-de A köplügi emele getirýän elementleriň ählisi B köplüge-de girýän bolsa onda A köplüge B köplügiň bölek köplügi diýilýär we . boş köplügi φ belgileyaris.

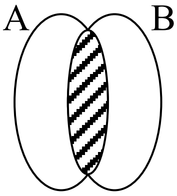
Goý A we B köplükler erkin köplükler erkin köplükler bolsun. Olaryn jemi ýa-da birleşmesi diýip A we B köplükleriň elementleriň bolmanda birine degişli bolan elementleriň jeminden düzülen köplüge aýdylýar.

$C=A\cup B$ A B



A we B köplüklerin kesismesi diyip hem B koliige degisli elementlerin ahlisinden diiziilen kopliige aydarys $A\cap B$ .

$C= A\cap B$ A B



köplükler goşmak we kesişmesini almak amallary öz kesgitlemeleri boýunça kommutatiwdirler we assiasiwdirler, ýagny,

$$A\cup B = B\cup A; \quad (A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$$
$$A\cap B = B\cap A; \quad (A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$$

Mundan başgada olar öz aralarynda distributiwlik gatnaşyklary bilen baglanyşyklydyrlar.

$$(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C) \ (1)$$
$$(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C) \ (2)$$

Hakykatdanam (1) deňligi barlap göreliň.

Goý X element bir deňligiň çep tarapyna degişli bolsun.

$$X \in (A\cup B)\cap C \quad X\in C \quad X\in A\cup B$$

Bu bolsa X elementiň C köplüge we mundan başgada A ýa-da B köplüklerin iň bolmanda birine degişlidigini aňladýar.

Onda X element $A\cap C$ we $B\cap C$ köplükleriň iň bolmanda birine degişlidir.

Ýagny (1) deňligiň sag tarapynda degişlidir.

Tersine goý:

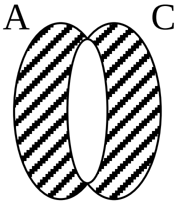
$$X \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \text{ onda}$$
$$X \in A \cap C \quad \text{ýa-da } X \in B \cap C$$

onda X€C we X element A ýa-da B köplüge degişlidir ýagny, X €AUB, şeylelikde X €(AUB)∩C.(1) denlik subut edildi. Edil şol ýaly (2) deňlik barlanýar.

A we B köplügiň tapawudy diýilip (A B A/B) A köplükdäki B köplüge degişli elementleriň toplumyna aýdylýar.

A we B iki köplügin simmetriki tapawudy A/B we B/A tapawutlaryn jemi ýaly kesgitlenýär. A∆B= (A/B)U(B/A)

A C



Goý S esasy köplük, A köplük bolsa S köplügiň bölek köplügi bolsun S/A tapawut A köplügiň doldurgyjy diýip atlandyrylýar.

1 .Jemiň dolduryjysy doldurgyçlaryň kesismesine deň.

$$S/\bigcup_{\alpha} A_2 = \bigcap_{\alpha} (S/A_\alpha) \quad (3)$$

2.Kesişmaniň doldurgyjy doldurgyçlaryň jemine deň.

$$S/\bigcap_{\alpha} A_2 = \bigcup_{\alpha} (S/A_\alpha) \quad (4)$$

Goý X€S/$U_a A_a$ bu bolsa X elementiň X $U_a A_a$ görkezýär, ýagny $A_a$

köplükleriniň hir biriniň degişli däldigini aňladýar. Şeýlelikde X element her bir S/A $_a$ doldurgyja degişlidir we şonuň üçinem köplükleriniň hir biriniň degişli däldigini aňladýar. Şeýlelikde X element her bir S/A doldurgyja degişlidir we şonuň üçinem $X \in \bigcap_{\alpha}(S/A_\alpha)$ Goý $X \in \bigcap_{\alpha}(S/A_\alpha)$

elementiň S/A $_a$ doldurgyjyna degişlidigini alýarys. onda X element A $_a$ köplükleriniň hiç birine girmeýär, ýagny X element $U_a$A $_u$ degisli däldir.

Şeýlelikde

$$X \in S/\bigcup_{\alpha} A_\alpha$$

**Tükenikli we tükeniksiz köplükler.**

Hasaply we hasapsyz köplükler. Tükeniksiz köplükleriň içinde iň ýönekeý natural sanlaryň köplügidir.

Elementlerini natural sanlaryň ähli̇si bilen özara bir bahaly degişlilikde goýup bolýan islendik köplüge hasaply köplük diyilýär. Başgaça aýdylanda hasaply köplük bu elementlerini tükeniksiz $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ yzygidelilikde nomerläp (belgiläp) bolýan köplükdir.

**Mysallar.**

Ähli bitin sanlaryň köplügi 0-1 + 1-22… n<0 bolanda [2n]↔n

Eger-de n±O bolsa 20+l↔n

2) Ähli jübüt sanlaryň köplügi n↔2n

3)2,4,8,16.n↔2n

4) Ähli rasional sanlaryň köplügi hasaply p/q

Her bir rasional san a = p/q, q>0 gysgadylmaýan drop görnüşinde bir bahaly ýazylýar [p]+q jemi α rasional sanyň beýikligi diýip atlandyralyň

1 Beýiklige diňe 0/1 eýedir

2 Beýiklige 1/1,-1/-1

3 Beyiklige 2/1, 1/2, -2/1, -1/2 we ş.m eýedirler.

Ähli rasional sanlary beýiklikleriň artýan tertibi boyunça nomerleýäris.Ýagny bir beýiklige eýe bolan sanlary, soňra iki beýiklige bolan sanlary we ş.m. Şunlukda islendik rasional san kabir nomere eýe bolýar.

Ýagny ähli natural sanlar we rasional sanlaryn arasynda olara bir bahany degişlilik ýola goýular.

Hasaply bolmadyk tükeniksiz kölplüge hasapsyz köplük diyilýär.

Hasaply kopluklerin kabir hasiyetleri.

1) Hasaply köplügüň islendik bölek köplügi tükenikli ýa-da hasaplydyr. Goý A hasaply köplük B bolsa onuň bölek köplügi bolsun.

A: $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$

Goý $a_{n1}, a_{n2}, \cdots$ şol elementleriň içindaki B köplüge degişli elementler bolsun.

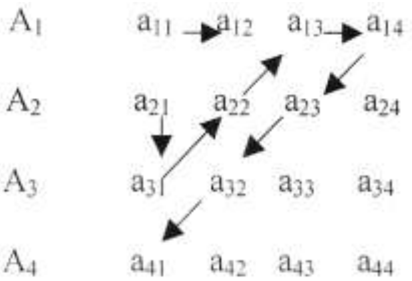
Eger $n_1, n_2$,.. sanlaryn arasynda iň ulysy bar bolsa onda B köplük tükeniksiz köplük, bolmasa hasaply köplük.

2)Hasaply köplükleriň islendik tükenikli, ýa-da hasaply köplüginiň jemi, ýene-de hasaply köplükdir·

Goý $A_1, A_2, \dots$ tükeniksiz köplükl bolsun.

$A_1, A_2, \cdots$ köplükleriň ähli elementleri indiki tiikeniksiz tablisa görnüşinde yazmak miimkin.

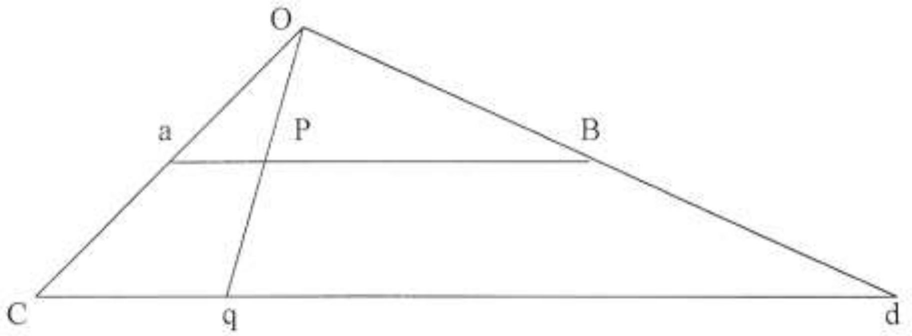
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ |
| $A_3$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ |
| $A_4$ | $a_{41}$ | $a_{42}$ | $a_{43}$ | $a_{44}$ |




3)Islendik tükeniksiz köplük hasaply köplügi öz içinde saklaýar.

Köplükleriň ekwiwalentlikligi. Kesgitleme : Eger-de M we N ilki köplügiň elementleriň arasynda özara bir bahaly degişliligi goýup bolýan bolsa, onda M we N köplüklere ekwiwalent (M we N) köplüler diýilýär. Natural sanlaryň köplügine ekwiwalent bolan köplüge hasaply köplük diýilýär.

Mysal: islendik iki [a,b] we [c,d] kesimdäki nokatlara köplügi ekwiwalentdir.




Hakyky sanlaryň köplügiň hasapsyzlygy.

0 bilen 1 arasynda ýerleşýän hakyky sanlaryň köplügi hasapsyzdyr.

## Matematiki logika.

**Logiki amallar.**

Pikir aýtma diýip çyňdygyňy ýa-da ýalandygyňy (ýöne ikisiňem bir wagtda däl) aýdyp bolýan sözleme düsimdirýar.

Mysallar:

1. Asgabat - Türkmenistanyň paýtagty.
2. Iki üçden uly.
3. Men ýalançy.

Ilkiňji iki sözlem pikir aýtma bolup hyzmat edýär olaryň 1-nji çyn, 2-nji ýalan, 3-nji sözlem pikir aýtma bolup bilmeýar.

Göý bu sözlem çyn bolsun onda onuň manysyňda ol ýalan bolmaly bolýar ýaly bu sözlemiň ýalandygyňy onuň çynlygy gelip çykýar.

A,B,Ç... uly harplary bilen (latiň) olaryň manylaryňy çynlygyny we ýalandygyny 1we 0 sifirler bilen belgiläris. Goý A we B iki sany erkin pikir aýtma berlen bolsun.

1)AΛB anlatma aňlatma diňe A we B ikisem çyn bolanda çyn bolýan aňlatmany aňladýar şeyle pikir aýtma A we B pikir aýtmalaryň konyuksiýasy diyilýär. şu A simwol konýuksiýa diýilýän amaly anladýar. Adaty gepleşikli bu amaly pikir aýtmalaryny "we" baglaýjysy laýyk gelýär.

2) AVB Anlatma haçanda A ýa-da pikir aýtmalaryň iň bolmanda biri çyn bolanda, çyn bolýan pikiri aýtmalary aňladýar. Şeyle pikir aýtma A we B pikir aýtmalaryň dezýunksiýa diýilýär. V dezýunksiýa diyen aýtmalaryň 0 "ýa-da" baglaýjysy laýyk gelýär.

3) A→B anlatma haçanda A çyn bolup B ýalan bolanda, şonda we diňe şonda ýalan bolýan pikiri aýtmany aňladýar. Şeyle pikir aýtma A we B pikir aýtmalaryň implekasiýasy diýilýär.

→ simwoly implekasiýa diýilýän amaly aňladýar Adaty geplesikde bu amaly pikir aýtmalaryň " eger" ,"onda" baglaýjysy laýyk gelýär.

4) A~B anlatma haçanda A we B pikir aýtmalaryň ikiside ýalan bolanda şonda we diňe şonda çyn bolýan pikir aýtmany aňladýar. Şeyle aýtma A we B piker aýtmlaryň ekwiwalentligi diyilýär.

~ ekwiwalentlik amaly aňladýar. Adaty gepleşikde bu amala pikir aýtmalary "şonda we diňe şonda"  "haçanda" baglaýjysy laýyk gelýär.

5) A' aňlatma A ýalan bolanda çyn bolan we A çyn bolanda ýalan bolan piker aýtmany aňladýar. Şeyle pikir aýtma A pikir aýtmanyň iňkar etmesi diyilýär.

Harpyň üstündäki çyzyk iňkär etme diýen amaly aňladýar. Adaty gepleşikde bu amala "däl" bölegiň kömegi bilen täze pikir aýtmanyň emele getirilmesi laýyk gelýär.

Eger A,B,C ... erkin pikir aytmalara 1 we 0 bahalaryň birini kabul edýän ululyklar hökümünde garalsa, onda olara konýunksiýa dezýunksiýa implikasiýa, ekwiwalentlik we inkär etme amallaryny ulanyp täze cylşyrymly pikir aytmany almak mümkin.

$$((AVB)\Lambda C) \rightarrow \overline{A} \rightarrow \overline{B}$$

aňlatma dezýunksiýa, konýunksiýa inkär etme impleksasiýa amallaryny ulanmak bilen A,B,C pikir aýtmalardan düzülen çylsyrymly pikir aytma bolup durýar. Eger A ýalan pikir aýtma bolup, B çyn we C ýalan diýsek onda logiki amallaryň kesgitlemelri boyunça bu pikir aýtma.

| X | Y | XΛY | XVY | X→Y | X~Y | X |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

1). X`` deňderejeli X

2).$X\Lambda Y = Y\Lambda X$

3).$(X\Lambda Y)\Lambda Z = X\Lambda(Y\Lambda X)$

4).$XVY = YVX$

5).$(XVY)VZ = XV(YVX)$

6).$X\Lambda(YVZ) = (X\Lambda Y)V(X\Lambda Z)$

7).$XV(Y\Lambda Z) = (XVY)\Lambda(XVY)$

8).$\overline{XVY} = \overline{X}\Lambda\overline{Y}$

9).$\overline{X\Lambda Y} = \overline{XVY}$

10).$XVY = X$

11).$X\Lambda X = X$

## Bul funksiýalary.

Her biri 0 we 1,2 bahany alyp bilýän üytgeýän ululyklara bagly bolan kem 0 we 1,2 bahany kabul edýän f ($X_1$ $X_2$ $X_{n-1}$, $X_n$) Bulun funksiýasy girýär.

Kesgitlemeden görnuşi ýaly Bul we funksiýanyň kesgitlemesi oblasty bolup 0 we 1 düzülen "n" belgili ýygymlary mümkin bolan toplumyna jemi hyzmat edýär. Bu funksiýanyň özüni bermek üçin bolsa funksiýa sol ýygymlaryň her birine degişli kabul eden bahalaryny görkezmek ýeterliklidir.

| $X_1$ | $X_2$ | $X_3$……$X_{n-1}$ | $X_n$ | $f(X_1, X_2,\dots, X_{n-1}, X_n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 ……0 | 0 | $f(0, 0,\dots, 0, 0)$ |
| 0 | 0 | 0 ……0 | 1 | $f(0, 0,\dots, 0, 1)$ |
| …… | …… | …… | …… | …… |
| 1 | 1 | 1 ……1 | 0 | $f(1, 1,\dots, 1, 0)$ |
| 1 | 1 | 1 ……1 | 1 | $f(1, 1,\dots, 1, 1)$ |

Tablisada ýygymlar standart (tebigi) tertipde ýerlesdirilen.

$\alpha = (\alpha_{1,} \alpha_{2,\ldots} \alpha_{n)}$ $\alpha_i \in (0:1)$

Her bir $\alpha$ ýygyma $N = \alpha_1 2^{n-1} +,,, \alpha_{n-1} 2 + \alpha_n$ $(0,0,\ldots,0,0); (0,0,\ldots 0,1);\ldots,(1,1,\ldots 1,1)$

ýygymlara $0,1,\ldots,2^n-1$ sanlar degişli bolýarlar.

Ýygymlaryň özüne degişli sanlaryň artýan tertibinde ýerleşmegi tebigi tertib bolýar. 0 we 1 düzülen "n" ölçegli ýygymlaryň sanynyň jemleri $2_n$-l bolýandygyny görmek bolýandyr.

Eger "n" $Y_1$, $Y_2$,...,$X_n$ üýtgeýänleri funksirlesek, onda bu ütgeýän ululyklaryň dürli funksiýalary dürli tablisalaryň üsti bilen berilýän, ol tablisalaryň sany bolsa $X_1$, $X_2$,..., $X_n$ üýtgeýän ululykly funksiýalaryň hemme sanyna deň dürli tablisalaryň şa sütuniniň bahalary bilen tapawutlanyandyklary üçin.

Indiki tassyklama dogrydyr. $X_1$, $X_2,\ldots,$ $X_n$ üýtgeýän ululykly bu funksiýalaryň sany.

Üýtgeýänleriň sanynyň artamagy bilen bu funksiýalaryň sany çalt artýar we bu funksiýalary berýän tablisalar çylsyrymlaşýarlar.

Bu funksýanyň berilşiniň başga usulyna seredeliň. "Elementar" funksiýalar diýilýän bir we iki üýtgeýän funksiýalar bilen tanyşalyň.

| X | $Y_1$ (X) | $Y_2$ (X) | $Y_3$ (X) | $Y_4$ (X) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

$Y_1$ (X) we $Y_4$ (X) funksiýalar 0 we 1 hemişelikleri berýärler.

$Y_2$ (X) funksiýa X üýtgeýän ululyk bilen gabat gelýär.

$Y_3$ (X) X üýtgeýän ululygyň kabul edýän bahasyna garşylykly bahany kabul edýär. Bu funksiýa X iňkär etmesine diýilýär.

| X | X | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ | $f_{10}$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ | $f_{13}$ | $f_{14}$ | $f_{15}$ | $f_{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

$f_1$ we $f_{16}$ funksiýalar 0 we 1 hemişelikleri berýärler bu funksiýalar hiç bir üýtgeýän ululyklara bagly däldirler. f1, $f_6$, $f_n$, $f_{13}$ funksiýalar diňe bir üýtgeýän ululyga baglydyr.

Olaryň $f_4 = X_1$, $f_6=X_2$, $f_{l1}=X`_2$, $f_{l3}=X`_1$ bolýandygyny kyn däldir. Galan funksiýalar iki ütgeýän ululyga baglydyr $f_2$ konýunsiýada ýa-da logiki köpeltmek diýilýär we $X_1 \Lambda X_2$ bellenilýär. $\Lambda$ belgiň ýerine "." belgi goýulýar ýa-da hiç hili belgi goýulmaýar $F_8$ dezýunsiýa ýa-da logiki goşmak diýilýär.

$F_8$ –$X_1 v X_2$

$f_{10}$ funsiýa ekiwalentlik diýilýär $X_1 \sim X_2$

$f_7$ iki modul boýunça jem $X_1[\wedge]X_2$, $X_1+X_2$ (mod 2)

$fi_2$, $f_{14}$ impliasiýa

$X_2 \rightarrow X_1$ we $X_1 \rightarrow X_2 X_2$

$f_{15}$ şifferin strihi $X_1/X_2$

$F_9$ Pirsiň strelkasy $X_1/X_2$

$F_3$, $F_5$ gadagan funksiýalar diýilýär.

## Elementar funksiýalaryň häsiýeti.

1. Konýunksiýa dezýunksiýa we 2 modul boýunça jem assosiatiwlik hasiýetine eýedirler. Bu hasiýet bolsa skobkalry ulanmazlyga we

$$\bigwedge_{i=1}^{n} X_i = X_1 X_2 \ldots X_n, \quad \bigvee_{i=1}^{n} X_i = X_1 V X_2 \ldots V X_n$$

belgileri ulanmaga mümkinçilik berýar.

$$2. \overline{X}_1 \bullet \overline{X}_2 = \overline{X}_1 V \overline{X}_2, \overline{X}_1 V X_2 = \overline{X}_1 \bullet \overline{X}_2,$$

hem-de

$$\overline{\overline{X}} = X$$

$$3. X \bullet X = X$$
$$4. XVX = X$$
$$5. X \bullet \overline{X} = 0$$
$$6. XV\overline{X} = 1$$
$$7. X \bullet 0 = 0$$
$$8. X \bullet 1 = X$$
$$9. XV0 = X$$
$$10. XV1 = 1$$

Teorema l:

Erkin f $(X_1, X_2, ... X_n)$bu funksiýany

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \bigvee_{\delta(00,\ldots,0)}^{\delta(1,1,\ldots,1)} \frac{f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)}{X_1^{\delta 1} X_2^{\delta 2} X_3^{\delta 3} \ldots X_n^{\delta n}} \quad (1)$$

Formada bermek mtimkin. Bu ýerde $\delta_T$ Є{e;1}

$$\overset{0}{X_i} = X_i, \ \overset{1}{X_i} = X_i, \ \upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n)$$

hem-de dizýunksiýa 0 we 1 düzülen n ölçegli ýygymlaryň hemmesinden alynýar.

(1) deňligiň çep we sag taraplarynyň deň bolýandygyny görkezelin erkin a=($a_1$ $a_2$,…,$a_n$) ýygymy (1) deňlikde goýalyň.

Bu ýerde a Є{0;1 }çep tarapyndan alarys, sag tarapyndan bolsa f(a1, $a_2$...$a_n$)

δ(1+1…n)

**V**

$\delta_0$(1+1…n)

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)\, \alpha_1{}^{\delta}{}_1, \alpha_i{}^{\delta}{}_1, \ldots \alpha_n{}^{\delta}{}_n = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_i, \ldots, \alpha n)\, \alpha_1{}^{\alpha}{}_1, \alpha_2{}^{\alpha}{}_2, \ldots \alpha_n{}^{\alpha}{}_n =$$
$$= f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n)$$

bolýandygy konýunksiýa edezýunksiýanyň häsiýetinden hem-de $X^{\delta}$=1 deňligiň X=δ we diňe şonda ýerine ýetýandiginden gelip çykýar.

Eger f($X_1X_2$,...,$X_n$) bolanda, onda (l) deňligi f($X_1X_2$,...,$X_n$)

$$\bigvee X_1^{\delta_1}, X_i^{\delta_1}, \ldots, X_n^{\delta_n}$$

f(δ)=1

ähli δ-den

(2) formada ýazmak bolýar. Bu formada $f(X_1X_2,...,X_n)$ funksiýanyň kýunktiw kadaly formasy diýilýar.

Teorema 2.

Erkin $f(X_1, X_2,... ,X_n)$ üçin

$$(3)\ f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = \bigwedge_{\delta=(0,0,\ldots,0)}^{\delta(1,1 1\ldots,1)} f(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n) \vee X_1^{\delta_1} \vee \ldots \vee X_n^{\delta_n}$$

formada bermek mümkin. Bu funksiýanyň $f(X_1, X_2,... ,X_n)= f(X_1, X_2,... ,X_n)$ teotema netijesinde $f(X_1, X_2,... ,X_n)$ funksiýanyň

$$f(X_1,X_2,\ldots,X_n) \bigvee_{\delta=(0,0,\ldots 0)}^{\delta=(1+1,\ldots 1n)} f(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$$

$$X_1^{\delta_n}, X_2^{\delta_2}, \ldots X_n^{\delta_n}$$

Güçde ýazyp bilýaris

$$\bigvee_{\delta_0=(0,0,\ldots 0)}^{\delta=(1+1,\ldots 1n)} f(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n) \vee X_1^{\delta_1} \vee X_2^{\delta_2} \vee \ldots \vee X_n^{\delta_n}$$

soňky deňlik konýunksiýanyň we dizýunksiýanyn inkär etmeginin hasiyetunden gelip çykýar $X_{i\,i}^{\delta} = X_{i\,i}^{\delta}$ göz öňünde tutup, alalyň.

$$f(X_1,X_2,\ldots,X_n) \bigvee_{\delta=(0,0,\ldots 0)}^{\delta=(1+1,\ldots 1n)} f(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n) \vee X_1^{\delta_1} \vee \ldots \vee X_n^{\delta_n}$$

$$\hat{f}(X_1,X_2,\ldots,X_n)=1$$

$$f(X_1,X_2,\ldots,X_n)= \bigwedge_{f(\delta)=0} X_1^{\delta_1} \vee \ldots \vee X_n^{\delta_n}\ (4)$$

formada ýazmak bolýar. Bu forma $f(X_1, X_2,... ,X_n)$ funksiýanyň kämil konýuktiw kadaly formasy diýilýär.

**Bul funksiýalary ulgamynyň dolylygynyň alamatlary.**

Eger $\{f_1(X_{11},...,X_{1p1}),...,ls(X_{s1},...,Xs),...,\}$ ulgamnyň islendik funksiýasy üçin şol ulgamnyň $f_1,\ldots,f_S$ ,... funksiýalarynyň we $X_1,\ldots,X_n$ üýtgeýänleriň superpozisiýasyndan düzülen we oňa deň bolan funksiýany gurup bolýan bolsa, onda ol ulgam doly ulgam diyilýňr. (Biz bul funksiýalarynyn beyleki bir bul funksiýalarynyň goyulmayna). Bul funksiýalarynyň superpozisiýasy diýilýär. $X_1X_2$, $X_1VX_2$,X,' Bul funksiýalaryň ulgamsy dolydyr.

Bu ulgamnyn dolulygy her bir funksiýa üçin kämil dezýunktiw kadaly formaly (KDKF) ýa-da kämil konýuktiw kadaly formaly diňe konýunksiýa, dizýunksiýa we iňkär etme amallaryndan düzlen formulany gurup bolýandygyndan gelip çykýar.

Teorema 3:

Islendik $f(X_1, X_2,\dots ,X_n)$ Bul funksiýasy $f(X_1, X_2,\dots ,X_n)$

Islendik $f(X_1, X_2,\dots ,X_n)$ Bul funksiýasy $f(X_1, X_2,\dots ,X_n)$

$a_0 +a_1X_1+a_2X_2+\dots+a_{2^n\text{-}i}\ X_1\dots,X_n$

Polinom görnüsinde berilip biliner. Bu yerde $a_i$ (1/2, 0;1), 1=0,1,2,...,$2^n$-l

Subut:

$X_1$ $X_2$, $X_1+X_2$0,1 funksiýalaryň ulgamsy dolydyr.

Ýagny islendik bul funksiýasy bu funksiýalaryň we üýtgeýänleriň superpozisiýa görnüşinde berilip biliner.

$A+A=0,\ A\cdot A=A,\ A+0=A,\ A\cdot 0=0,$
$A\cdot 1=A,\ A\cdot B=B\cdot A,\ A+B=B+A,$

(A+B) C=A*C+B*C, ýaly barlamasy kyn bolmadyk düzgtinlerden peýdalanyp funksiýalaryň polinom görnusindaki ýazgysyny alarys.

Bul funksiýalar ulgamsynyň dolulygyny ýa-da dolydäldigini bilmek üçin bul funksiýalarynyň bir näçe klaslary bilen tnyşalyň.

1) 0 saklaýan funksiýalar klasy.

Eger f $(X_1,X_2,\dots,Xn)$ funksiýa 0 düzülen ýygymda 0 bahany kabul edýän bolsa (f(0,0,...,0)=0), onda oňa 0 saklaýan funksiýa diyilýär. $X_1*X_2$, $X_1$V $X_2$,X,0 0 saklaýan funksiýalardyr. $X\rightarrow X_2$,X`,1 funksiýalar 0 saklamaýarlar.

2) Birlik saklaýan funksiýalaryň klasy.

Eger $f(X_1,X_2,\dots,X_n)$ funksiýa bir düzülen ýygymda bir bahany kabul edýän bolsa (f(l,l,...,l)=1) onda oňa bir saklaýan funksiýa diyilýär.

$X_1*X_2$, $X_1$V $X_2$, $X_1$ 1 saklaýan funksiýalar $X_1+X_2$, $X_1'$, 0 funksiýalar saklamaýarlar.

3) Özüne garşylykly funksiýalar.

Eger $f(X_1,X_2,\dots,X_n)$f ` $(X'_1,X'_2,\dots,X'_n)$ bolsa, onda $f(X_1,X_2,\dots,X_n)$ funksiýa özüne garşylykly funksiýa diyilýär.

X X'

$X_1*X_2$, $X_1$V $X_2$ özüne garşylykly däl funksiýalar.

4)Monoton funksiýalar klasy.

Eger $\alpha_i\leq\beta_i$, (i=1,...,n) bolsa, onda $\alpha$ $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ ýygym $\beta(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ ýygymyň öň ýanyndan gelýar.

Belgilenilişi ($\alpha\psi\beta$). $\psi$ gatnaşykda ýerleşýän ýygymlara deňeşdirerlikli ýygymlar diyilýar.

Eger $\alpha\psi\beta$ bolýan $\alpha(\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n)$ we $\beta$ $(\beta_1, \beta_2,\dots, \beta_n)$ ýygymlaryň islendik jübuti üçin $f(a)\leq f(\beta)$ ýerine ýetirýän bolsa. onda $f(X_1.X_2,\dots,X_n)$ funksiýa monoton funksiýa diyilýar.

Meselem: $X_1$*X2, $X_1$V $X_2$,X monoton funksiýalar.

X' monoton däl funksiýa.

4) Çyzykly funksiýalar klasy.

Eger f $(X_1,X_2,..,X_n)$ funksiýanyn polinomy f $(X_1,X_2,..,X_n)$ = $a_0+a_lX_l+a_2X_2+\dots+ a_n X_n$ görnüşde bolsa, onda oňa çyzykly funksiýa diyilýär.

X, X' çyzykly funksiýalar. $X_1$-$X_2$ çyzykly däl funsiýalar.

Teorema 4:

{ f $(X_{11},X_{1p1}),...,f_s(X_{s1},...,X_{sps}),...$}Bul funksiýalar ulgamsynyň doly bolmagy üçin onuň 0 saklaýan funksiýasyny, birlik saklamaýan funksiýasyny özüne garşylykly däl funksiýany monotom däl funksiýany çyzykly däl funksiýany saklamagy zerurdyr we ýeterlikdir.

## Predikatlar logikasy.

Predikatlar we kwantirleme amallary.

Mysallara ýüzleneliň:

1."X ýönekeý san" diýen aňlatma gramatika taýdan pikir aýtma formasynda bolsada pikir aýtma daldir. Bu alamada üýtgeýan X ululygy ýerine kesgitli san goýulandan soň pikir aýtma almak mümlin.

Şeylede " X ýönekeý san " aňlatma X üýtgeýän ululykly P(X) funksiýa höküminde seretmek bolar.

F(X) kesgitlenisi oblasty bolup sanlar köplügi. bahalar oblasty bolup pikir aýtmalar hyzmat edýärler.

2."X Y-den ulydyr" diýen aylatma X we Y üýtgeýan ulylyklara bagly Q( X,Y) funksiýa höküminde seretmek bolar. X we Y ýerine kesgitli sanlary goýulandan bu funksiýa pikir aýtma öwülýär.

Umuman $M_1$, $M_2,\dots,M_n$köplüklerden $X_1X_2,...,X_n$ üýtgeýän ululyklaryň degislilikdali bahasyny goýulanda pikir aýtma örülýän $P(X_1,X_2....,X_n)$ aňlatma n üýtgeýän ululykly pridikat diyilýär.

$M_1$, $M_2,...,M_n$ köplükleriň elementlerinde predmetlr $X_1X_2,..\ .,X_n$ üýtgeýän ululyklara bolsa üýtgeýän predmetler diyilýär.

M = M,X $M_2$X - $XM_n$ köpluge $P(X_1X_2,...,X_n)$ predikatyn meydany diyilýär.

Eger üýtgeýän predmetlerin sany "0" deň bolsa, onda predikat pikir aýtma diyilýär. Predikatlara pikir aýtmalar algebrasyndan amallaryny (konýunksiýa, dezýunksiýa, implikasiýa, ekwiwalentlik iňkär etme) ulanyp täze pridikaty alamak bolýar.

Goý M meydana kesgitlenen bir üýtgeýan ululyga bagly bolan P(X) predikat berilen bolsun.

1. VXP(X) aýlatma P(X) predikatyň M meýdanyndaky ähli predmetler üçin kyn bolan diňe şoňda kyn bolýar pikir aýtmany anladýar.

VXP(X) anlatma islendik X üçin P(X) okalýar.

V- simwol umumylyk kwantaly.

1. E XP(X) aylatma P(X) predikatyn M meydanyndaky predikatlaryň iň bolmanda biri üçin kyn bolanda kyn bolýan pikir aýtmany aňladýar.

E XP(X) anlatma "P(X) " bolar ýaly X bar diyilip okalýar.

E barlyk (bolmaklyk) kwantory. Predikatlara kwantirleme amallarynyň ulanylyş mysallara seredeliň.

Goý natural sanlaryň meydanynda predikatlar berilen bolsa.

1). $X^2 = X*X$ onda VX (X2 = X*X) kyn pikir aýtma.

2). X+2 = 7, onda VX(X+2=7) ýalan pikir aýtma, EX(X+2=7) kyn pikir aýtma.

3). X « X+2 V X(X « X+2) ýalan pikir aýtma.

Predikartyn n üýtgeýan ululyga bagly bolan ýagdaýy üçin kwantirleme amallaryny umumylaşdyrmak kyn däldir.

**Turbo Paskal programmirleme dilinde köplükleriň we logiki amallaryň ulanylşy.**

1. Esasy logiki amallar.

| Belgisi | Ady | Operantlaryň tipi | Netijäniň tipi | Görnüşi |
|---|---|---|---|---|
| Birinji (ýokary) dereje | | | | |
| not<br><br>not | Logiki ″Ýok″<br><br>Razrýad boýunça ″Ýok″ | Logiki<br><br>Bitin | Logiki<br><br>Bitin | |
| Ikinji dereje | | | | |
| and<br>and | Logiki ″we″<br>Razrýad boýunça ″we″ | Logiki<br>Bitin | Logiki<br>Bitin | |
| shl<br><br>shr | Siklleýin çepe süýşürmek<br>Siklleýin saga süýşürmek | Bitin<br><br>Bitin | Bitin<br><br>Bitin | |
| Üçünji dereje | | | | |
| or<br><br>or | Logiki ″ýa-da″<br><br>Razrýad boýunça ″ýa-da″ | Logiki<br><br>Bitin | Logiki<br><br>Bitin | |
| xor<br><br>xor | Logiki ″ýa-da″-ny ýatyrýan<br>Razrýad boýunça ″ýa-da″-ny ýatyrýan | Logiki<br><br>Bitin | Logiki<br><br>Bitin | |
| Dördünji (pes) dereje | | | | |
| =<br><><br><<br>><br><=<br>>= | Gatnaşyk amallary | San we san<br>Setir we san<br>Setir we simwol<br>Pointer we Pointer<br>Köplük | Logiki | Binar amallar |
| in | Köplüge girmek | Element we köplük | Logiki | |

2. Bit arifmetikasy.

Hakyky we bitin sanlaryň üstündäki ähli diller üçin standart matematiki amallardan başgada, Turbo Pascal bitin sanlaryň üstünde goşmaça amallary hem girizýär. Şolaryň hatarynda bit ýa-da razrýadlar boýunça arifmetika hem bardyr.

Bit arifmetikasy sanamagyň ikilik ulgamyndaky sanlar bilen iş salyşylanda ulanylýar. Bu ýagdaýda iki sanyň aýratyn bitlerini deňeşdirmek, sanyň ikilik bitlerini bellemek, olary çalyşmak we başga işleri etmek bolýar. Bu mümkinçilikler tekst we grafiki režimlerde videohuş bilen işlenende ulanylýar. Ondan başgada ikilik aňlatmada çözülmesi aňsat bolan arassa matematiki meseleer bardyr.

Bit amallaryna bir çäklendirme bardyr: olary diňe bitin  tiplere ulanyp bolýar(Byte, ShortInt, Word, Integer, Longint). Diňe bitin tipli bahalar kompýuteriň huşunda dogry ikilik sanlar bilen kodirlenýärler. Mysal üçin, Byte tipli 4 we 250 bahalar kompýuteriň huşunda degişlilikde sekizbelgili ikilik 00000100 we 11111010 sanlar bilen , Word tipli 65535 san bolsa 16 belgili 1111111111111111 san bilen aňladylar.

Byte we Word tipli bahalar üçin umumy formulalar aşakdaky ýalydyr:

Byte: Baha=$B7*2^7+B6*2^6+B5*2^5+\ldots+B1*2^1+B0$;

Word : Baha=$B15*2^{15}+B14*2^{14}+\ldots+B1*2^1+B0$;

Bu ýerde B0,B1, … bahalar sanyň degişli ikilik bitleriň bahalary. Olar 0 ýa-da 1 deňdirler. San köpeldijileri bolsa, 2-niň bitiň nomeri derejesine deňdir.

Alamaty bar bolan bitin: ShortInt, Integer we Longint tipleriň kompýuteriň huşundaky içki aňladylyşynda tapawut bardyr. Öz ölçegi boýunça ShortInt tip Byte tipe, Integer tip bolsa Word tipe deňdir. Ýöne ShortInt we Integer tipler bitin otrisatel sanlary hem saklaýandyr:

| | | |
|---|---|---|
| ShortInt : | -128 …127 | (8 bit ýa-da 1 baýt), |
| Integer : | -32768 …32767 | (16 bit ýa-da 2 baýt), |
| LongInt : | -2147483648 …2147483647 | (32 bit ýa-da 4 baýt). |

Bu tipli sanlaryň iň çep biti ol sanyň alamatyny görkezmek üçin ulanylýar. Eger ShortInt, Integer we Longint tipli sanlaryň iň çep biti 1 deň bolsa, onda ol san otrisatel hasaplanýar, a eger 0 deň bolsa, onda položitel hasaplanýar. ShortInt, Integer we Longint tipli bahalaryň bitlerini öwürmek formulasy aşakdaky ýalydyr:

ShortInt : Baha= $-B7*2^7+B6*2^6+B5*2^5+\ldots+B1*2^1+B0$;

Integer : Baha= $-B15*2^{15}+B14*2^{14}+\ldots+B7*2^7+\ldots+B1*2^1+B0$;

LongInt : Baha= $-B31*2^{31}+B30*2^{30}+\ldots+B15*2^{15}+\ldots+B1*2^1+B0$.

ShortInt tipli otrisatel sanlaryň kodirlenişine mysallara seredeliň:

| | | |
|---|---|---|
| -1 : | 1 1111111 | (-1*128+127) |
| -2 : | 1 1111110 | (-1*128+126) |
| -3 : | 1 1111101 | (-1*128+125) |
| -125 : | 1 0000011 | (-1*128+3) |
| -128 : | 1 0000000 | (-1*128+0). |

Položitel sanlar kodirlenende ýazgysynda 1-ler näçe köp bolsa, şol san hem absolýut ululygy boýunça şonça uly bolýar. Otrisatel sanlar kodirlenende bolsa tersine 0-lar bilen 1-ler ýerine çalşan ýaly bolýar. Başgaça aýdanda otrisatel sanlaryň ýazgysynda 0-lar näçe köp bolsa, ol sanyň absolýut ululygy hem şonça uly bolýar.

Hakyky tipli sanlar kodirlenende her gezek bir hili, ýöne ýeterlik çylşyrymly kodirlenýär: bitleriň bir topary sanyň mantissasyny düzýär, a ikinjisi – derejesini,, a üçinjisi bolsa alamatyny düzýär. Hakyky sanlara bit amallary ulanylmaýar.

Indi bitleriň üstünde geçirilýän logiki amallara seredeliň.

**Not** – razrýad boýunça inkär etme – her bir biti tersine öwürýär:

not [1] = 0

not [0] = 1.

Argumentiň daşyndaky dik ýaýlar amalyň bir bitiň üstünde geçirilýändigini aňladýar. Mysal seredeliň: Eger A sanyň ikilik ýazgysy 01101100 bolsa, onda **not A** 10010011 bolar.

**And -** logiki köpeltmek ýa-da razrýad boýunça ″We″:

[0] and [1] =[1] and [0] = [0]

[0] and [0] = [0]

[1] and [1] = [1].

Bu ýerde hem argumentiň daşyndaky dik ýaýlar amalyň bir bitiň üstünde geçirilýändigini aňladýar.

Hakyky mysallar bolsa gaty bir düşnikli däldir:

(6 and 4) = 4

(6 and 1) = 0.

Bu sanlary ikilik görnüşde aňlatsak alynýan netijeler düşnikli bolar:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0000110 | (6) | | 0000110 | (6) |
| and | 0000100 | (4) | and | 0000001 | (1) |
| | 0000100 | (4) | | 0000000 | (0) |

**And** amaly 99% ýagdaýda iki maksat üçin gerek bolýar: bitleriň bardygyny ýa-da olaryň käbirini ýok etmek ( 0 etmek) üçin ulanylýar.

Mysal üçin, kompýuteriň huşunyň ulgam öýjükleriniň köp sanlysy kompýuteriň konfigurasiýasy ýa-da ýagdaýy barada maglumaty saklaýar. Şunlukda bir baýt şeýle maglumatlary saklap biler: 6-njy bit 1 deň bolsa, diýmek CapsLock kada gurnalypdyr, 4-nji bit 0 deň, diýmek haýsy hem bolsa başga bir Lock kada öçürilipdir we ş.m. Goý A şol görnüşli baýt bolup sekiz sany baýdagyň ýagdaýyny görkezýän bolsun. Goý onuň 5-nji bitiniň (nomerlemek sagdan çepe , 0-dan 7-ä çenli dowam edýär) ýagdaýyny kesgitlemek gerek bolsun. 5-nji bitde duran birlik $2^5$ sany berýär. Şonuň üçin 32-ni ikinji operant edip alýarys. Eger A –nyň bäşinji bitinde birlik duran bolsa, onda hökman

( A and 32 ) = 32

şert ýerine ýetmeli. Diýmek şol şerti IF operatorynda şert hökmünde ulanmak mümkindir. **And** amalynyň kömegi bilen birbada birnäçe bitiň ýagdaýyny hem kesgitlemek mümkin. Mysal üçin, goý 5-nji, 2-nji we 0-njy bitleriň ýagdaýlaryny bilmek gerek bolsun. Şol bitlerde birlikler, galanlarynda 0 duran ýagdaýynda $2^5+2^2+1=37$. Eger şol bitlerde birlikler duran bolsa, onda

( A and 37 ) = 37

şert çyn(True) bahany alar.

Bitleri goýmak we öçürmek aşakdaky ýaly amala aşyrylýar. Goý Byte tipli A üýtgeýäniň 3-nji bitini öçürmek gerek bolsun. Bu ýerde üýtgeýäniň tipini bilmek wajypdyr. Öçürmek – 0 etmek diýmekdir. Ilki bilen 3-nji biti 0, galan bitleri bolsa 1-e deň bolan sany tapmaly. Byte tip üçin ol san $(255-2^3)=247$ deň, bu ýerde 255 – bir baýtda ýazyp bolýan iň uly san. Eger indi A sany 247-ä logiki köpeltsek, onda 247-däki 1-likler A sandaky bitlere hiç hili täsir etmez, a 247-niň 3-nji bitindäki 0 bolsa, A sanyň 3-nji bitini 0-a öwrer. Şeýlelik bilen, A-nyň 3-nji bitini 0-a öwürmek üçin

A:= A and (255-8)

baha bermek operatoryny ýazmak ýeterlikdir.

Ýokarky usuly birnäçe biti birden öçürmek üçin hem ulanmak mümkindir. Mysal üçin, A sandaky 3-nji we 7-nji bitleri öçürmek üçin

A:=A and (255-8-128)

baha bermek operatoryny ýazmak ýeterlikdir, bu ýerde $8=2^3$ we $128=2^7$.

Or – logiki goşmakdyr; oňa ″ýa-da″ amaly hem diýilýär. Or amaly bitleriň üstünde şeýle geçirilýär:

[1] or [0] = [0] or [1] = [1],

[0] or [0] = [0],

[1] or [1] = [1].

Dik ýaýlar bir biti aňladýar. Bu amal bitin sanyň ikilik ýazgysyndaky käbir bitleri gurnamakda ( ol bite 1-i ýazmakda) ulanylyp biliner. Mysal üçin, A bahanyň 4-nji bitini 1-e öwürmek, galan bitlerini bolsa üýtgetmezlik üçin

A :=A or 16

baha bermek operatoryny ýazmak ýeterlikdir, bu ýerde $16=2^4$. Şunlukda A bahanyň 4-nji bitinde näme durandygynyň ähmiýeti ýokdyr. Islendik ýagdaýda şol ýerde 1 peýda bolar.

Edil şunuň ýaly edip birbada birnäçe biti hem gurnamak mümkindir. Mysal üçin, 4-nji, 1-nji we 0-njy bitleri 1-e öwürmek üçin:

A:=A or (16+2+1);

ýazmak ýeterlikdir.

Turbo Pascalda ýokarkylardan başgada **XOR** amaly hem girizilendir. Oňa ″Ýa-da″-ny ýatyrmak hem diýilýär. Ol amal bitleriň üstünde şeýle kesgitlenilýär:

[1] xor [1] = [0],

[0] xor [0] = [0],

[1] xor [0] = [0] xor [0] = [1].

xor amalyny bitiň (ýa-da birbada birnäçe bitiň ) bahasyny tersine öwürmek üçin ulanmak mümkindir. Goý A sanyň 5-nji bitini tersine öwürmeli bolsun. Onuň üçin A:=A xor 32 ýazmak ýeterlikdir, bu ýerde $32=2^5$.

xor amaly aşakdaky aýratynlyga eýedir: şol bir üýtgeýäne iki gezek ulanylanda şol üýtgeýäniň başdaky bahasyny dikeldýändir. Ýagny,

A=(A xor B) xor B.

Indiki seretjek amallarymyz razrýad boýunça sikliki süýşürmegi aňladýar:

| Amal | Ady | Ýazylyşy |
|---|---|---|
| shl | Çepe n öýe sikliki süýşmek | A shl n |
| shr | Saga n öýe sikliki süýşmek | A shr n |

Bu amallaryň ýerine ýetiriliş derejesi ýokary däldir.

Bu iki amalyň manysy meňzeşdir: olar A bahanyň ikilik yzygiderligini n öýe(bite) çepe (shl) ýa-da saga(shr) süýşürmekdir. Şunlukda süýşürilende araçäkden çykýan bitler ýitirilýär, beýleki tarapda boşan bitler bolsa nollar bilen (çepe süýşürilende elmydama, saga süýşürilende bolsa käwagt) ýa-da birler bilen (diňe ShortInt, Integer we LongInt tipli otrisatel bahalar saga süýşirilende) doldurylýar. Mysallar.

(11011011 shl 0 ) = 11011011,

(11011011 shl 1 ) = 10110110,

(11011011 shl 2 ) = 01101100,

(11011011 shl 3 ) = 11011000,

(11011011 shl 4 ) = 10110000,

…

(11011011 shl 7 ) = 10000000,

(11011011 shl 8 ) = 00000000.

Eger san Word tipli 256-dan 65535-e çenli aralykdan baha alýan bolsa, on da bitler edil ýokardaky ýaly şüýşerdiler, ýöne meýdanyň uzynlygy 16 bite deň bolardy. LongInt tipi üçin meýdanyň uzynlygy 32 bite deň bolar. shl we shr amallar ShortInt, Integer, LongInt tipli otrisatel ululyklara ulanylanda çep tarapdan boşaýan öýler

birlikler bilen doldurylýar.
Mysal.
Bitin sany ikilik ýazga geçirýän programma düzmeli.
Çözülişi.

```
{ Bitin sany ikilik ýazga geçirýän funksiýa}
{ X – bitin san (başga tipleri bermek bolýar}
{ NumOfBits – ikilik ýazgydaky öýleriň sany}
Function Binary (X:LongInt; NumOfBits:Byte ) : String;
Var
        bit, i :Byte;  { kömekçi üýtgeýänler}
        s Ž String[32];
BEGIN
        s:=’’;    { Setiri arassalamak }
        for i:=1 to 31 dfo  begin   {öwürmek sikli}
bit:=( X shl i) shl (31);              {biti bellemek}
s:=s+Chr(Ord(‘0’)+bit)              {setire ýazmak}
end;   {for}                              {sikliň soňy}
Delete(s,1,32-NumOfBits);        {artyk bitleri kesmek}
Binary:=s;                                {dolanýan setir}
END;
Var
i:Integer;   {=== Çagyryşyň mysaly====}
BEGIN
for i:=-5 to 5 do
        WriteLn(i:7,’→’, Binary(i, 8*SizeOf(i)));
ReadLn;  {Pausa}
End.
```

Shl amaly bitin sanlary ikiniň derejelerine köpeltmegi çalyşyp biler:

J shl 1 = J*2,
J shl 2 = J*4,
J shl 3 = J*8.

### 3. Logiki hasaplamalar we gatnaşyk amallary.

Boolean logiki tipiniň we onuň üstünde ýerine ýetirilýän amallaryň bolmagy logiki hasaplamalary programmirlemägä mümkinçilik berýär.

Turbo Paskalda 4 sany logiki amal ulanylýar. Olar aşakdaky tablissada görkezilýär. Bu ýerde L1 we L2 –TRUE ýa-da FALSE deň bolan logiki hemişelikler, üýtgeýänler ýa-da aňlatmalar.

| Amal | Ady | Ýazylyşy | Amalyň netijesi |
|---|---|---|---|
| not | Logiki ″Ýok″ (inkär etmek) | not L1 | L1 baha gapma-garşylykly baha |
| and | Logiki ″We″ (konýuksiýa) | L1 and L2 | Eger L1 we L2 TRUE deň bolsalar, onda logiki TRUE bolmasa FALSE baha deňdir |

| | | | |
|---|---|---|---|
| or | Logiki ″ýa-da″ (dizýunksiýa) | L1 or L2 | Eger L1 we L2-iň iň bolmanda biri TRUE deň bolsa, onda logiki TRUE bolmasa FALSE baha deňdir |
| xor | ″Ýa-da″-ny logiki ýatyrmak | L1 xor L2 | Eger L1 we L2 bahalar dürli bolsalar TRUE, bolmasa FALSE deň |

Gatnaşyk amallary we olaryň netijeleri aşakdaky tablissada berilýär. Ýönekeý bahalary, görkezijileri, simwollary, setirleri deňeşdirmek bolýar. Gatnaşyk amalynyň netijesi elmydama logiki TRUE ýa-da logiki FALSE bolýandyr.

| Belgisi | Ady | Ýazylyşy | Amalyň netijesi |
|---|---|---|---|
| = | Deňdir | X1 = X2 | Eger X1 we X2 deň bolsalar TRUE, bolmasa FALSE deňdir |
| <> | Deň däldir | X1 <> X2 | Eger X1 we X2 dürli bolsalar TRUE, bolmasa FALSE deňdir |
| < | Kiçidir | X1 <X2 | Eger X1  X2-den kiçi  bolsa TRUE, bolmasa FALSE deňdir |
| > | Ulydyr | X1 > X2 | Eger X1  X2-den uly  bolsa TRUE, bolmasa FALSE deňdir |
| <= | Kiçi ýa-da deňdir | X1 <= X2 | Eger X1  X2-den kiçi  ýa-da deň bolsa TRUE, bolmasa FALSE deňdir |
| >= | Uly ýa-da deňdir | X1 >= X2 | Eger X1  X2-den uly ýa-da deň bolsa TRUE, bolmasa FALSE deňdir |

Haçanda gatnaşyk amallary ýönekeý tipli operantlar üçin ulanylýan bolsa onda ol tipler hökman sygyşýan tipler bolmalydyrlar. Ýöne, eger bir operant hakyky tipli bolsa, onda beýleki operant bitin bolup bilýändir. Logiki bahalary hem deňeşdirmek mümkindir. Elmydama TRUE > FALSE  bolýar.

Adatça logiki aňlatmalar programmada şertli dolandyrýan operatorlarda

(IF,WHILE, REPEAT …UNTIL we başgalar), şeýle hem logiki üýtgeýän ululyklara baha berilende ulanylýar.

Meselem,

```
IF X>0 then write(‘ X san položitel’);
Repeat
S:=S+i;
i:=i+1
Until i>15;
```

**4.Köplükler.**

Köplük diýlende bir bitewi zat hökmünde seredip bolýan şol bir häsiýet, şol bir nyşan ýa-da nyşänlar boýunça ýygnalan obýektleriň toplumuna düşünilýär. Meselem 1-den 99-a çenli yzygider gelýän ähli jübüt sanlaryň köplügi; türkmen diliniň elipbiýine girýän ähli çekimli harplaryň köplügi we ş.m

TURBO-PASCAL dilinde köplügiň elementlerine bir näçe çäklendirmeler goýulýar. Meselem, köplügiň elementleri REAL, WORD, LONGINT tiplerden başga islendik tertipleşdirilen tipe degişli bolmalydyr; köplügiň elementleriniň sany 256-dan geçmeli däl; we ş.m.

Köplügiň elementleri kwadrat skobkanyň içinde ýazylýar.

Meselem:

[‘A’, ’B’, ‘C’]

elementleri CHAR tipe degişli bolan köplük.

[-3, 1, 3, 5]

elementleri INTEGER tipe degişli bolan köplük.

[FALSE, TRUE]

elementleri BOOLEAN tipe degişli bolan köplük.

[1..100]

elementleri çäklendirilen tipe degişli bolan köplük; we ş.m. Hiç bir elementi bolmadyk köplüge boş köplük diýilýar we ol TURBO-PASCAL-da [ ] görnüşde bellenilýär.

Boş köplük islendik köplügiň bölek köplügidir. Baha hökmünde diňe köplükleri kabul edip bilýän üýtgeýän ululyklar aşakdaky ýaly yglan edilýär:

TYPE
<tipiň ady>=SET OF <elementleriň tipi>;
VAR
<üýtgeýän ululygyň ady>: < tipiň ady>;

ýa-da başgaça, göniden-göni üýtgeýän ululyklar bölüminde hem yglan etmek mümkin:

VAR
<üýtgeýän ululygyň ady>: SET OF <elementleriň tipi>;

Meselem

VAR X:SET OF 1..3;

yazgy X üýtgeýän ululygyň diňe elementleri 1..3 interwaldan bolan köplüklere eýe bolup bilýändigini aňladýar. Bu ýerde X üýtgeýän ululyga {1,2,3} köplügiň islendik bölek köplügine eýe bolup bilýär. Ýagny X üýtgeýän ululyk aşakdaky köplükde kesgitlenen:

{{1,2,3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1}, {2}, {3}, { }}

Köplük yglan edilende elementleriň tipi hökmünde INTEGER, BYTE, BOOLEAN, CHAR tipleri we standart däl skalýar tipleri ulanyp bolýar. Meselem:

[35..-1] ýa-da [‘m’..’s’] boş köplüklerdir.

```
VAR
        A,B:SET  OF   0..49;
        HARP:SET  OF CHAR;
        X:SET  OF(MART,APREL,MAY);
```

[ ] baş köplük bu tipleriň islendigine degişli edip bolýan ýeke-täk köplükdir.

Eger köplük[e1..e2] görnüşde berlip, e1>e2 bolsa, onda ol köplük boş köplük hasap edilýär. Meselem[35..-1] ýa-da [‘m’..’s’] boş köplüklerdir.

Edil matematikadaky ýaly, TURBO-PASCAL algoritmik dilinde hem köplükleriň üstünde kesişme, birleşme, tapawut alamatlaryny ýerine ýetirip bolýar. Bu amallar degişlilikde ‘*’, ‘+’, we ‘-‘ simwollar bilen bellenýär.Ýagny,

```
VAR
        A,B,X,Y,Z : SET OF INTEGER;
BEGIN
        X:=A*B; Y:=A+B; Z:=A-B;
```

operatorlary ýerine ýetenlerinde X üýtgeýän ululyga şol bir wagtda A we B köplükleriň ikisinde hem bar bolan elementlerden düzülen köplüge eýe bolýar. Y-üýtgeýän ululyga A we B köplükleriň iň bolmanda birine degişli bolan elementlerden durýan köplüge eýe bolýar; Z-üýtgeýän ululyga bolsa, A köplügiň B köplükde bar bolmadyk elementlerinden durýan köplüge eýe bolýar. Bu ýerde A we B şol bir tipe degişli bolan köplükler bolmaly.

Köplügiň üstünden bu amallardan başga-da bäş sany logiki amaly hem ýerine ýetirmek mümkin:

1) ‘=’; 2) ‘<>’; 3) ‘<=’; 4) ‘>=’; 5) ‘IN’;

Bu belgiler degişlilikde "=","≠","≤","≥","∈" belgileri aňladýarlar.

Goý A we B – şol bir tipe degişli bolan köplükler bolsun.

Onda

A=B logiki aňlatma “TRUE” baha eýe bolýar, haçanda bu köplükler şol bir elementlerden duran bolsa, beýleki ýagdaýlarda “FALSE” baha eýedir;

A<>B -  logiki aňlatma “TRUE” baha eýe bolýär, haçanda  A we B köplükler gelmese, beýleki ýagdaýlarda “FALSE” baha eýe bolýar.

A<=B – logiki aňlatma “TRUE” baha eýe, haçanda B köplük özünde A köplügi saklaýan bolsa, beýleki ýagdaýlarda “FALSE” baha eýe;

A>=B  - logiki aňlatma, “TRUE” baha eýe, haçanda A köplük özünde B köplügi saklaýan bolsa, beýleki ýagdaýlarda “FALSE” baha eýe;

X IN Y – logiki aňlatma “TRUE” bahany kabul edýär, haçanda X element S köplüge degişli bolsa, eger-de X element S köplükde ýök bolsa onda “FALSE” bahany kabul edýär.

Mysal üçin, goý

```
        VAR A,B,C : SET OF CHAR;
        BEGIN
                A:=[‘a’, ’b’, ‘c’, ‘d’];
                B:=[‘b’]; C:=[‘c’,’e’]; …
```

bolsun. Onda A+C, A-C we A*B aňlatmalar degişlilikde [‘a’..’e’], [‘a’,’c’, ‘d’] we [‘b’] bahalara eýe bolýar; B<=A, A>=B, C<=A logiki aňlatmalar degişlilikde  “TRUE” we “FALSE” bahalara eýe bolýarlar;

‘a’ IN A we ‘a’IN C logiki aňlatmalar degişlilikde “TRUE” we “FALSE” bahalary kabul ederler.

IN operasiýasy haýsy bolsada bir bahanyň berlen köplüge degişliligini ýada degişli däldigini barlamak üçin hyzmat edýär we köplenç şertli geçiş operatorynda ulanylýär. Meselem:

```
IF 2 IN [1,2,3] THEN …,
IF ‘V’ IN[‘a’,…,’e’] THEN …,
IF X1 IN [X0,X1,X2,X3] THEN …
```

köplenç IN operasiýasy NOT inkär etme operasiýasy bilen bilelikde ulanylýar. Meselem:

```
IF NOT(X IN M) THEN …
```

bu ýerde logiki aňlatma haçanda X element M köplükde bolmasa “TRUE” bahany alýar.

Mysallar:

```
PROGRAM MYSAL_1;
USES CRT;
VAR
        K,I : BYTE; TEKST : STRING[255];
        LATHARPY : SET OF CHAR; SIMWOL : CHAR;
BEGIN
CLRSCR;
        LATHARPY:=[‘a’..’z’]; k:=0;
        READ(TEKST);
        FOR I:=1 TO LENGTH(TEKST) DO
        BEGIN
                SIMWOL:=TEKST[I];
                IF SIMWOL IN LATHARPY THEN K:=K+1;
        END;
        WRITE(‘K=’,K);   END.
```

Bu programma klawiaturadan girizilen TEKST atly setir üýtgeýän ululygyň bahalarynda näçe sany kiçi latyn harpynyň bardygyny kesgitleýär.

Mysal:

```
PROGRAM MYSAL_2;
USES CRT;
VAR
        ELEMENT : 1...25; I,K : INTEGER;
        KOPLUK : SET OF 1..25;
BEGIN        CLRSCR;
        KOPLUK:=[ ]; RANDOMIZE;
        FOR I:=1 TO 8 DO BEGIN ELEMENT:=RANDOM(24)+1;
        KOPLUK:=KOPLUK+[ELEMENT]
        END;
        K:=0;
        FOR I:=1 TO 25 DO
                IF I IN KOPLUK THEN
                BEGIN WRITE(I,’ ‘:5); K:=K+1; END;
        WRITE(‘K=’,K);
END.
```

Netijeler:

a) 1 4 13 14 18 19 20 22
k=8

b) 7 8 9 10 11 14 23
k=7

ç) 10 11 17 20 23 24
k=6

we ş. m.

Bu programmada 1..25 aralykdan bolan tötänleýin sanlardan köplük düzülýär; Köplügiň elementleri we olaryň sany çapa çykarylýär; Bu ýerde tötänleýin sanlaryň arasynda gabat gelýänleri-de bolmagy mümkin; ol ýagdaýda K<8 bolýar.

Bellik:

1) RANDOM(N) – sdtandart funksiýanyň [0,N] aralykdan alnan tötänleýin bitin sany kesgitleýär; Bu ýerde eger N parametr goýulmadyk bolsa, onda [0,1] aralykdaky tötänleýinhakyky sanlar alynýar;
2) TURBO-PASCAL ulgamsynda köplügiň elementi hökmünde otrisatel bitin sanlary ulanmak bolmaýar.

Mysal. n natural san we n elementli, elementleri simwollar bolan S massiw berlen. S massiwde haýsy simwol näçe gezek gaýtalanýar. Bir simwol baradaky maglumat diňe bir gezek çap edilmeli.

```
Var
S:array[1..25] if char;
n,i,k:integer;
M:set of char;
begin
writeln('n='); read(n);
writeln('S massiwiň elementlerini giriziň');
for i:=1 to n do begin
            write('S[,i,']='); read(S[i]);
               end;     M:=[];
for i:=1 to n do
      if  Not (s[i] in M) then  begin k:=0; M:=M+[S[i]];
for j:=i+1 to n do
if s[i]=s[j] then  k:=k+1;
      writeln(S[i], '=', k);
end;    end.
```

**Ähtimallyklar teoriýasy hakynda esasy düşünjeler.**

1.Ähtimallyklar teoriýasynyň döräp başlan wagtyny adatça XVII asyra degişli edip, ony gyzyklandyryjy(humarly) oýunlary kombinatoriki meseleleri bilen baglanyşdyrýarlar. Gyzyklandyryjy(humarly) oýunlara,elbetde möhüm kesp ýaly garamak bolmaz. Ýöne XVII asyryň matematiki modelleriniň çäginde ýerleşdirip bolmaýan meseleleri hut humarly oýunlar ýüze çykardy we şeýlelikde, olar täze-täze çemeleşmeleriň, düşünjeleriň ideýalaryň ýüze çykmagyna itergi berdi. Ol ideýalary ilki başda girizenler

Ýa. Bernulli, Laplas, Gauss, Paskal, Ferma we başgalardyr.

Ähtimallyklar teoriýasynyň praktiki ähmiýeti, aýdyň manysy hakyky ýa-da hyýalymyzdaky tejribeler, synaglar, hadysalar bilen baglanşykly ýüze çykýar. Haýsy-da bolsa bir hadysa gözegçilik edilmegine synag ýa-da tejribe diýilýär.

Synagyň tejtibäniň gözegçiligiň netijelerini (terminologiki bellik üçin) baha diýip atlandyrýarys.

Synagyň bolup biljek her bir netijesi elementar wakadyr. Elementar wakalaryň köplügine elementar wakalaryň giňişligi diýilýär.

2.Biziň gözegçilik edýän wakalarymyz esasan üç bölege bölünýär:

1) hökmany waka;
2) mümkindäl waka;
3) tötän waka.

Eger S şertleriň kesgitli toplumy ýerine ýetirilende mydama ýüze çykýan waka hökmany waka diýilýär we ol U bilen belgilenýär.

Meselem, normal atmosfera basyşynda we 20° temperaturada «gapdaky suw suwuk haldadyr» diýen waka hökmany wakadyr. Bu ýerde suwuň atmosfera basyşy we temperaturasy S şertleriň kesgitli toplumyny düzýär.

Eger S şertleriň kesgitli toplumy ýerine ýetirilende hiç ýüze çykmaýan waka mümkindäl waka diýilýär.

Meselem, öňki mysalyň şertlerinde «gapdaky suw buz görnüşdedir (gaty haldadyr)» diýen waka mümkindäl wakadyr we V bilen belgilenýär.

S şertleriň kesgitli toplumynda ýüze çykjagyny ýa-da çykmajagyny öňünden aýdyp bolmaýan waka tötän waka diýilýär we ol A,B,C,... harplar bilen belgilenýär.

Meselem. Atyjy 4 bölege bölünen nyşana ok atýar. Ok atmak bu synag. Nyşanyň belli bir bölegine okuň degmegi tötän wakadyr. Bu ýerde S şertleriň kesgitli toplumy ýerine ýetirildi diýmeklik – synag sözi bilen çalşyryldy. Mundan beýläk biz ony – synag diýip alarys.

Şeýlelikde synagyň netijelerini waka hökmünde seretjekdiris.

Eger şol bir synagda bir wakanyň ýüze çykmagy beýleki wakanyň ýüze çykmagyny aradan aýyrýan bolsa, onda onuň ýaly wakalara sygyşmaýan wakalar diýilýär.Meselem:Teňňe ýokaryk zyňylýar. Şonuň gerb ýüzüniň düşmegi, onuň ýazgy ýüzüniň düşmegini aradan aýyrýar. «Gerb ýüzi düşdi» we «ýazgy ýüzi düşdi» diýen wakalar sygyşmaýan wakalardyr. Eger synagyň netijesinde birnäçe wakalaryň iň bolmanda biri ýüze çykýan bolsa onda ol wakalar doly topary emele getirýärler.Başgaça aýdanyňda doly topary emele getirýän wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagy hökmany wakadyr.Hususy halda eger doly topary düzýän wakalar jübüt-jübütden sygyşmaýan wakalar bolsalar onda tejribäniň netijesinde olaryň biri we diňe biri hökman ýüze çykýar.

Meselem, atyjy nyşana ok atýar.Okuň nyşana degmegi we degmezligi şolar ýaly wakadyr. Eger A we $\bar{A}$ wakalar üçin $A\cup\bar{A}=U$, $A\cap\bar{A}=\vee$ iki gatnaşyk bir wagtda ýerine ýetseler onda A we A wakalara garşylykly wakalar diýilýär.Meselem nyşana ok atylanda oňa okuň degmegi we degmezligi garşylykly wakadyr.Eger okuň degmegi A waka bolsa,onda okuň degmezligi A waka bolar.

A we B wakalaryň iň bolmanda biriniň ýa-da olaryň ikisiniň hem şol bir wagtyň özünde ýüze çykmagyny aňladýan waka A we B wakalaryň jemi diýilýär. Ol A+B ýa-da $A\cup B$ bilen bellenilýär.

A we B wakalaryň ikisiniň hem şol bir wagtda ýüze çykmagyndan ybarat waka A we B

wakalaryň köpeltmek hasyly diýilýar. Ol AB ýa-da $A \cap B$ bilen bellenilýär.
Eger

$$U=B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ... B_n$$

bolsa we $B_i$-wakalar goşa-goşadan sygyşmaýan wakalar bolsalar,ýagny $B_i \cap B_j = \vee$, $i \neq j$ onda $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ wakalar goşa-goşadan sygyşmaýan wakalaryň doly toparyny emele getirýär. Bu ýagdaýda $B_i$-wakalaryň biri diňe biri synag netijesinde i hökman ýüze çykmalydyr.

Tötän wakalar üçin:
kommutatiwlik A+B=B+A, AB=BA;
assosiatiwlik A+(B+C)=(A+B)+C;
distributiwlik $A \cap (B+C)=AB+AC$.
kanunlary ýerine ýetýärler.

## Ähtimallygyň klassiki kesgitlemesi.

Ähtimallyk-ähtimallyklar teoriýasynyň esasy düşünjeleriniň biri hasaplanýar. Bu düşünjäniň bir-näçe kesgitlemesi bardyr. Bu ýerde klassik kesgitleme diýilýän kesgitlemäni berýäris.
Mysala seredeliň. Goý gapyrjakda 6 sany birmeňzeş formaly, ýöne dürli reňkli şarlar bar bolsun. Olaryň 2 sanysy gyzyl reňkli, 3-si gök reňkl we 1 sanysy ak reňkli şar bolsunlar,Şarlar garyşan bolsun.
Biz gapyrjakdan reňkli (gyzyl ýada gök) şary çykarmak mümkinçiligini mukdar taýdan häsiýetlendirmek meselesine, ýagny reňkli şary çykarmak meselesine garap geçeliň.Bu ýerde gapyrjakdan çykarylan bir şaryň reňkli bolmagynyň mümkinçiligi ol şaryň ak bolmagyndan uludyr.Eger şol mümkinçiligi san taýdan aňladyp bolýan bolsa,onda şol sana A wakanyň reňkli şaryň ýüze çykmagynyň ähtimallygy diýilýär.Şunlukda, ähtimallyk munuň özi wakanyň ýüze çykmagyny häsiýetlendirýän sandyr.Başgaça aýdylanda tötän wakanyň ýüze çykmagynyň ölçegine şol wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy diýilýär.Elementar wakalaryň bizi gyzyklandyrýan wakanyň ýüze çykmagyna gatnaşýanlaryna şol waka ýardam edýän elementar wakalar diýilýär.
Elementar wakalary $w_1, w_2, w_3, ..., w_8$ diýip belläliň. Biziň mysalymyzda 6 sany elementar waka bolup biler. $w_1$ ak şar ýüze çykdy,$w_2, w_3$ gyzyl şar ýüze çykdy, $w_4, w_5, w_6$- gök şar ýüze çykdy diýen wakalardyr.,Bu netijeleriň her biri ýeke-täk mümkinçilikli wakalar, ýagny şar hökman ýüze çykmaly we olar deň mşmkinçiliklidir. A wakanyň reňkli şaryň ýüze çykmagyna 5 sany elementar waka gatnaşýar.Şarlar garyşdyrylan,hemmesi meňzeş formaly, hem-de olar tötänleýin çykarylýarlar.
Biziň mysalymyzda A-wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň (olar 5 sany) sanynyň elementar wakalaryň umumy sanyna (olar 6 sany),ýagny 5/6-sana ,A wakanyň ähtimallygy diýilýär we ol P(A) bilen belgilenýär.Bu san (5/6) şu mysalda çykarylan şaryň reňkli bolmagynyň ähtimallygyny berýän san. Şol sana hem biziň mysalymyzda reňkli şaryň ýüze çykmagynyň ähtimallygy diýilýär.
Şeýlelikde P(A)=5/6 bolar.
Şu mysaldan ugur alyp, indi biz wakanyň ähtimallygynyň kesgitlemesini bereliň.

## Wakanyň otnositel ýygylygy. Ähtimallygyň statistiki kesgitlenişi.

Şol bir synag birnäçe gezek geçirilende A-waka birnäçe gezek ýüze çykar we birnäçe gezek ýüze çykman biler. Synaglaryň sanyny näçe köpeltsek, onda şol A-wakanyň ýüze çykýan sany hem üýtgär. Goý synaglaryň sany n-bolsun, A-wakanyň ýüze çykýan synaglaryň sany m bolsun. Onda m-sanyň (A-wakanyň näçe gezek ýüze çykandygyny aňladýan san) n-sana (synaglaryň umumy sany) bolan gatnaşygyna, A-wakanyň otnositel ýygylygy diýilýär we ol W(A) bilen bellenilýär, ýagny

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

Bu ýerde n-synaglaryň umumy sany, m bolsa A-wakanyň näçe gezek ýüze çykandygyny aňladýan san.

Emma synaglaryň sanyny köpeltsek, ony $\bar{n}$ bilen belläliň, onda m-san hem ulalar, ýöne her bir ýagdaýda wakanyň otnositel ýygylygy dürliçe bolsa-da, şol bir hemişelik sana ýakyn bolýandygyny tejribeler görkezýär. Şol hemişelik sana hem A-wakanyň ähtimallygy diýilýär we ol obýektiw ululykdyr. Eger wakanyň ähtimallygy deregine onuň otnositel ýygylygy alynsa, onda onuň ýaly kesgitlenen ähtimallyga, ähtimallygyň statistiki kesgitlenişi diýilýär.

Tötän wakanyň otnositel ýygylygy bilen ähtimallygynyň arasyndaky tapawut şu aşakdakydan ybaratdyr: Ähtimallyk tejribe geçirilmänkä hasaplanýar, emma otnositel ýygylyk bolsa tejribe geçirilenden soň hasaplanýar.

Ähtimallygyň klasiki kesgitlemesi tükenikli synaglar üçin ulanylýar, emma statistik kesgitlenişi synagyň sany has köp bolanda ýa-da tükeniksiz bolanda ulanylýar. Şonuň üçin hem statistik kesgitlenişi has giň hasaplanylýar.

## Ähtimallyklaryň goşmak teoremasy.

Ozal belli bolşy ýaly, iki sany A we B wakanyň jemi diýip (A+B), A-wakanyň ýa-da B-wakanyň, ýa-da bolmasa ikisiniň hem bilelikde ýüze çykmagyna aýdylýar. Hususy halda A we B sygyşmaýan wakalar bolsa, onda A+B (iki wakanyň jemi) diýip, haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagyna aýdylýar. Goý A we B sygyşmaýan wakalar bolsun, özi hem bu wakalaryň ähtimallyklary berlen bolsun, onda A ýa-da B wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny nädip tapmaly ?

Bu soraga aşakdaky teorema jogap berýär.

**<u>Teorema</u>**: Sygyşmaýan iki sany A we B wakalaryň jeminiň ähtimallygy, haýsynyň ýüze çykanynyň tapawudy ýok, şol wakalaryň ähtimallyklarynyň jemine deňdir, ýagny

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

<u>Subudy</u>: Umumy elementar wakalaryň sany n bolsun. A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň sany $m_1$, B-wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň sany $m_2$ bolsun, onda A bilen B wakanyň haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagyny aňladýan elementar wakalarynyň sany $m_1+m_2$ bolar.

Şeýlelikde ähtimallygyň kesgitlemesini ulanyp alarys:

$P(A)=m_1/n$, $P(B)=m_2/n$, $P(A+B) = (m_1+m_2)/n = m_1/n + m_2/n$ bolýandygyny göz öňünde tutup bu ýerden alarys:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Goý $A_1,A_2,...,A_n$ wakalar goşa-goşadan sygyşmaýan wakalar bolsunlar, onda

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$$

bolar. Bu fakt induksiýa boýunça subut edilýär.

**Teorema**: Doly topary düzýän $A_1,A_2,...,A_n$ wakalaryň jeminiň ähtimallygy bire deňdir, ýagny

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Subudy: Doly topary düzýän $A_1,A_2,...,A_n$ wakalaryň biriniň ýüze çykmagy hökmany wakadyr,hökmany wakanyň ähtimallygy hem bire deň. Onda

$$P(A_1,A_2,...,A_n)=1.$$

Doly toparyň islendik iki wakasy sygyşmaýan waka, şonuň üçin hem goşmak teoremasy esasynda

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$$

Soňky iki deňlikden

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

gelip çykýar.

**Teorema**: Garşylykly iki sany A we $\overline{A}$ wakalaryň ähtimallyklarynyň jemi bire deňdir, ýagny

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Eger P(A)=p, $P(\overline{A})=q$ diýip bellesek, onda p+q=1 bolar.

p=P(A)- A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy,

q=P($\overline{A}$)-A waka garşy wakanyň ähtimallygy.

Mysal. Eger ertir ýagyş ýagjakdygynyň ähtimallygy p=0,3 bolsa, onda ertir açyk gün boljakdygynyň ähtimallygy tapmaly.

Çözlüşi. Şerte görä p=0,3. Onda q=1-p=1-0,3=0,7.
Ýagny q=0,7. q=P($\overline{A}$). $\overline{A}$ we A wakalar garşylykly wakalar.

## Ähtimallyklary köpeltmek.

Garaşly we garaşsyz wakalar.

Eger A wakanyň ähtimallygy beýleki B wakanyň ýüze çykmagyna ýa-da çykmazlygyna bagly bolmasa, onda olara garaşsyz (özara bagly däl) wakalar diýilýär. Tersine bolsa ýagny A wakanyň ähtimallygy B wakanyň ýüze çykmagyna bagly bolsa, onda olara garaşly (özara bagly) wakalar diýilýär.

Mysal. Teňňe iki gezek ýokaryk zyňylýar. Gerb ýüzüniň düşmeginiň ähtimallygy (A waka) ikinji gezek (B waka) zyňylanda gerb ýüzüniň düşmegine ýa-da düşmezligine bagly däl.

Şeýelelikde A we B waka biri birine bagly däl (garaşsyz).

Bir näçe wakalaryň her ikisi özara biri – birine garaşsyz bolsa, onda olara jübüt – jübütden garaşsyz (bagly däl) wakalar diýilýär.

Mysal. Teňňe üç gezek ýokaryk zyňylýar. Goý A,B,C degişlilikde gerb ýüzüniň ýüze çykmagy bolsun, ony birinjide A, ikijide B, üçünjide C diýip belleýäris. Şu seredýän her bir iki wakamyz (A we B), (A we C), (B we C) bagly däl. Şeýlelikde A,B,C wakalar jübüt-jübütden bagly däldirler.

Eger birnäçe $A_1$ , $A_2$ , $A_3$ - wakalryň her biri, ýa-da olaryň islendik kombinasiýasy (galan hemme wakalry ýa-da olaryň käbir bölegini özünde saklaýan) garaşsyz (bagly däl) wakalar bolsalar, onda olara toplumlaýyn garaşsyz (bagly däl) waklar diýilýär. Eger birnäçe wakalar jübüt-jübütden bagly däl bolsalar, onda olara toplumlaýyn bagly däl wakalar diýip bolmaýar.

Şu manyda toplumlaýyn bagly däl diýmek talaby,jübüt-jübütden bagly däl talabyndan güýçlidir.

Meselem, eger $A_1$ ,$A_2$ ,$A_3$ wakalar toplumlaýyn garaşsyz (bagly däl) bolsalar onda $A_1$ we $A_2$ , $A_1$ we $A_3$ , $A_2$ we $A_3$ ,$A_1A_2$ we $A_3$ , $A_1A_3$ we $A_2$ , $A_2A_3$ we $A_1$ wakalar garaşsyz (bagly däl) wakalrdyr

Garaşsyz wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek teoremasy.

**Teorema**: Bagly däl (garaşsyz) A we B wakalaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy şol wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny

$$P(A\cup B)=P(A)\cdot P(B)$$

Subudy: A-wakanyň ýüze çykmagy üçin geçirilýän synaglaryň umumy sanyny n-bilen belläliň, A-wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň sanyny m; B-wakanyň ýüze çykmagy üçin geçirilýän synaglaryň umumy sanyny m bilen belläliň, B-wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar netijeleriň sanyny $m_1$ diýeliň ($n_1<n$; $m<m_1$) onda $P(A)=\frac{n_1}{n}$, $P(B)=\frac{m_1}{m}$ bolar.

Diýmek ähtimallygyň kesgitlemesine görä $P(AB)=\frac{n_1m_1}{n\cdot m}$ bolar,

Onda

$$P(AB)=\frac{n_1}{n}\cdot\frac{m_1}{m}=P(A)\cdot P(B)$$

ýa-da

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Mysal. Iki teňňe bir bada zyňylanda gerbiň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Birinji teňňede gerbiň ýüze çykmagynyň ähtimallygy P(A)=1/2, ikinji teňňede gerbiň ýüze çykmagynyň ähtimallygy P(B)=1/2. A we B wakalar bagly däl, şonuň üçin ýokardaky teorema esasynda

$$P(AB)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

**Teorema 2**. Toplumlaýyn garaşsyz (bagly däl) birnäçe $A_1,A_2,A_3,...,A_n$ wakalaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy şol wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny

$$P(A_1,A_2,...,A_n)=P(A_1)*P(A_2)*...*P(A_n).$$

Indi goşmak we köpeltmek teoremalarynyň bilelikde ulanylyşyna mysal getireliň.

Mysal. Özara garaşsyz (bagly däl) üç sany $A_1,A_2,A_3$ wakalaryň ýüze çykmagynyň ähtimallyklary degişlilikde $P_1,P_2,P_3$ bolsun. Şol wakalaryň diňe biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Diňe birinji $A_1$ wakanyň ýüze çykmagy $(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$ (birinji ýüze çykyp beýleki ikisiniň ýüze çykmazlygy) wakanyň ýüze çykmagyna deňgüýçlidir.

Bellik girizeliň:

$B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ diňe $A_1$ wakanyň ýüze çykmagy

$B_2=\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ diňe $A_2$ wakanyň ýüze çykmagy

$B_3=\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ diňe $A_3$ wakanyň ýüze çykmagy

Şeýlelikde $A_1,A_2,A_3$ wakalaryň diňe biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmak üçin $P(B_1+B_2+B_3)$ ähtimallygyny, ýagny $B_1,B_2,B_3$ wakalaryň haýsy hem bolsa biriniň (tapawudy ýok) ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly bolýarys.

$B_1,B_2,B_3$ wakalar sygyşmaýan wakalar bolany üçin goşmak teoremasyndan peýdalanyp alarys:

$$P(B_1+B_2+B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)$$

Indi bolsa $B_1,B_2,B_3$ wakalaryň her biriniň ähtimallygyny tapmak gerek.$A_1,A_2,A_3$ wakalar bagly däl,şonuň üçin $A_1,A_2,A_3$ wakalar hem bagly däldirler,onda ähtimallygyň köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp alarys:

$$P(B_1)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=p_1q_2q_3$$

Şonuň ýaly-da

$$P(B_2)=P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)=q_1p_2q_3$$

$$P(B_3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=q_1q_2p_3$$

Şeýlelikde $A_1,A_2,A_3$ wakalaryň diňe biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy şu aşakdaky formula boýunça tapylýar

$$P(B_1+B_2+B_3)=p_1q_2q_3+q_1p_2q_3+q_1q_2p_3.$$

Bu ýerde $p_1=P(A_1)$, $p_2=P(A_2)$, $p_3=P(A_3)$

$q_1=P(A_1)$, $q_2=P(A_2)$, $q_3=P(A_3)$

## Şertli ähtimallyk.

Goý A we B wakalar garaşly (biri-birine bagly) bolsunlar, ýagny bagly wakalaryň kesgitlemesinden bir wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy beýleki wakanyň ýüze çykmagyna ýa-da çykmazlygyna bagly bolup durýar. Şonuň üçin hem eger bizi B wakanyň ähtimallygy gyzyklandyrýan bolsa, onda bize A wakanyň ýüze çykandygyny ýa-da çykmandygyny bilmek zerurdyr.

**Kesgitleme.** B wakanyň ähtimallygy A waka eýýäm bolup geçenden soň hasaplanan bolsa, onda oňa B wakanyň şertli ähtimallygy diýilýär. Ol şeýle bellenýär $P_A(B)$.

Meselem. Gutyda 3 sany ak we 3 sany gara şar bar bolsun. Gapdan 2 gezek ýeke-ýekeden yzyna goýmazdan şar çykarylýar. Ikinji synagda ak şaryň (B waka) çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly, Eger 1-nji synagda gara şar çykan bolsa.

Çözülişi. Birinji synagdan soň 5 şar galar. Olaryň 3-si ak şar bolar. Onda ikinji synagda ak şaryň ýüze çykmagynyň ähtimallygy (B wakanyň şertli ähtimallygy) ýagny gözlenýän ähtimallyk $P_A(B)=3/5$-e deň bolar. Eger $P_A(B)=P(B)$, $P_B(A)=P(A)$ bolsa, onda A we B bagly däldir.

## Garaşly (özara bagly) wakalaryň ähtimallyklary köpeltmek.

Goý A we B wakalar özara biri-birine garaşly (özara bagly) wakalar bolsunlar, şonuň ýaly-da olaryň ähtimallyklary P(A) we şertli $P_A(B)$ belli bolsun. Şu iki sany özara bagly wakalaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygyny nähili tapmaly?

**Teorema**. Iki sany özara bagly A we B wakalaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy şol wakalaryň biriniň ähtimallygynyň beýlekisiniň şertli ähtimallygyna köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny

$$P(AB)=P(A)P_A(B) \qquad (1)$$

$$P(AB)=P(B)P_B(A) \qquad (2)$$

*Bellik*: Şertli ähtimallygy (1)-den tapsak $P_A(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ aňlatmany alarys.

Soňky deňligi şertli ähtimallygyň kesgitlemesu hökmünde alyp bolýar.

Subudy. Bellik girizeliň:

n – A wakanyň ýüze çykmagu üçin geçirilýän synaglaryň umumy sany, $n_1$- A wakanyň ýüze ýardam edýän elementar wakalaryň sany ($n_1<n$); m – A waka bolup geçenden soň, B – wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýän elementar wakalaryň sany, ýagny ol elementar wakalar AB – wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýär ($m<n_1$)

A we B wakalaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy:

$$P(AB)=\frac{n_1}{n}\cdot\frac{m}{n_1}=\frac{m}{n}.$$

Bu ýerde $\frac{n_1}{n}=P(A)$, we $\frac{m}{n_1}=P_A(B)$ bolýandygyny göz öňünde tutup alarys

$$P(AB) = P(A)\cdot P_A(B).$$

Netije. Birnäçe garaşly (özara bagly) wakalaryň bilelekde ýüze çykmagynyň ähtimallygy şol wakallaryň biriniň ähtimallygynyň beýlekileriniň hemmesiniň şertli ähtimallyklaryna köpeltmek hasylyna deňdir, özem soňky wakalaryň ähtimallyklary olaryň özünden öňki wakalar bolup geçenden soň hasaplanan bolmaly:

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n) =$$

$$P(A_1)\cdot P_{A1}(A_2)\cdot P_{A1A3}(A_3)\ldots P_{A1A2\ldots An-1}(A_n).$$

Bu ýerde $P_{A1A2\ldots An-1}(A_n)$ – $A_n$ wakanyň $A_1A_2\ldots A_{n-1}$ wakalar bolup geçenden soň hasaplanan ähtimallykdyr.

Hususy halda üç sany A, B, C garaşly (özara bagly) wakalar üçin aşakdaky ýaly ýazyp bolýar

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C).$$

Mysal. Gapda 5 sany ak, 4 gara, 3gök şar bar. Gapdan tötäni ýagdaýda 3 şar çekip alynýar. Çykarylan şarlar yzyna gaýtarylmaýar. Onda birinji synagda ak şaryň (A-waka), ikinji synagda gara şaryň (B-waka), üçünji synagda gök şaryň (C-waka), ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly ?

Çözülişi. Şerte görä $P(A)=\frac{5}{12}$, $P_A(B)=\frac{4}{11}$, $P_{A\cup B}(C)=\frac{3}{10}$ bolar. Onda gözlenýän ähtimallyk formula görä

$$P(ABC)=P(A)P_A(B)P_{AB}(C)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{22}$$

bolar.

## Sygyşýan wakalaryň ähtimallyklaryny goşmak.

Goý A we B sygyşýan wakalar bolsunlar, şonuň ýaly-da ol wakalaryň we olaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallyklary belli bolsun. Onda (A+B) wakanyň, ýagny A ýa-da B wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny nähili tapmaly ?

Bu soraga aşakdaky teorema jogap berýär.

Teorema: Iki sany sygyşýan wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy, şol wakalaryň ähtimallyklarynyň jeminden olaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygynyň aýratynlygyna deňdir, ýagny

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

Subudy: Şerte görä A we B wakalar sygyşýan, onda (A+B) wakanyň ýüze çykmagy üçin 3 sany sygyşmaýan $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ we AB wakalaryň biri ýüze çykmaly. Onda sygyşmaýan wakalar üçin goşmak teoremasy esasynda

$P(A+B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB)$ ( 1 )

Bolar. Eger $A\overline{B}$ ýa-da AB wakalaryň biri ýüze çyksa, onda A waka hem ýüze çykýar. Onda goşmak teoremasy esasynda

$P(A)=P(A\overline{B})+P(AB)$

Bu ýerden

$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$ ( 2 )

Şonuň ýaly hem

$P(B)=P(\overline{A}B)+P(AB)$

Bu ýerden

$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$ ( 3 )

Şeýlelikde (2) we (3) (1) deňlige goýup alarys

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ ( 4 )

Bellik: Eger A we B özara bagly däl bolsalar

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$.

Bellik 2: Eger A we B özara bagly bolsalar

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot PA(B)$ ( 5 )

Şonuň ýaly-da, eger A we B sygyşmaýan wakalar bolsalar, onda olaryň bilelikde ýüze çykmagynyň ähtimallygy $P(AB)=0$ bolar, onda

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

Diýmek (5) formula sygyşýan we sygyşýan däl wakalar üçin dogrudyr.

Mysal. Atyşykda birinji we ikinji atyjynyň nyşana degmegiň ähtimallygy degişlilikde p1=0,7;p2=0,8 bolsun. Bir bada atylanda, iň bolmanda biriniň nyşana degmegiň ähtimallygyny tapmaly ?

Çözlüşi. $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0,78\cdot 0,8=0,56$

Onda

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,7+0,8-0,56=0,94.$

## Doly ähtimallygyň formulasy.

Eger-de A waka, diňe sygyşmaýan we doly topary emele getirýän $B_1$, $B_2$…, $B_n$ wakalaryň biri ýüze çykanda ýerine ýetýän bolsa, şonuň ýaly hem $B_1$, $B_2$…, $B_n$ wakalaryň hem-de A – wakanyň şertli ähtimallyklary, ýagny $P(B_1)$, $P(B_2)$…$P(B_n)$ we $P_{B1}(A)$, $P_{B2}(A)$,…, $P_{Bn}(A)$ belli bolsa, onda A wakanyň ähtimallygy $B_1$, $B_2$…, $B_n$ wakalaryň ähtimallyklarynyň A – wakanyň degişli şertli ähtimallyklaryna köpeltmek hasylynyň jemine dendir, onda A wakanyň ähtimallygyny hasaplamak üçin goşmak teoremasyndan peýdalanyp alarys:

$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{Bn}(A)$.

ýa-da

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{Bi}(A)$$

Bu formula doly ähtimallygyň formulasy diýilýär.

Subudy. Şerte görä $B_1,B_2,...,B_n$ sygyşmaýan wakalar. A wakanyň ýüze çykmagy üçin $B_1A,B_2A,...,B_nA$ wakalaryň haýsy-da bolsa biri ýüze çykmaly

$P(A)=P(B_1A)+P(B_2A)+P(B_3A)+...+P(B_nA)$

Bu ýerde goşmak teoremasyndan peýdalandyk. Indi bagly bolan wakalar üçin goşulyjylaryň her birine köpeltmek teoremasyny peýdalanyp alarys

$P(B_1A)=P(B_1)P_{B1}(A)$, $P(B_2A)=P(B_2)P_{B2}(A)$,..., $P(B_nA)=P(B_n)P_{Bn}(A)$

Şeýlelikde aşakdaky formulany alarys

$PA)=P(B_1)P_{B1}(A)+P(B_2)P_{B2}(A)+...+P(B_n)P_{Bn}(A)$

Mysal. Detalyň iki toplumy bar. 1-nji toplumdan alnan detalyň hiliniň gowylygynyň ähtimallygy 0,8-e deň, 2-nji üçin bolsa 0,9. Islendik toplumdan alnan islendik detalyň gowy hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözlüşi. Goý A waka detalyň hiliniň gowydygyny aňladýan bolsun. $B_1$ wakak şol detalyň birinji toplumdan alnandygy, $B_2$ waka bolsa ikinji toplumdan alnandygyny aňladýan bolsun. Onda

$$P(B_1) = \frac{1}{2}, \quad P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

Birinji toplumdan gowy detal alnandygyny aňladýan şertli ähtimallyk $P_{B1}(A)=0,8$

Şonuň ýaly-da $P_{B2}(A)=0,9$.

Onda doly ähtimallygyň formulasy esasynda

$P(A)=P(B_1)P_{B1}(A)+P(B_2)P_{B2}(A)=0,5*0,8+0,5*0,9=0,85$.

## Gipotezanyň ähtimallygy. Beýesiň formulasy.

Goý A waka doly topary emele getirýän $B_1,B_2,...,B_n$ sygyşmaýan wakalaryň biri ýüze çykanda ýerine ýetýän bolsun. Emma öňünden şol $B_1,B_2,...,B_n$ wakalaryň haýsynyň ýüze çykjakdygy belli däl, şonuň üçin hem olara çaklama diýilýär. A wakanyň ähtimallygy doly ähtimallygyň formulasy bilen hasaplanýar. Onda $B_1,B_2,...,B_n$ wakalaryň şertli ähtimallyklaryny ýagny $P_A(B_1),P_A(B_2),...,P_A(B_n)$ ähtimallyklary nähili tapmaly ?

Ilki bilen $P_A(B_1)$- şertli ähtimallygy tapalyň.

Şonuň üçin ähtimallygyň köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp tapýarys

$$P(AB_1)P(A)=P_A(B_1) \text{ ýa-da } P(AB_1)=P(B_1)P_{B1}(A)$$

Soňky iki deňlikden

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B1}(A)}{P(A)}$$ - formulany alarys.

Şonuň ýaly-da

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)P_{B2}(A)}{P(A)}.$$

Şeýlelikde

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{Bi}(A)}{P(B_1)P_{B1}(A)+P(B_2)P_{B2}(A)+...+P(B_n)P_{Bn}(A)}$$

ýa-da

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{Bi}(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P_{Bi}(A)} \qquad (i=\overline{1,n})$$

Bu formula Beýesiň formulasy diýilýär. Ol 1764ý. iňlis alymy Beýes tarapyndan ilkinji gezek açylýar.

Mysal. Priboryň döwülmegi (A waka) 3 sany sebäpleriň birinden bolmagy mümkin olary $B_1,B_2,B_3$ diýip belleýäris. Olaryň ähtimallyklary äýry-aýrylykda berlen bolsun, ýagny $P(B_1)$,=0,7; $P(B_2)=0,2$; $P(B_3)=0,1$.

Şu sebäpleriň barlygynda priboryň döwülmegi aşakdaky ähtimallyk bilen bolup geçýär $P_{B1}(A)=0,1$; $P_{B2}(A)=0,2$; $P_{B3}(A)=0,99$. Priboryň döwülendigi belli bolsa, onda $P_A(B_1)$, $P_A(B_2)$, $P_A(B_3)$ ähtimallyklary tapmaly ?

Çözülişi. Beýesiň formulasyndan peýdalanyp tapýarys

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B1}(A)}{P(B_1)P_{B1}(A)+P(B_2)P_{B2}(A)+P(B_3)P_{B3}(A)}=$$

$$=\frac{0,7\cdot 0,1}{0,7\cdot 0,1+0,2\cdot 0,2+0,1\cdot 0,99}=\frac{7}{13}$$

Şonuň ýaly-da

$$P_A(B_2)=\frac{0,2\cdot 0,2}{0,13}=\frac{4}{13}$$

$$P_A(B_3)=\frac{0,1\cdot 0,99}{0,13}=\frac{0,099}{0,13}=\frac{1}{13}.$$

## Tötän ululyklar we olaryň görnüşleri.

1. Diskret we üznüksiz tötäni ululyklar.

Tötäni ululyklar ähtimallyk teoriýasynyň esasy düşünjeleriniň biridir.

**Kesgitleme**: Synagyň netijesinde şol ýa-da başga bahany alýan ululyga tötäni ululyk diýilýär. Synagyň netijesinde tötäni ululygyň haýsy bahany aljakdygy öňünden belli däl (näbelli).

Tötäni ululyk öwrenilende ilki bilen gyzyklandyrýan zat, ol hem onuň mümkin bolan köp bahalary, ýagny ol tükenikli sanlaýň köplügi bolup biler.

Tötäni ululyklar esasan iki bölege bölünýärler:

a) Diskret tötäni ululyk.
b) Üznüksiz tötäni ululyk.

Eger tötäni ululygyň mümkin bolan bahalary tükenikli sanlaryň köplügini düzýän bolsa (meselem bütin sanlaryň köplügi), onda onuň ýaly tötän ululyklara diskret tötän ululyklar diýilýär.

Meselem. 100 sany täze dogan çaganyň içinde oglanlaryň sany. Ol tötän ululykdyr; onuň mümkin bolan alyp biljek bahalary 0,1,2,...,100.

Eger käbir tükenikli ýa-da tükeniksiz aralykda (ýa-da san okynyň kesiminde) hemme bahalary alyp bilýän ulylyga üznüksiz tötäni ulylyk diýilýär.

Meselem. Elektrik lampasynyň kemçiliksiz işleýän wagty [0,T].

Bu ýerde T elektrik lampanyň maksimal işleýän wagtyny aňladýar. Tötän ululyklar uly X,Y,Z, ýa-da $\xi,\eta,\chi,\tau$ we ş.m. harplar bilen bellenilýär. Emma olaryň alyp bilýän mümkin bolan bahalaryny $x_1,x_2,x_3,...$ diýip belleýärler.

## Tötän ulylygyň ähtimallygynyň paýlanyş kanuny.

Diskret tötän ulylygyň berilmegi üçin onuň diňe hemme mümkin bolan, alýan bahalaryny we onuň ähtimallyklaryny görkezmek gerekdir.

Diskret tötän ulylygyň hemme mümkin bolan, alýan bahalarynyň we olaryň degişli ähtimallygynyň arasyndaky arabaglanyşyga şol tötän ulylygyň paýlanyş kanuny diýilýär. Adatça diskret tötän ulylygyň paýlanyş kanuny aşakdaky tablisa gönüşde berilýär

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ***X*** | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
| **P** | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

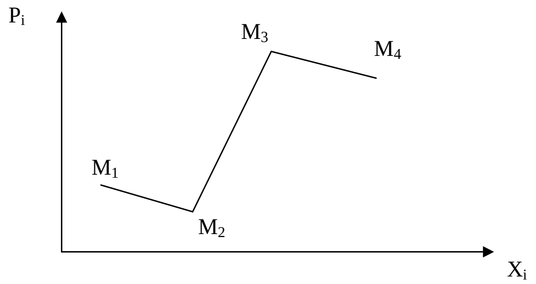
Tablisanyň birinji hatarynda, tötän ulylygyň alýan bahalary, ikinji hatarda bolsa onuň degişli ähtimallyklary ýerleşdirilendir.

Şu ýerde $X=x_1$, $X=x_2$, ... , $X=x_n$-wakalar doly topary düzýän wakalardyr. Şonuň üçin hem

$$p_1 + p_2 + ... + p_n. = 1, \quad \text{ýa-da} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Diskret tötäni ulylygyň mümkin bolan, alýan bahalary we onuň ähtimallyklary şol tötäni ulylygyň paýlanyş kanunyny doly häsiýetlendirýär.

Diskret tötäni ulylygyň paýlanyş kanunyny grafiki hem şekillendirip bolar. Onuň üçin göniburçly koordinatalar ulgamsynda $M_1(x_1,p_1)$, $M_2(x_2,p_2)$, ... , $M_n(x_n,p_n)$ nokatlary gurýarys.




Integral paýlanyş funksiýasy.

Belli bolşy ýaly, diskret tötäni ulylygy, ol ulylygyň mümkin bolan bahalary $x_1, x_2, ..., x_n$ we degişli ähtimallyklarynyň $p_1, p_2, ..., p_n$ üsti bilen bermek mümkin.

Üznüksiz tötäni ulylygy ol ulylygyň mümkin bolan bahalarynyň we oňa degişli bolan ähtimallyklarynyň üsti bilen bermek mümkin däl.

Goý x hakyky san bolsun. X tötäni ulylygyň x-dan kiçi bahalary kabul edýändiginiň, $(X<x)$ wakanyň ähtimallygy, x görä funksiýa bolar, ony F(x) diýip belleýäris. Onda $P\{X<x\}=F(x)$ bolar.

Bu F(x) funksiýa ähtimallygyň integral paýlanyş funksiýasy diýilýär. Eger F(x) üznüksiz bolsa, onda X tötäni ulylyk üznüksizdir.

2. Integral paýlanyş funksiýanyň häsiýetleri.

1) Paýlanyş funksiýanyň bahalary [0,1] kesimiň içindedir, ýagny

$$\mathbf{0 \le F(x) \le 1.}$$

2) F(x) kemelmeýän funksiýadyr, ýagny $F(x_2) \ge F(x_1)$ eger-de $x_2 > x_1$.

Subudy. Goý $x_2 > x_1$ bolsun. $(X<x_2)$ diýen (wakany) tassyklamany 2 sany sygyşmaýan waka hökmünde seredip bolar.

a) $(X<x_1)$ wakanyň ähtimallygy $P(X<x_1)$;

b) $(x_1 \le X < x_2)$ wakanyň ähtimallygy $P(x_1 \le X < x_2)$. Bu wakalar sygyşmaýan wakalardyr. Şonuň üçin goşmak teoremasy esasynda $P(X<x_2)=P(X<x_1)+P(x_1 \le X < x_2)$

Onda bu ýerden

$P(x_1 \le X < x_2)=P(X<x_2)-P(X<x^1)$

ýa-da $P(x_1 \le X < x_2)=F(x_2)-F(x_1)$

emma $F(x_2)-F(x_1) \ge 0$ ýa-da $F(x_2) \ge F(x_1)$.

a) Eger X tötäni ulylyk (a,b) aralykda baha alýan bolsa, onda

$$P(a \le X < b)=F(b)-F(a).$$

Mysal. X tötäni ulylygyň integral funksiýasy berlen:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger } x \le -1, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, & \text{eger } -1 \le x \le 3, \\ 1, & \text{eger } x > 3. \end{cases}$$

Synagyň netijesinde X tötäni ulylygyň (0,2) interwalda baha alýandygynyň ähtimallygyny tapmaly.

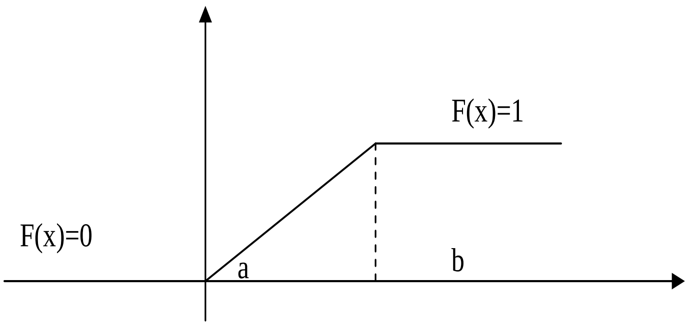
$$P\{0 < X < 2\} = F(2) - F(0) = \left(\frac{1}{4} * 2 + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} * 0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2};$$

$$P\{0 < X < 2\} = \frac{1}{2}.$$

b) Eger X tötäni ulylygyň alýan bahalary (a,b) aralyga degişli bolsa, onda (X≤a) wakanyň ähtimallygy nula deňdir, (X>b) wakanyň ähtimallygy bolsa bire deňdir, ýagny

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{eger} \quad x \le a,\\ 1, & \text{eger} \quad x > b.\end{cases}$$

Integral funksiýanyň grafigi.
Eger x≤a bolsa grafigiň ordinatasy nula deňdir, eger x>b bolsa, onda grafigiň ordinatasy bire deňdir. Ol grafik aşakdaky ýaly bolar




P(a≤X<b)=F(b)-F(a).

Mysal. X tötäni ulylygyň integral funksiýasy berlen:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{eger} \quad x \le -1,\\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}, & \text{eger} \quad -1 \le x \le 3,\\ 1, & \text{eger} \quad x > 3.\end{cases}$$

Synagyň netijesinde X tötäni ulylygyň (0,2) interwalda baha alýandygynyň ähtimallygyny tapmaly.

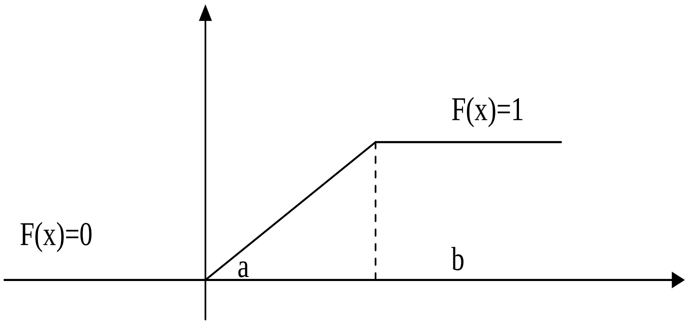
$$P\{0 < X < 2\} = F(2) - F(0) = \left(\frac{1}{4}*2+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}*0+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2};$$

$$P\{0 < X < 2\} = \frac{1}{2}.$$

b) Eger X tötäni ulylygyň alýan bahalary (a,b) aralyga degişli bolsa, onda (X≤a) wakanyň ähtimallygy nula deňdir, (X>b) wakanyň ähtimallygy bolsa bire deňdir, ýagny

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{eger} \quad x \le a,\\ 1, & \text{eger} \quad x > b.\end{cases}$$

Integral funksiýanyň grafigi.
Eger x≤a bolsa grafigiň ordinatasy nula deňdir, eger x>b bolsa, onda grafigiň ordinatasy bire deňdir. Ol grafik aşakdaky ýaly bolar




Üznüksiz tötän ulylygyň paýlanyşynyň differensial funksiýasy.

Kesgitleme. Integral funksiýanyň 1-nji tertipli önümine, şol üznüksiz tötän ululygyň sifferensial funksiýasy diýilýär we ol f(x) bilen belgilenýär, ýagny

$$F^{I}(x)=f(x).$$

Bu deňlikden görnüşi ýaly F(x) integral funksiýa, f(x) differensial funksiýanyň asyl funksiýasydyr. Differensial funksiýa f(x)-a ähtimallygyň dykyzlygy hem diýilýär.

<u>Differensial funksiýanyň häsiýtleri.</u>

1) Üznüksiz X tötän ulylygyň (a,b) aralkdaky baha alýandygynyň ähtimallygy aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx.$$

2) Eger f(x) belli bolsa, onda F(x) aşakdaky formula boýunça tapylýar

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

3) Differensial funksiýa otrisatel däldir: $f(x)\geq 0$.

4) Differensial funksiýadan -∞-den +∞ çenli alnan hususy däl integral bire deňdir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

## Tötäni ulylyklaryň san hrekteristikalary we olaryň häsiýetleri.

<u>1. Tötäni ulylygyň san harakteristikasy,</u>

Bize belli bolşy ýaly, tötäni ulylygyň paýlanyş kanuny ony doly häsiýetlendirýär. Ýöne köp halatlarda paýlanyş kanuny belli däl, şonuň üçin hem tötäni ulylyk barada az maglumatlar bilen çäklenmeli bolýar. Käbir halatlarda bolsa, tötäni ulylygy jem görnüşde häsiýetlendirýän sanlary ulanmaly bolýar. Ol sanlara tötäni ulylygyň san harakteristikasy diýilýär.

San harakteristikalaryň möhümleriniň biri hem, matematik garaşmadyr. Matematik garaşma tötäni ulylygyň takmynan orta bahasyna dňdir. Köp meseleler çözülende onuň matematik garaşmasyny bilmek ýeterlikdir.

**<u>Kesgitleme</u>**. Diskret tötäni ululygyň hemme mümkin bolan bahalaryň, onuň degişli ähtimallyklaryna köpeltmek hasylynyň jemine, şol tötäni ululygyň matematik garaşmasy diýilýär.

Goý X tötäni ululygyň alýan bahalary $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ bolsun, olaryň degişlilikde ähtimallyklary $p_1,p_2,p_3,...,p_n$ bolsun. Onda X tötäni ululygyň matematik garaşmasy – MX (ol MX bilen bellenilýär) aşakdaky deňlik bilen kesgitlenýär :

$$MX = x_i p_i + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (1)$$

Matematik garaşma – MX hemişelik sandyr.

**Mysal**. X – tötäni ululygyň paýlanyş kanuny aşakdaky tablisa bilen berlen:

| X | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|
| P | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

Onuň matematik garaşmasyny tapmaly.

**Çözülişi.** MX=3*0.1+2*0.6+1*0.3=0.3+1.2+0.3=1.8

Matematik garaşmanyň häsiýetleri.

1) Hemişelik sanyň matematik garaşmasy` şol sanyň özüne deňdir, ýagny MC=C.
2) Hemişelik sany matematik garaşma alamatynyň daşyna çykaryp ýazyp bolýar, ýagny

M(CX)=C*MX

3) Özara bagly däl X we Y tötäni ululyklaryň köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny

M(X*Y)=MX*MY

**Subudy**: Goý X we Y tötäni ululyklaryň paýlanyş kanunlary aşakdaky tablisa görnüşde berlen bolsun

| X | $x_1$ | $x_2$ | | Y | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | $p_1$ | $p_2$ | | q | $q_1$ | $q_2$ |

Onda (XY) tötäni ulylygyň mümkin bolan bahalary $x_1y_1$ $x_2y_2$ $x_2y_1$ $x_1y_2$ $x_2y_2$ bolar, şeýlelikde onuň paýlanyş kanuny aşakdaky ýaly bolar.

| **XY** | $x_1y_1$ | $x_2y_1$ | $x_1y_2$ | $x_2y_2$ |
|---|---|---|---|---|
| Pq | $p_1q_1$ | $p_2q_1$ | $p_1q_2$ | $p_2q_2$ |

Şeýlelikde
$M(XY)=x_1y_1p_1q_1+x_2y_1p_2q_1+x_1y_2p_1q_2+x_2y_2p_2y_2=y_1q_1(x_1p_1+x_2p_2)+y_2q_2(x_1p_1+x_2p_2)=(x_1p_1+x_2p_2)(y_1q_1++y_2q_2)=MX\cdot MY$

Şonuň ýaly

$$M(X_1\cdot X_2\cdot ...\cdot X_n)=MX_1\cdot MX_2\cdot ...\cdot MX_n.$$

Iki sany X we Y tötäni ulylygyň jeminiň matematik garaşmasy, şol tötäni ulylyklaryň matematik garaşmalarynyň jemine deňdir, ýagny

$$M(X\pm Y)=MX\pm MY.$$

Şonuň ýaly hem

$$M(X_1\pm X_2\pm ... \pm X_n)= MX_1\pm MX_2\pm ...\pm MX_n.$$

Diskret tötäni ulylygyň matematik garaşmasynyň ähtimallyk garaşmasynyň ähtimallyk manysy aşakdakydan durýar. Goý X tötäni ulylyk $x_1,x_2,...,x_n$ bahalary alýan bolsun, şol bahalaryň orta arifmetik sany $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$ bolsun.

Ähtimallyk manysy n uly böldügyça M(X) matematik garaşma orta arifmetik baha örän ýakyn bolýar we şol sebäbe görä matematik garaşma, tötäni ulylygyň orta arifmetik bahasy diýilýär. Ýene-de bellemeli zat, matematik garaşma tötäni ulylygyň häsiýetlerini häsiýetlendirýän sandyr. Başgaça aýtsak synagyň netijesinde alnan bahalaryň durnukly orta arifmetik sanydyr.

### Diskret tötän ulylygyň dispersiýasy we onuň häsiýetleri.

Dürli mümkin bolan bahalary alýan, emma bir meňzeş matematiki garaşma eýe bolýan tötäni ulylyklara duş gelýäris.

Meselem. X we Y tötäni ulylyklaryň paýlanyş kanunlary tablisa görnüşde berilipdir:

| **X** | **-5** | **5** |
|---|---|---|
| P | 0.5 | 0.5 |

| **Y** | **-100** | **100** |
|---|---|---|
| p | 0.5 | 0.5 |

Matematik garaşmasyny tapalyň

MX=-5*0.5+5*0.5=0

MY=-100*0.5+100*0.5=0

Bu ýerde iki tötäni ulylygyň hem matematik garaşmasy birmeňzeş. Matematik garaşma tötäni ulylygy doly häsiýetlendirip bilmeýär. Bu ýagdaýda tötäni ulylygyň beýleki san harakteristikalaryndan peýdalanmak gerek bolýar.

Onuň ýaly san harakteristika hem dispersiýadyr.

Dispersiýa geçmezden öňürti tötäni ulylygyň özüniň matematik garaşmasyndan gyşarmasyna seredeliň.

1) Tötän ulylygyň özüniň matematik garaşmasyndan gyşarmasy.

Goý X- tötän ulylyk, MX- onuň matematik garaşmasy. Onda (X-MX) tapawudy (täze) başga tötän ulylyk görnüşinde seredeliň. Ol tötän ulylygyň paýlanyş kanuny aşakdaky ýalydyr:

| X-MX | $x_1$-MX | $x_2$-MX | ........ | $x_n$-MX |
|---|---|---|---|---|
| P | $p_1$ | $p_2$ | ..... | $p_n$ |

(X-MX) garaşmanyň matematik garaşmasy nula deňdir, ýagny

M(X-MX)=MX-M(MX)=MX-MX=0.

### Dispersiýa we onuň häsiýetleri.

Kesgitleme. X tötäni ulylygyňözininiň matematik garaşmasyndan gyşarmasynyň kwadratynyň matematik garaşmasyna şol X tötäni ulylygyň dispersiýasy diýilýär we ol şeýle bellenýär:

$$D\overline{X} = M\left[\overline{X} - M\overline{X}\right]^2 \qquad (1)$$

Eger $\overline{X}$ tötäni ulylygyň paýlanyş kanuny

| **X** | $x_1$ | $x_2$ | ..... | $x_k$ | ..... |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $p_1$ | $p_2$ | ..... | $p_k$ | ..... |

Bolsa, onda $(X\text{-}MX)^2$ tötäni ulylygyň paýlanyş kanuny aşakdaky ýaly bolar

| **$(X\text{-}MX)^2$** | $(x_1\text{-}MX)^2$ | $(x_2\text{-}MX)^2$ | ..... | $(x_k\text{-}MX)^2$ | ..... |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $p_1$ | $p_2$ | ..... | $p_k$ | ..... |

Diýmek, onda matematik garaşmanyň kesgitlemesinden

$$DX = M[X - MX]^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - MX)^2 \cdot P_k \qquad (2)$$

Dispersiýany hasaplamak üçin köplenç aşakdaky (3) formulany peýdalanýarlar

$$DX = \sum_k (x_k - MX)^2 \cdot p_k = \sum \left(x_k^2 - 2x_k \cdot MX + (MX)^2\right) p_k = \sum_k x_k^2 - p_k - 2MX \cdot$$

$$\cdot \sum_k x_k p_k + (MX)^2 \cdot \sum p_k = \sum_k x_k^2 \cdot p_k - 2MX \cdot MX + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2$$

ýagny

$$DX = MX^2 - (MX)^2 \qquad (3)$$

Bu ýerde

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **$X^2$** | $x_1^2$ | $x_2^2$ | ..... | $x_k^2$ | ..... |
| P | $p_1$ | $p_2$ | ..... | $p_k$ | ..... |

Diýmek

$$x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + ..... + x_k^2 \cdot p_k = \sum_k x_k^2 \cdot p_k = MX^2.$$

Dispersiýanyň käbir häsiýetleri.

1) Hemişelik ulylygyň dispersiýasy nula deňdir. Hakykatdanda

$$DC = M[C - MC]^2 = M(C - C)^2 = M0 = 0.$$

2) C=const bolsa

$$DCX = C^2 \cdot DX.$$

Dogrydanda

$$DC = M[CX - M(CX)]^2 = M(C(X - MX)]^2 = C^2 \cdot M[X - MX]^2 = C^2 \cdot DX.$$

3) D(X+Y)=DX+DY. (eger X we Y garaşsyz bolsalar).

4) D(X-Y)=DX+DY.

5) D(X·Y)=DX·DY

Eger-de MX=0, MY=0, ýagny X we Y merkezleşdirilen tötäni ulylyklar bolsalar.

## Orta kwadratik gyşarma.

Kesgitleme. X tötäni ulylygyň dispersiýasyndan alnan kwadrat köke şol X tötäni ulylygyň orta kwadratik gyşarmasy diýilýär we ol şeýle bellenilýär

$$\sigma(X) = \sqrt{DX}.$$

## Üznüksiz tötän ulylyklaryň san harakteristikalary.

Belli bolşy ýaly diskret tötäni ulylygyň matematik garaşmasy

$$MX = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_k \cdot p_k + ... = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k$$

formula boýunça hasaplanýar. Emma üznüksiz tötäni ulylyk üçin matematik garaşma aşakdaky formula boýunça hasaplanýar:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \qquad (1)$$

ýagny X tötäni ulylygyň mümkin bolan alýan hemme bahalary x okunyň doly üstünde ýatýan bolsa, eger-de X tötäni ulylygyň alýan bahalary (a,b) interwalda ýatýan bolsa, onda

$$MX = \int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

Şuňa meňzeşlikde üznüksiz tötäni ulylygyň dispersiýasy, aşakdaky formula boýunça kesgitlenýär:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x)dx \qquad (3)$$

Hususy ýagdaýda

$$DX = \int_a^b (x - MX)^2 f(x)dx \qquad (4)$$

Diskret tötäni ulylykdaky ýaly dispersiýadan alnan kwadrat köke orta kwadratik gyşarma diýilýär, ýagny $\sigma(X) = \sqrt{DX}$.

Bellik 1. Matematik garaşma we dispersiýanyň diskret tötäni ulylyk üçin berlen häsiýetleri bu ýerde hem saklanýar.

Bellik 2. Dispersiýany hasaplamak üçin

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [MX]^2$$

ýa-da

$$DX = \int_a^b x^2 f(x)dx - [MX]^2$$

formulalary getirip çykarmak kyn däldir.

## Ulgamyň EHM-de statistiki modelirlenilmesini gurnamak

### Ulgamyň statistiki modelirlenilme usulynyň umumy häsýetnamasy.

Maşyn modellerini gurmakda we amala aşyrmakda ulgamy dermegiň we taslamagyň etabynda tötänleýin sanlary ulanmaklyga, ýagny ähtimallyklaryň berlen paýlanmasy bilen käbir tötänleýin ullulyklaryň mümkin bolan ähmiýetine esaslanýan statistiki synaglaryň usuly giňden ulanylýar. Statistiki modelirleme özünde modelirlenilýän ulgamda bolup geçýän, proses baradaky statiki berilenleri EHM kömegi bilen almagyň usulyny saklaýar.

Daşky gurşawnyň täsiriniň E hasaby bilen modelirlenilýän ulgamyň häsýetlerini bahalandyrmagyň bildirilýän gyzyklanmasyny almaklyk üçin statistiki berilenler işlenilip bejerilýär we matematiki statistika usullaryny ulanmaklyk bilen klassifisirlenilýär .

Şeýlelik bilen statistiki modelirleme usulynyň manysy, derňelýän ulgamyň S funksionirleme prosesi üçin tötänleýin giriji täsirlenmeleriň we daşky gurşawnyň täsiriniň hasaby bilen ulgamyň elementleriniň özlerini alyp barşyny täsirini imitirleýji, käbir modelirleýji algoritmi gurmaklykda we EHM meýilnamaly – tehniki serişdelerini ulanmaklyk bu algoritmik amala aşyrmasynda jemlenýär.

Statistiki modelirleme usulyny , ulanmaklygyň iki oblastyny tapawutlandyrýarlar:

1) Stohastiki ulgamy öwrenmeklik üçin
2) Determenirlenen meseleleri çözmeklik üçin

Statistiki modelirleme usuly bilen determenirlenen meselesini çözmeklik üçin ulanylýan esasy pikir , dementirlenen meseläni käbir stohastiki ulgamyň ekwiwalentli shemasy bilen çalyşmaklyk bolup durýar, soňkynyň çykyjy häsiýetnamalary dementirlenen meseläni çözmegiň netijesi bilen gabat gelýär. Elbetde , çalyşylmada meseläni takyk çözmegiň ýerine takmyny çözgüt alynýar we ýalňyşlyk synaglaryň sanynyň ulanmagy bilen kemelýär.

Ulgamy S statistiki modelirlemegiň netijesinde statistiki işlenilip bejerilmesi hakyky obýektiň özüni, alyp barşy ýa-da wagtyň erkin pursatlaryndaky prosess barada maglumat almaga mümkinçilik berýär, funksiýasynyň ýa-da gözlenilýän ululygyň hususy ähmiýetleriniň seriýasy emele gelýär. Eger amala aşyrmaň mukdary N ýeterlikli ýokary bolsa, onda ulgamy modelirlemegiň alynan netijeleri statistiki durnuklylyga eýe bolýarlar we ýeterlikli takyklyk bilen ulgamy S funksionirlemek prosessiniň gözlenilýän häsýetnamalarynyň bahasy hökmünde kabul edilip biliner.

## Emeli tötänleýin sanlar we olaryň maşynly generasiýasynyň proseduralary.

Ulgamy statistiki modelirlemekde esasy meseleleriň birisi stohastiki täsirlenmeleri hasaba almak bolup durýar. EHM-da modelirlenýän algoritmiň amala aşyrylmagynda ulgamy S funksionirlemek prosesiniň häsiýetnamasyna statistiki durnukly bahany almak üçin ulanylýan, tötänleýin sanlaryň mukdary, modelirleme netijeleriniň zerur bolan takyklygy we ynamlylygyndan , bahalandyrylýan häsiýetnamaryň görnüşinden, modelirleme obýektiniň klassyndan baglylykda ýeterlikli giň çäklerde aýlanýar. EHM – da statiki modelirleme usuly üçin operasiýalary köp sany häsiýetlidir, muňa degişlilikde bolsa maşynly wagtyň uly bölegi tötänleýin sanlar bilen täsirlenmä harçlanylýar. Mundan başga-da, statistiki modelirlemäň netijeleri tötänleýin sanlaryň başdaky (bazaly) yzygiderlikleriň hilinden düýpli baglydyr. Şonuň üçinem tötänleýin sanlaryň yzygiderlikleriniň talap edilýän hilde gärnüşe getirilmeginiň ýönekeý we ykdysady usullarynyň bolmagy ulgamy maşynly modelirlenmesini tejribe taýdan ulanmaklyk mümkinçiligini köplenç kesgitleýär.

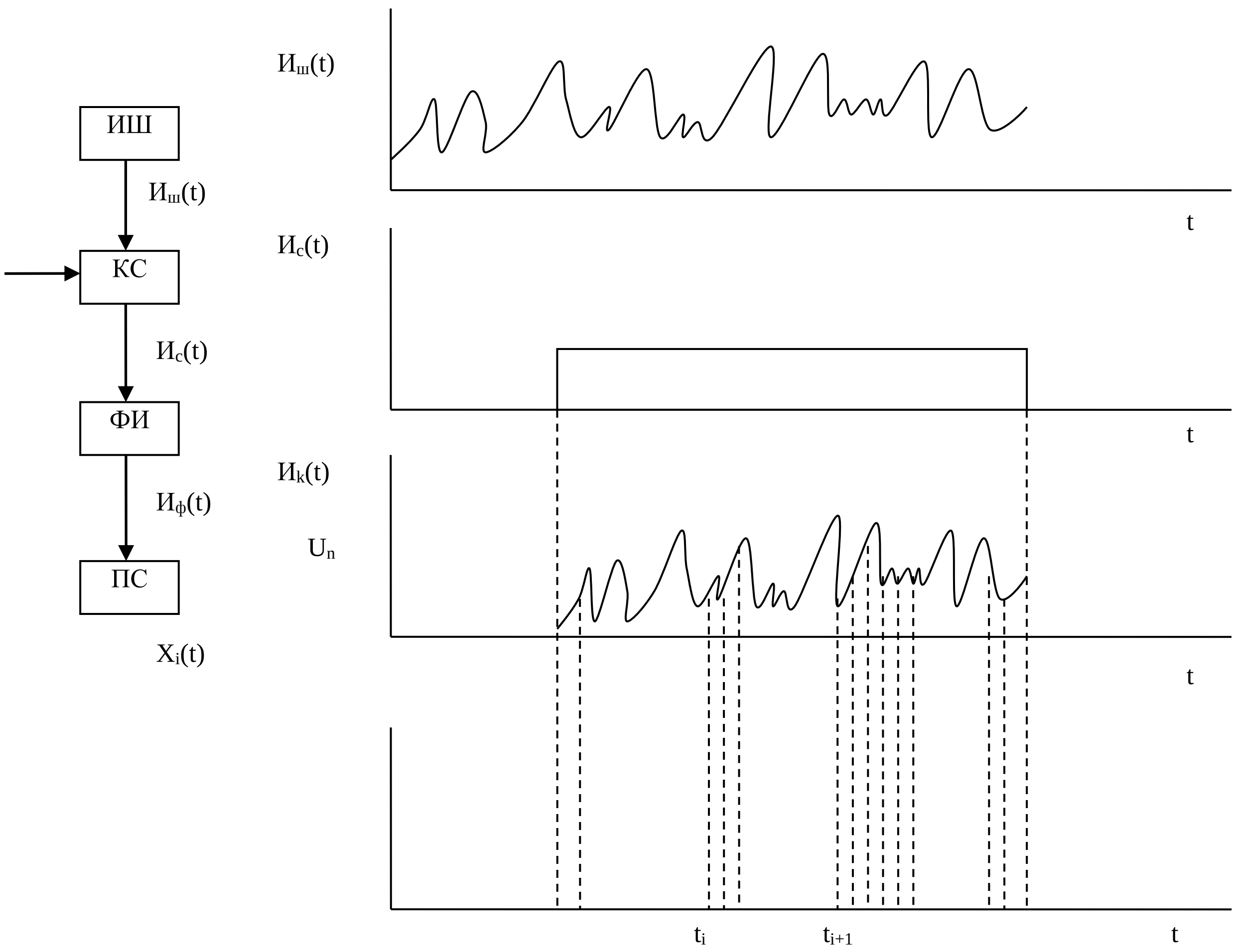
EHM-de ulgamy statistiki modelirlemekde tötänleyin sanlaryň yzygiderliliklerini almagyň mümkinçiliklerini we aýratynlyklaryna seredeliň Tejribede tötänleýin sanlaryň generasiýasynyň üç sany esasy usuly ulanylýar;apparatly (fiziki) tablisali (faýlly) we algaritmiki (meýilnamaly). Apparatly usul. Generasiýanyň bu usulynda tötänleýin sanlar ýörite elektronly goşmaça enjamly – EHM daşky gurulmalaryň biri hökminde gulluk edýän, tötänleýin sanlaryň generatory bilen işlenilip çykarylýar. Şeýlelik bilen generasiýanyň bu usulynyň amala aşyrylmasy tötänleýin sanlaryň işläp çykarma boýunça EHM boýunça hasaplaýyş operasiýalaryny talap etmeýär, diňe daşky gurulma ýüzlenme operasiýaly zerurdyr. Sanlaryň şeýle generatorlarynyň esasynda ýatan, fiziki täsirlenme hökminde, köplenç elektronly we ýarymgeçirijili abzallardaky sesler, radioişjeň elementleriniň dargama hadysalary we ş.m. ulanylýar. Ýarymgeçirijili abzallarda sesiň täsirine meselem esaslanan, goşmaça enjamlardan tötänleýin sanlary almagyň esasyna seredeliň.

Tötänleýin sanlaryň apparatly generatorlarynyň düzülişli shemasy 4.8, a suratda getirilendir.

Bu ýerde: ИШ sesiň çeşmesi;
КС-açarly shema;

ФИ-impulslary görnüşe getiriji;
ПС-gaýtadan hasaplama shemasy.

ИШ shemada sesleriň güýçlendirilmesini 4.8, b suratda wagtlaýyn diogrammada görkezilen, tötänleýin prosess bolup durýan, ИШ (t) güşçlenme bolýar. Üstesinede КС kömegi bilen (o,t) wagt interwalynda görnüşe getirilen, $U_k(t)$ sesli amala aňyrylmaň kesimi, taşlandylaryň tötänleýin sanyny saklaýar. $U_k(t)$ güýçlenmäniň bosagaly $U_П$ bilen deňleşdirilmesi ФИ çykalgasynda $U_ф(t)$ impulslaryň seriýasyny görnüşe getirmäge mümkinçilik berýär. Onda ПС çykalgasynda tötänleýin sanlaryň yzygiderligi $X_i(t)$ alynyp biliner. Meselem , masştablaşdyrma geçirsekwe interwalyň uzynlygyny birlik üçin (0,t) kabul etsek, onda wagt interwalynyň ähmiýeti $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$ goňşy impulslaryň $U_ф(t)$ arasynda tötänleýin sanlar $X_i \in (0,1)$ bolar. Tötänleýin sanlaryň apparatly generatorlarynyň beýleki shemaly çözgütleriň bolmagy hem ahmaldyr ýöne tötänleýin sanlary almagyň apparatly usuly EHM- da ulgamy S modelirleme wagtynda yzygiderligiň hiline göniden – göni kepil geçmäge, şeýlede modelirlemede sanlaryň birmeňzeş yzygiderligini gaýtadan almaga mümkinçilik bermeýär.




Surat. Tötänleýin sanlary almagyň apparatly usuly .
Tablisali usul. Eger tablisa görnäşinde ýazgy edilen, tötänleýin sanlary, olardan öňünden degişli faýllary görnüşe getirip, EHM daşky ýa-da operatiw ýatkeşligine

ýerleşdirsek, onda bu usul tablisali diýilip atlandyrylýar. Ýöne EHM – da ulgamy modelirlemede tötänleýin , sanlary almagyň bu usulyny, tablisaleriň degerlikli uly bolmadyk göwrümlerinde we haçanda saklanyş üçin operariw ýatkeşligi ulanmak mümkin bolanda sanlaryň degişli faýlynda ulanmaklyk oňaýlydyr. Statistiki modelirleme prosesinde köplenç halatda ýüzlenişde daşky ýatkeşlikde faýly saklamaklyk oňaýly däldir. Sebäbi daşky ýygnaýja ýüzlenmäň zerurlygy sebäpli daşky ýygnaýja ýüzlenmäň zerurlygy sebäpli ulgamy S modelirlemekde maşynly wagtyň harajatynyň düýpli ulalmagyna getirýär. Faýllary gurnamagyň döwürleýin usullarynyň bolmagy hem ahmaldyr , ýagny ol haçanda operatiw ýatkeňlige bölekleýin yzygider ýazylanda. Bu daşky ýatkeşlige ýüzlenmäň wagtyny kemeldýär, ýöne ulgamy S funksionirlemek prosesini modelirlemek üçin ulanyp bolýan , operatiw ýatkeşligiň göwrümini kemeldýär.

Algoritmiki usuly

Tötänleýin sanlaryň yzygiderliklerini almagyň usuly ýörite algoritmleriniň we olaryň meýilnamalaryny amala aşyryjylaryň kömegi bilen EHM-da tötänleýin sanlary görnäşe getirmeklige esaslanandyr. Her bir tötänleýin san EHM-da ulgamy modelirlemekde zerurlyklaryň döremeginiň çägi boýunça degişli meýilnamalaryň kömegi bilen hasaplanylýar.

Tablisa1.

| Usul | Artyklygy | Kemçiligi |
|---|---|---|
| Apparatly | Sanlaryň ähtiýaçlygy çäklenmedik.<br>Hasaplaýjy maşynly operasiýalar az harçlanylýar<br>Maşynyň ýatkeşliginde ýer tutmaýar | Yzygiderli barlamak gerek bolýar. Yzygiderligi döredip bolmaýar ýörite gurulmalar ulanylýar.<br>Durnuklylygy üpjin etmek boýunça çäreler zerur |
| Tablisali | Bir gezek barlamak talap edilýär.<br>Yzygiderliligi däretmek mümkin | Sanlaryň ätiýaçlygy çäklenen.<br>Operatiw ýatkeşlikde köp ýeri tutýar ýa-da daşky ýatkeşlige ýüzlenmä wagt gerek |
| Algoritmiki | Bir gezek barlamak talap edilýär<br>Sanlaryň yzygiderligini köp gezek döretrmek mümkin<br>Maşynyň ýatkeşliginde az ýer tutýar<br>Daşky gurulmalar ulanylmaýar. | Sanlaryň yzygiderliginiň ähtiýaçlygy onuň döwri bilen çäklenen<br>Maşynly wagta düýpli harajatlar |

Üç sany agzalyp geçilen usullarynyň artyklylygy we kemçiligi deňeşdirmeklik üçin 1. tablisada berilendir.

Bu tablisaden görnüşi ýaly, tötänleýin sanlary almagyň algoritmiki usuly hemmetaraplaýyn EHM – da ulgamy modelirlemekde tejribede has oňaýlydyr.

EHM – da ulgamy modelirlemekde islendik çylşyrymlykly tötänleýin täsirlemeleriň meýilnamasy imitasiýasy, käbir standartly prosesleri generirlemeklige we olaryň indiki funksional özgerdilmesine getirilýär. Düýpli aýdylanda, bazaly höküminde takyk ulgamy S modelirlemek ýagdaýynda islendik amatly prosess kabul edilip biliner. Ýöne bazaly prosess diskretli modelirlemekde
{i}=0,1,.......,n
tötänleýin sanlaryň deňölçegli paýlanan (0,1) interwalda amala aşyrylmasyny özünde saklaýar,
$\{X_i\}=X_0,X_1,..........X_n$
sanlaryň yzygiderligi, ýa-da – statistiki terminde - ululyklaryň ähmiýetiniň (0,1) interwalda deňölçegli paýlanan baş toplumyndan gaýtadan saýlamak bolup durýar.

Üznüksiz tötänleýin ululyk (a,b) interwalda deňölçegli paýlanylşa eýedir , eger onuň dykyzlyk (surat a) we paýlanyş surat b)) funksiýalary degişlilikde aşakdaky görnüşe eýe bolsalar.

$$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), a<x\le b\\ 0, x<a, x>b;\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}(x-a)/(b-a), a\le x\le b\\ 1, x>b\end{cases}$$

Tötänleýin ululygyň , X ähmiýeti kabul edýän, sanly häsiýetnamasyny kesgitleýäris: matematiki garaşylma, dispersiýa we orta kwadratly gyşarma degişlilikde:

$$M[\xi]=\int_a^b xf(x)dx=\int_b^a xdx/(b-a)=(a+b)/2;$$

$$D[\xi]=\int_a^b (x-M[\xi])^2 f(x)dx=(b-a)^2/12$$

$$0\xi=+\sqrt{D[\xi]}=(b-a)/2\sqrt{3}$$

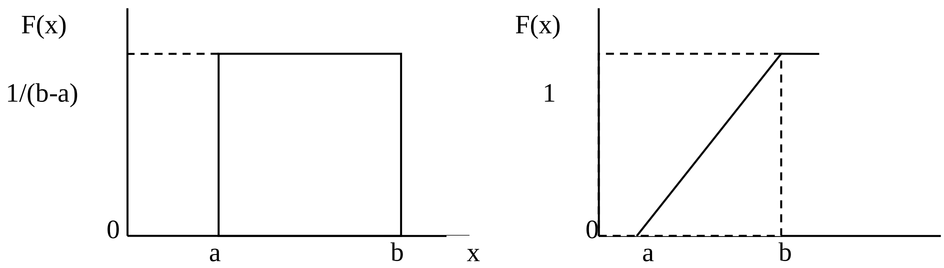
EHM-de ulgamy modelirlemekde interwalyň araçäkleri a=0 we b=1 bolanda, (0,1) interwaldaky tötänleýin sanlar bilen iş salyşmaly bolýar. Şonuň üçinem deňölçegli paýlanylşyň hususy ýagdaýyna seredeliň, haçanda dykyzlyk funksiýasy we paýlanyş funksiýasy aşakdaky görnüşe eýe bolanda:

$$f(x)=\begin{cases}1, 0\le x\le 1,\\ 0, x<0, x>1;\end{cases}$$

$$F(x) = \begin{Bmatrix} 0, x, < 0, \\ x, 0 \le x \le 1, \\ 1, x > 1 \end{Bmatrix}$$

Şeýle paýlanylma matematiki garaşylma M[&]=1/2 we dispersiýa D[&]=1/12 eýedir.

Bu paýlanylyşy EHM-da almaklyk talap edilýär. Ýöne ony sanly EHM-da almaklyk mümkin däl, sebäbi maşyn n – razrýadly sanlar bilen operirleýär. Şonuň üçinem EHM-da (0,1) interwally deňölçegli tötänleýin sanlaryň üznüksiz toplumynyň ýerine şol bir interwaldaky tötänleýin sanlaryň diskretli yzygiderligini $2^n$ ulanylýar. Şeýle yzygiderli paýlanmagyň kanunyny kwazideňölçegli paýlanma diýip atlandyrylýar.




Surat Tötänleýin ululyklaryň deňölçegli paýlanmasy.
(0,1) interwalda kwazideňölçegli paýlanylşa eýe bolan, tötänleýin ululyk &,
$P_i=1/2^n$ , $i=0,2^n-1$
Ähtimallykly $X_i=i(2^n-1)$ ähmiýeti kabul edýär.

Matematiki garaşylma we kwazideňölçegli tötänleýin ululygyň dispersiýasy degişlilikde aşakdaky görnüşe eýedir:

$$M[\xi] = \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{i}{2^n-1}\frac{1}{2n} = \frac{1}{(2^n-1)2^n}\sum i = \frac{((2^n-1)2^n)}{(2^n-1)2^n 2} = \frac{1}{2};$$

$$D[\xi] = \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{1}{2^n}\left[\frac{i}{2n-1} - \frac{1}{2}\right]^2 = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{2n-1}\left(\frac{i_2}{(2n-1)^2} - \frac{i}{2n-1} + \frac{1}{4}\right)$$

Şeýlelikde, kwazideňölçegli tötänleýin ululygyň matematiki garaşylmasy (0,1) interwaldaky deňölçegli tötänleýin yzygiderlikleriň matematiki garaşylmasy bilen gabat gelýär, dispersiýa bolsa ýeterlikli uly n bolmagynda birlige ýakyn, $(2^n+1)/(2^n-1)$ köpeldiji bilen diňe tapawutlanýar.

EHM-da diňe sanlaryň gutarnykly köplügi bilen operasiýa geçirip bolýandygyna tötänleýin sanlaryň ajaýyp yzygiderligini almaklyk mümkin däl. Mundan başga-da , & tötänleýin ululygyň X ähmiýetini almaklyk üçin formulalar (algoritmler) ulanylýar. Şonuň üçinem manysy boýunça determenirlenen bolup bolup durýan şeýle yzygiderlikleri, galp tötänleýin diýip atlandyrýarlar

EHM-da galp tötänleýin sanlaryň yzygiderliklerini almagyň takyk algoritmlerini ýazmaklyga geçmezden öňürti , ajaýyp generatorlaryň kanagatlandyrmaly bolan , talaplarynyň toplumyny görnüşe getireliň. Ajaýyp generatorlaryň kömegi bilen ajaýyp sanlaryň galp tötänleýin yzygiderlikleri bolmalydyrlar: kwazideňölçegli paýlanan sanlardan durmalydyr, statistiki garaşsyz sanlary saklamalydyr , döredijі bolmalydyr, gaýtalanmaýan sana eýe bolmalydyr, maşynly wagtyň az harajatlary bilen alynmalydyr, maşynly ýatkeşligiň kiçi göwrümli eýelemelidir.

Tejribede EHM-da modelirlemekde galp tötänleýin sanlaryň yzygiderlikleriniň generasiýasy üçin has giňden ulanylşa , aňakdaky görnüşdäki algoritmler eýe bolýarlar:

$$X_{i+1}=\Phi(X_i),$$

Ýagny başlangyç san $X_0$ we mydamalyk parametrler berilen, birinji tertipdäki rekurentli gatnaşygy özünde saklaýan.

Φ funksiýanyň görnüşine hilli talaplary kesgitleýäris. Meselem, a suratda şekillendirilen ) görnüşli funksiýanyň $X_1, X_2$,..............galp tötänleýin sanlaryň gowy yzygiderligi döredip bilmejekdigini görkezmek ýeňildir. Hakykatdan-da, eger tötänleýin sanlaryň tablisasinden meselem alynan, tötänleýin sanlar boýunça $(X_1, X_2)$ , $(X_3, X_4)$ koordinatly nokatlary gursaň , onda olar ýeke täk kwadratda deňölçegli paýlanarlar

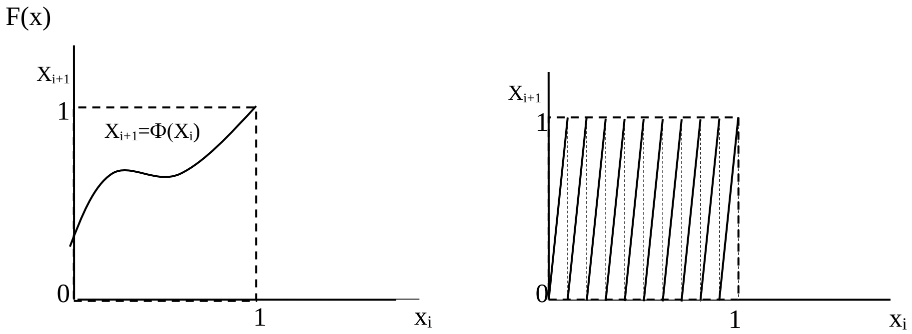
$0\le X_i\le 1$, $0\le X_{i+1}\le 1$, $(X_1, \Phi(X_2))$ , $(X_3, \Phi(X_4))$......

sanlar boýunça gurulan degişli nokatlar bolsa , $X_{i+1}=\Phi(X_i)$ garşylyk bilen çäklenen, meýdanda ýerleşýärler.

Tötänleýin sanlaryň gowy yzygiderligini diňe shemasy ýeke täk kwadratyny ýeterlikli berk dolandyrýar, $X_{i+1}=\Phi(X_i)$ funksiýa döredip biler.

Şeýle funksiýanyň mysaly, uly bütewi položitel A bolmagynda $X_{i+1}= D(AX_i)$ bolup biler, bu ýerde D(u)=U-Ц(u)-U sanyň drobly bölegi;

Ц(u)-u sanyň bitewi bölegi, ýagny u geçmeýän , has bütewi san. Goý mysal üçin A=10 bolsun, onda $X_{i+1}=\Phi(X_i)$ funksiýa 4.10, b suratda görkezilen görnüşe eýe bolar. Getirilen şert diňe zerur bolup durýar, ýöne(4,9) gatnaşygyň galp tötänleýin sanlaryň gowy yzygiderligini döretmegi üçin ýeterliksizdir.




Surat Φ funksiýanyň görnüşi:

a-kanagatlandyrmaýan ;

b-generasiýanyň talaplaryny kanagatlandyryjy .

Tejribede EHM-da ulgamy statistiki modelirlemekde ulanylşa eýe bolan , galp tötänleýin krawizodeňölçegli paýlan sanlaryň yzygiderliklerini almagyň käbir proseduralaryna seredeliň.

Galp tötänleýin sanlary almak proseduralarynyň gadymylarynyň birisi , ortalaşdyrylan kwadratlaryň usuly diýip at alan proseduradyr.

Goý 1: $X_i=0, a_1,a_2,.....a_{2n}$ kiçi , 2 – razrýadly san bar bolsun. Ony kwadrata bina edýäris : $X_i^2 =0$ , $b_1,b_2,.....b_{2n}$, soňra bolsa $X_{i+1}=0$, $b_{n+1},b_{n+2},.....b_{3n}$ orta $2_n$ razrýadlary alýarys, ýagny galp tötänleýin yzygiderlikleriň nobatdaky sany bolup durjak. Meselem , eger başlangyç san $X_0=0.2152$, onda $(X_0)^2=0.04631104$, ýagny $X_1=0.6311$, soňra

$(X_1)^2=0.39828721$, ýagny $X_2=0.8287$ we ş.m.

Bu usulyň kemçiligi – yzygiderlikleriň sanlarynyň arasynda korrelýasiýanyň bolmagy, ýagdaýlaryň hataryndan bolsa tötänlik düýbinden bolman hem biler. Meselem, eger $X_0=0.4500$, onda $(X_0)^2=0.20250000$, $X_1=0.2500$, $(X_1)^2=0.06250000$, $X_2=0.2500$, $(X_2)^2=0.06250000$, $X_3=0.2500$ we ş.m. Mundan başgada , käbir i* bolmagynda yzygiderlikleriniň döremegini görmek bolar, ýagny $X_i = 0$ $i \geq i^*$ bolmagynda. Bu ortalaşdyrylan kwadratlar usulyny ulanmak mümkinçiligini düýpli çäklendirýär.

EHM-da ulgamy modelirlemekde , esasynda bäsdeşligiň esasy düşünjesi ýatan , arifmetiki operasiýalary özünde saklaýan , galp tötänleýin yzygiderlikleriň generasiýasynyň bäsdeş proseduralary giň gerime eýe boldular. Iki sany α we β bütewi sanlar m modul boýunça bäsdeş , bu ýerde m – bütewi san , onda we diňe onda R ýaly bütewi san bolup biler , bu α-β=Rm, ýagny eger α-β tapawudy m bölünse we eger α we β sanlar m sanyň absolýut ululygyna bölmekden birmeňzeş galyndylary berse . Meselem , 1984 = 4 (mod 10), 5008 = 8(mod $10^3$) we ş.m.

Bäsdeş proseduralar arassa determenirlenen bolup durýarlar, sebäbi rekurrentli gatnaşyk görnüşinde ýazylýarlar, haçanda funksiýa aşakdaky görnüşe eýe bolanda

$$X_{i+i}=\lambda X_i+\mu \pmod M$$

Bu ýerde $X_i$, λ, μ, M – otrisatel däl bitewi sanlar.
rekurentli gatnaşy açýarys:

$X_1=\lambda x_0+\mu \pmod M$
$X_2=\lambda X_1+\mu= \lambda^2x_0 + (\lambda^2+\lambda+1)\mu=\lambda^3x_0+(\lambda^3-1)\mu/(\lambda-1) \pmod M$;
...........................................
$X_i=\lambda_i x_0+(\lambda^i-1)\mu/(\lambda-1) \pmod M$ (4.11)

Eger başlangyç ähmiýet $X_0$ , k]peldiji λ we additiwli konstant μ berilen bolsa, onda (4.11)

$$\{\lambda^i x_0+\mu(\lambda^i-1)/( \lambda-1)\}$$

yzygiderlikleriň agzalaryna M bölmekdäki galyndylardan düzülen , $\{X_i\}$ bütewi sanlaryň yzygiderligini kesgitleýär. Şeýlelik bilen , islendik $i \geq 1$ üçin $X_i < M$ deňsizlik adalatlydyr. $\{ X_i \}$ yzygiderlikleriň bütewi sanlary boýunça (0,1) ýeke täk interwaldan oňaýly sanlaryň $\{ X_i \} = \{ X_i /M\}$ yzygiderligini gurmak mümkin.

Galp tötänleýin kwazideňölçegli paýlanan sanlaryň yzygiderligini almagyň bäsdeş prosedurasy multipilikatiw ýa-da garyşan usul bilen amala aşyryp biliner.

Multiplikatiw usul. M geçmeýän , $\{ X_i \}$ otrisatel däl bütewi sanlaryň yzygiderligini berýär, formula boýunça

$$X_{i+1}=\lambda X_i \pmod M,$$

Ýagny bu (4,10) gatnaşygyň hususy ýagdaýy M=0 bolmagynda

Usulyň determenirlenmeginiň güýjinde döreýän yzygiderlikler emele gelýär. Maşynly ýatkeşligiň talap edilýän göwrümi şol wagtda kiçidir , hasaplaýyş nukdaý nazary bilen bolsa iki bütewi sany döretmegiň yzygiderli hasaplamasy , ýagny häzirki zaman EHM bilen çsalt amala aşyrýan operasiýanyň ýerine ýetirmegi zerurdur.

Maşynly amala aşyrma üçin M=p wersiýa amatlydyr, bu ýerde p – hasaplaýyş ulgamynda sanlaryň sany , EHM –da kabul edilen (p=2 goşa we p=10 onluk maşyn üçin); & - maşynly sözde urgularyň sany . Onda M bölmekden galyndynyň hasaplanylmasy bölünýäniň kiçi razrýadlaryny & bölmeklige getirilýär, $X_i \in (0,1)$ interwaldan oňaýly droba bütewi $X_i$ den çepe ikilem ýa-da onluk otury goýmaklyk arkaly amala aşyrylýar.

Ikilenen maşyn M = 2 üçin yzygiderligi gurmagyň algoritmi indiki operasiýalary ýerine ýetirmeklikde jemlenýär :

1) $X_0$ hökmünde erkin jüp bolmadyk sany saýlamaly ;
2) $\Lambda = 8t \pm 3$ koeffisienti hasaplamaly , bu ýerde t – islendik položitel san;
3) 2 köp bolmadyk razrýadlary aňladýar, $\lambda X_0$ döreýşi tapmaly ;
4) $X_1$ yzygiderligiň birinji agzasy hökmünde & kiçi razrýadlary almaly , galanlary bolsa taşlamaly ;
5) $X_1 = X_1/2^{\&}$ droby (0,1) interwaldan kesgitlemeli ;
6) $X_0 = X_1$ dakmaly ;
7) Kp.3 gaýdyp gelmeli.

Garyşan usul. M geçmeýän ($X_i$) otrisatel däl bütewi sanlaryň yzygiderligini hasaplamaga mümkinçilik berýär, formula boýunça

$$X_{i+1}=\lambda X_i + M$$

Ýagny multiplikatiw usuldan tapawutlylykda M=0 hasaplama nukdaý nazary bilen garyşan usul multiplikatiw usuldan gaşmaklygyň bir operasiýasy bilen çylşyrymlydyr, ýöne şol wagtda goşmaça parametri saýlap almak mümkinçiligi alynýan sanlaryň mümkin bolan ýalňyşlygyny kemeltmäge mümkinçilik berýär.

Şeýle generatoryň takyk wersiýasynyň hilini diňe degişli maşynly synagyň kömegibilen bahalandyrmak mümkin.

Häzirki wagtda hemmetaraplaýyn EHM standartly meýilnamalarynyň ähli kitaphanalary deňölçegli paýlanan tötänleýin sanlaryň yzygiderligini hasaplamak üçin bäsleşikli prosedura esaslanandyr.

## Tötänleýin täsirlenmeleri modelirlemek

Ulgamy S imitasion modelirleme usuly bilen , köplenjem EHM-da statistiki modelirleme usuly bilen modelirlemekde, ulgama tötänleýin faktorlaryň we täsirlemşnmeleriň hasabyna düýpli üns berilýär. Olaryň görnüşe gelmegi üçin tötänleýin wakalar , diskretli we üznüksiz ululyklar, wektorlar, proseduralar ulanylýar. EHM-da agzalyp geçilenlerden islendik tebigatly tötänleýin obýektleriň amala aşyrylmasynyň görnüşe getirilmesi , tötänleýin sanlaryň yzygiderlikleriniň generasiýasynda we özgerdilmesinde jemlenýär. (0,1) interwalda deňölçegli paýlanylşa eýe bolan , galp tötänleýin sanlaryň bazaly yzygiderlikleriniň generasiýasy meselesinie seredilipdi , şonuň üçin hem modelirlenilýän ulgama S täsirlenmeleriň imitasiýasy üçin $\{y_i\}$ yzygiderlige $\{x_i\}$ tötänleýin sanlaruň yzygiderlikleriniň özgermesi meselesinde saklaýarys.

Bu meseleler tejribede EHM-da uylgamy imitasion modelirlemekde örän wajypdyr, sebäbi operasiýalaryň düýpli mukdary bar, diýmek EHM wagt baýlyklary tötänleýin sanlar bilen täsire harçlanylýar. Şeýlelik bilen tötänleýin sanlaryň yzygiderlikleriniň takyk ulgamyny modelirlemek üçin gerek bolan , görnüşe getirme algoritmleriniň we meýilnamalarynyň, täsirli usullarynyň , bolmagy köplenç ulgamlary derňemek we taslamak üçin maşynly imitasiýanyň tejribe taýdan ulanylma mümkinçiligini kesgitleýär.

Ulgamy statiki modelirlemekde ýönekeý tötänleýin obýekt tötänleýin waka bolup durýar. Olary modelirlemegiň aýratynlyklaryna seredeliň . Goý tötänleýin $X_i$ san ýagny (0,1) interwalda deňölcegli paýlanan & tötänleýin ululygyň mümkin bolan ähmiýeti bar bolsun. Berilen ähtimallyk p bilen gelýän , tötänleýin wakany A amala aşyrmak gerek. A, tötänleýin ululygyň & saýlanan ähmiýeti $X_i$ deňsizligi kanagatlandyrýar diýilen wakadan kesgitleýäris.

$$X_i \leq p$$

Onda A wakanyň ähtimallygy

$$P(A) = \int_{\delta}^{p} dx = p$$

Bolar. A wakanyň gapma garşylygy $X_i^b > p$ bolmagyndan durýar. Onda P(A)=1-p

Bu ýagdaýda modelirleme prosedurasy $X_i$ ähmiýetleri saýlamakdan we olary p bilen deňeşdirmekden durýar. Şol wagtda , eger şert ýerine ýetirilse , onda synagyň başy A waka bolup durýar.

Şeýlelikde wakalaryň tarapyna seretmeklik mümkin. Goý $A_1, A_2, \ldots\ldots , A_1$- $P_1, P_2 , \ldots\ldots , P_s$ ähtimallyklar bilen degişlilikde gelýän , wakalryň doly topary bolsun . $A_m$ tötänleýin ulullygyň & saýlanan ähmiýeti $X_i$ deňsizligi kanagatlandyrýardiýilen waka ýaly kesgitleýäris

$$L_{m-1} < X_i \leq L_m$$

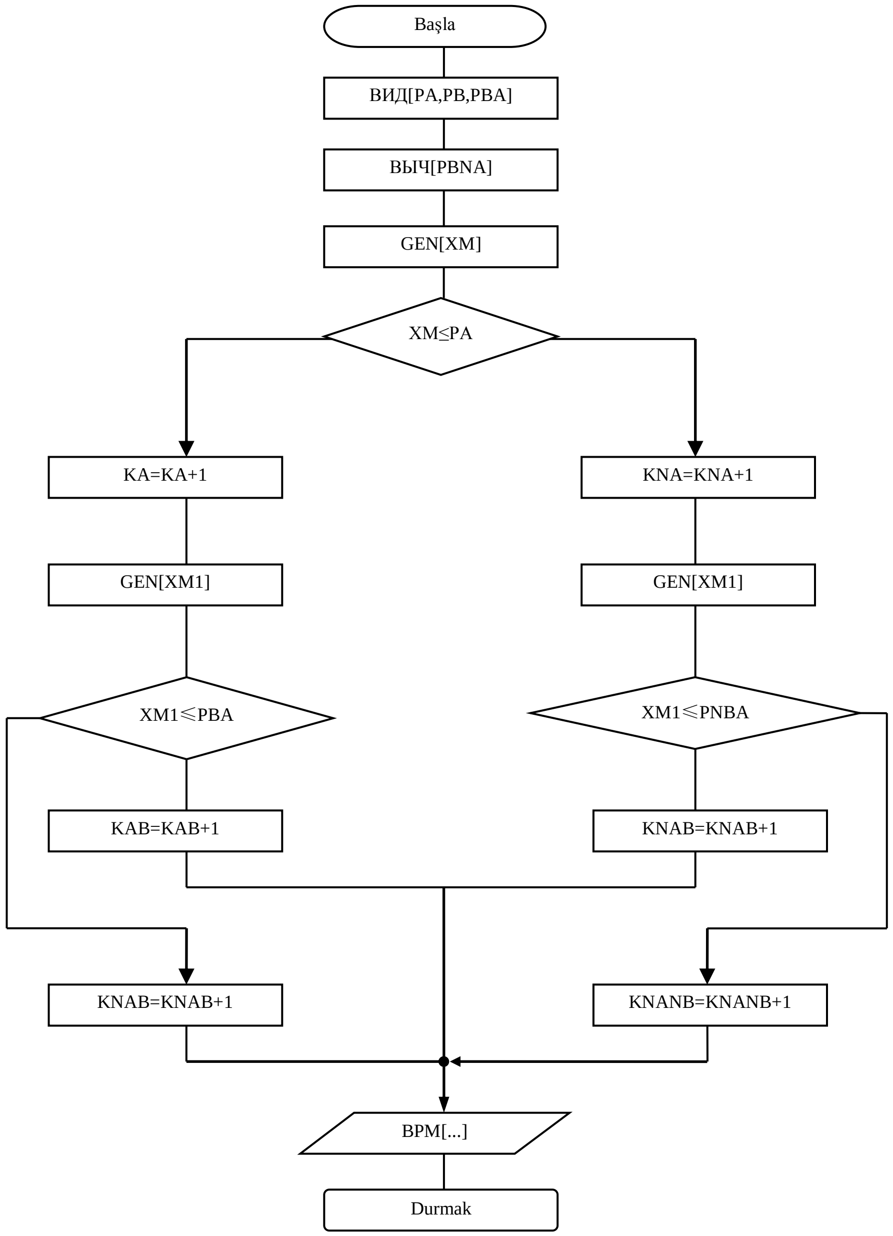
bu yerde $L_r = \sum_{i-1}^{r} Pi$

Onda

$$P(A_m) = \int_{im-1}^{lm} dx = Pm$$

Synaglary modelirlemegiň prosedurasy bu ýagdaýda tötänleýin sanlary $X_i$ ähmiýetler bilen yzygiderli deňleşdirmekden durýar. Synagyň başy eger şert ýerine ýetirilse $A_m$ waka bolýar. Bu proseduranyny $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ähtimallyk bilen degişlilikde bije boýunça synagyň başyny kesgitlemek diýip atlandyrylýar.

Modelirlemäniň bu prosedurasyna synag üçin (0,1) interwalda deňölçegli paýlanylşa eýe bolan , tötänleýin sanlar $X_i$ ulanylaýar diýilen çak edilmek bilen seredildi. EHM-da modelirlemekde kwazideňölçegli paýlanylşy galp tötänleýin sanlar ulanylýar , bu käbir ýalňyşlyklara getirýär. Ony bahalandyralyň. Ulgamlary modelirlemekde köplenç gözlenilýännetije iki we köp ýänekeý wakalardan bagly bolan , çylşyrymly waka bolup durýar, synaglary amala aşyrmak gerekdir. Goý, meselem A we W garaşsyz wakalar $P_A$ we $P_B$ gelmegi ähtimallygyna eýe bolsunlar. Bilelikdäki synaglaryň mümkin bolan başlary bu ýagdaýda $P_A P_B$ $(1-P_A) P_B$, $P_A(1-P_B)$, $(1-P_A)(1-P_B)$ ähtimallyklar bilen AB,AB,AB,AB wakalalr bolar.




Surat. Bagly bolan wakada modelirleýji algoritmik shemasy.

Bilelikdäki synaglary modelirlemek üçin proseduranyň iki wariantyny ulanmaklyk mümkin:

1. Şerti yzygidserli barlamak ;
2. meňzeşlikde , degişli ähtimallyklar bilen bije boýunça AB,AB,AB,AB başdakylardan birisini kesgitlemek .

Birinji wariant iki sany $X_i$ we Şertli barlamak üçin deňeşdirilmäni talap edýär . Ikinji wariantda $X_i$ bir sanam ýeterlik bolar, ýöne deňeşdirilme köp talap edilip biliner. Modelirleýji algoritmi gurmkalygyň amatlylygynyň we EHM ýaçeýkalarynyň we operasiýalarynyň mukdarynyň tygşytlanmasynyň nukdaý nazary bilen birinji wariant has üns bererliklidir.

Indi bolsa haçanda A we W wakalar garaşly bolup durýar we $P_A$ we $P_B$ ähtimallyklar bilen gelýän , ýagdaýa seredeliň. P(B/A) üstünden A waka bolup geçdi diýilen şertde W wakanyň gelmeginiň şertli ähtimallygyny belleýäris. Şol wagtda P(B/A) şertli ähtimallyk berildi diýip hasap edýäris.

Modelleri gurmaklygyň wariantlarynyň birine seredeliň. Tötänleýin sanlaryň { $X_i$ } yzygiderliginden nobatdaky $X_m$ san çykarylýar we $X_m<P_A$ deňsizligiň adalatlygy

barlanylýar. Eger bu deňsizlik adalatly bolsa , ondaa A waka geldi. W waka bilen baglanşykly , synag üçin P (B/A) ähtimallyk ulanylýar . Sanlaryň { $X_i$ } toplumdan nobatdaky $X_{m+1}$ san alynýar we $X_{m+1}$ <=P(B/A) şert barlanylýar. Bu deşsizligiň ýerine ýetirilýänliginden ýa-da ýetirilmeýändiginden baglylykda , synagyň başlangyjy AB ýada AB bolup durýar.

Eger $X_m$ <$p_A$ deňsizlik ýerine ýetirilse ,onda A waka geldi. Şonuň üçinem W waka bilen baglanşykly , synag üçin ähtimallygy kesgitlemek zerurdyr

$$P(B/A) = [P(B)-P(A)P(B/A)]/(1-P(A))$$

{$X_i$} toplumdan $X_{m+1}$ sany saýlap alýarys $X_{m+1}$<=P(B/A) deňsizligiň adalatlylygyny barlaýarys. Onuň ýerine ýetirilýärmi ýa-da ýetirilmeýänliginden baglylykda , AB ýa-da AB synaglaryň başlangyçlaryny alýarys.

Modeliň bu wariantyny amala aşyrmaklyk üçin algoritmiň oýlanşykly shemasy suratda görkezilendir. Bu ýerde Görnüş [.....] - başdaky berilenleri girizmek prosedurasy ;
GEN [....] – deňölçegli paýlanan tötänleýin sanlaryň generatory; XM≡Xm;
XM1≡$X_{m+1}$ $P_A$≡$P_A$;
PB≡PB;
PBA≡ P(B/A);
PBNA≡P(B/A);
KA, KNA , KAB, KANB, KNAB, KNANB-A, A, AB,AB,AB,AB wakalaryň degişlilikdäki sany;
BPM[...]-modelirleme netijelerini bermek prosedurasy.

Meselem , P-shemalarda prosesleriň görnüşe gelmegi üçin gulluk edýän, markowsaiý zynjyrlaryň EHM-da modelirlenilmesiniň aýratynlyklaryna seredeliň. Ýönekeý birmeňzeş markowskiý zynjyr geçişleriň matrisalary bilrn kesgitlenilýär.

$$P = \begin{Vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1R} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2R} \\ . & . & \dots & . \\ P_{R1} & P_{R2} & \dots & P_{RR} \end{Vmatrix}, \qquad 0 \le p_{ij} \le 1,$$

Bu ýerde $P_{ij}$ $z_j$ ýagdaýa geçmegiň ähtimallygy.

Geçişleriň matrisasy P markowskiý prosesi doly ýazgy edýär.

Şeýle matrisa stohastiki bolup durýar, ýagny her setiriň elementleriniň bahasy birlige deň ýagny

$$\sum_{j=1}^{R} Pij = 1; i = 1, R$$

$P_i(n)$ üstünden , i=1,R ähtimallygy ulgam n geçişlerden soň $z_i$ ýagdaýda bolar diýip belläris. Kesgetlemek boýunça

$$\sum_{i=1}^{R} Pi(n) = 1$$

Wakalaýyn ýakynlaşmany ulanmak bilen, markowskiý zynjyry modelirlemä indiki ýagdaýda barmak bolar. Goý synaglaryň mümkin bolan başlangyçlary $A_1, A_2, ......, A_R$ wakalar bolsun. Ähtimallyk $P_{ij}$ - bu şu synagda geçen synagyň başlangyjy A waka bolupdy diýilen şertde A wakanyň gelmeginiň şertli ähtimallygy . Makowaň şeýle zynjyrynyň modelirlenilmesi $P_{ij}$ ähtimallyk bilen bije boýunça $A_j$ wakanyň yzygiderli saýlanmasynda durýar.

Ilki $P_i(0)$, $P_2(0), ... , P_R(0)$ başdaky ähtimallyklar bilen berilýän, başlangyç ýagdaý $z_0$ saýlanylýar. Munuň üçin $\{X_i\}$ sanlaryň yzygiderliginden $X_m$ san saýlanylýar we $P_i$ hökmünde $P_i(0)$, $P_2(0), ... , P_R(0)$ ähmiýetler ulanylýan, (4..17)-den $i_j$ bilen deňeşdirilýär. Şeýlelikde (4.17) deňsizlik adalatly bolup durýan, $m_0$ belgi saýlanylýar. Onda zynjyryň bu amala aşyrylmasynyň başlangyç wakaly $A_{mo}$ bolar . Soňra $P_i$ hökmünde $P_{moj}$ ulanylýan, $i_j$ bilen deňeşdirilýän, $X_{m+1}$ indiki tötänleýin san saýlanylýar. M, belgi kesgitlenilýär we zynjyryň bu amala aşyrylmasynyň indiki wakasy $A_m$, ş.m. bolar. Her bir $M_i$ belgiň diňe bir nobatdaky $A_{mi}$ wakany kesgitlemän, eýsem nobatdaky $m_{i+1}$ belgini saýlamak üçin $P_{mi1,}$ $P_{mi2,}$ ....., $P_{miR}$ ähtimallyklaryň paýlanmasynyň hem kesgitlenýänligi aýdyňdyr.

Üstesine ergodiki markowskiý zynjyrlar üçin başlangyç ähtimallyklarynyň täsiri synaglaryň belgisiniň ösmegi bilen çalt kemelýär. $P_i(n)$ ähtimallyklaryň çäkli paýlanylşy i=1, R başlangyç şertlerden $P_i(0)$ bagly bolmadyk , dürli markowskiý prosess ergodiki diýilip atlandyrylýar. Şonuň üçinem modelirlemekde

$$P_1(0) = P_2(0) = . . . = P_R(0) = 1/R$$

diýip kabul etmek mümkin.

Meselem , birmeňzeş däl markowskiý zynjyrlary zynjyrlary modelirlemek üçin , has çylşyrymly algoritmleri şuňa meňzeşlikde gurmak mümkin

Tötänleýin obýektleriniň amala aşyrylmasynyň modelirlenmesiniň seredilen usullary stohastiki ulgamlary görnüşe getirmek prosesiniň modellerinde amala aşyrylmany görnüşe getirmegiň has mahsus bolan proseduralary barada umumy oýlanmalary berýär, ýöne hemmetaraplaýyn EHM-da statistiki modelirlemekde tejribede ulanylýan , ähli usullary anyk susmaýar

Başdaky materiallar bilen paýlamagyň berilen kanuny bilen tötänleýin ululyklaryň mümkin bolan ähmiýetiniň görnüşe getirilmesi üçin (0.1) interwalda deňölçegli paýlanylşa eýe bolan, tştänleýin sanlaryň bazaly yzygiderligi $\{X_i\}$ gulluk edýär. Başga söz bilen aýdylanda , tötänleýin sanlar $X_i$ (0,1) interwalda deňölçegli paýlanylşa eýe bolan, tötänleýin ululyklaryň mümkin bolan ähmiýeti & ýaly , paýlanyş kanuny berilen , tötänleýin ulylygyň & mümkin bolan ähmiýetine $Y_i$ özgerdilip bilinerler

Diskretli tötänleýin ululyklary almaklygyň ýagdaýy üçin özgerdilmäň aýratynlyklaryna seredeliň. Diskretli tötänleýin ululyk η, ähtimallyklaryň differensially paýlanmasyny düzüji $P_1, P_2, ...., P_j, ....$ ähtimallyklar bilen $y_1 <= y_2 <= .... <= y_i <= .....$ ähmiýetleri kabul edýär.

$$y \quad y_1 \quad y_2 \; ..... \; y_j .....$$

$$P(\eta=y) \quad P_1 \quad P_2 \; .... \; P_j ....$$

Şol wagtda paýlanylşyň integraly funksiýasy

$F_\eta(y)=P(\eta<=y)=\sum_{j=1}^{m} pj$ $\qquad y_m<=y<=y_{m+1}$

m=1,2,....,

$F\eta(y)=0$; $y<y_1$

Diskretli tötänleýin ululyklary almaklyk üçin ters funksiýa usulyny ulanmaklyk mümkin . Eger $\xi$ – (0,1) interwalda deňölçegli paýlanan tötänleýin ululyk bolsa , onda gözlenilýän tötänleýin ululyk $\eta$ özgerdilmäň kömeginde alynýar:

$\eta= F_\eta^{-1}(\xi)$,

bu ýerde $F_\eta^{-1}$ - $F_\eta$ ters bolan funksiýa.

(4.19) we (4.20) boýunça hasaplamak algoritmi indiki hereketleriň ýerine ýetirilmeginde jemlenýär:

eger $X_i < P_1$ , onda $\eta=y_1$ , başgaça,

eger $X_i < P_1 + P_2$, onda $\eta=y_2$ , başgaça,

…………………………………………….

eger $X_i < \sum_{j=1}^{m} P_j$ , onda $\eta=y_m$ , başgaça,

……………………………………………….

boýunça hasaplamakda deňeşdirme sikilleriniň orta sany $\mu=\sum_{j=1}^{\infty} jPj$

Tejribede EHM –da ulgamy modelirlemekde giň gerime eýe blýan, paýlanylşyň berilen kanuny bilen diskretli tötänleýin ululyklary almagyň algoritmleriniň we meýilnamalarynyň beýleki mysallaryny hem getirmek mümkin.

EHM-da üznüksiz tötänleýin ululyklarynyň generasiýasynyň aýratynlyklaryna seredeliň. Üznüksiz tötänleýin ululyk $\eta$ paýlanmaň integraly funksiýasy bilen berilen

$$F\eta(y)=P(\eta\le y)=\int_{\infty}^{y} f\eta(Y)dy,$$

Bu ýerde $f\eta(y)$ – ähtimallyklaryň dykyzlygy .

Diskretli ululyklar ýaly paýlanmaň berilen kanuny bilen üznüksiz tötänleýin ululygy almaklyk üçin ters funksiýasynyň usulyndan peýdalanmak mümkin. $F\eta(y)=\xi$ deňlemä degişlilikde $\eta$ çözmeklik bilen alynan , $\eta=F\eta^{-1}(\xi)$ bir belgli monotonally funksiýa (0,1) interwalda deňölçegli paýlanan $\xi$ ululygy $f\eta(y)$ talap edilýän dykyzlyk bilen özgerdýär.

Hakykatdan-da , eger tötänleýin ululyk $\eta$ $f\eta(y)$ paýlanyş dykyzlygyna eýe bolsa , onda tötänleýin ululygyň paýlanylşy

$$\xi=\int_0^n f\eta(y)dy$$

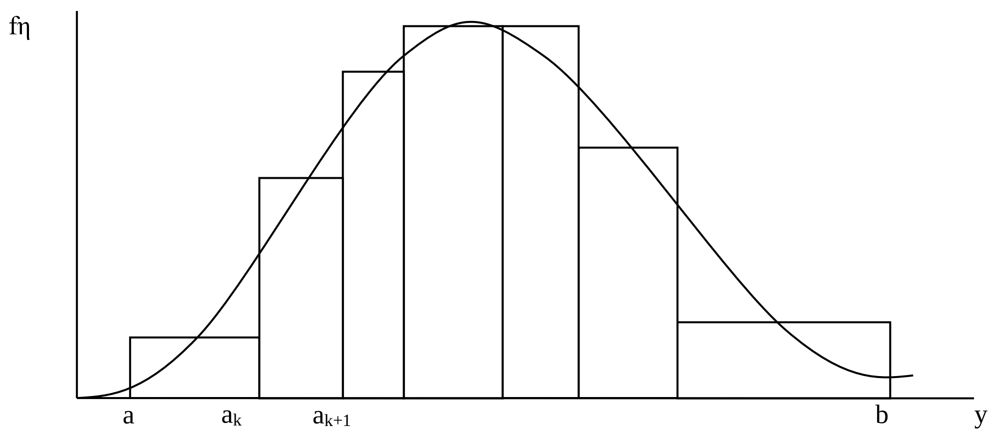
(0,1) interwalda deňölçegli bolup durýar. Şunuň esasynda indiki netijäni çykarmak mümkin . $f\eta(y)$ dykyzlyk funksiýasyna eýe bolan . $\{y_i\}$ tötänleýin sanlaryň yzygiderligine degişli bolan sany almaklyk üçin $y_i$ degişli deňlemäni çözmeklik gerekdir

$$\int_{-\infty}^{yj} f\eta(y)dy = x_i$$

(0,1) interwalda deňölçegli paýlanylşa eýe bolan , tötänleýin sanlaryň esasynda paýlanmaň berilen kanuny bilen üznüksiz tötänleýin sanlaryň ters funksiýa usuly bilen almagyň käbir mysallaryna seredeliň .

gatnaşygy ulanmagyň beýleki mysallaryny hem getirmek mümkin ýöne paýlanmaň berilen kanuny bilen tötänleýin sanlary alamgyň bu usuly EHM-da ulgamy modelirlemäni tejribede ulnmagyň çäklendirilen sferasyna eýedir, bu indiki ýagdaýlar bilen düşündirilýär:

1. modelirlemäň tejribe meselelerinde gabat gelýän, paýlanmaň köp kanunlary üçin integral alynmaýar, ýagny çözülşiň sanly usulyna ýüzlenmeli bolýar, bu her bir tötänleýin sany almaklyga mşynly wagty harajatlaryny ulaldýar;
2. hat-da haçanda integral gutarnykly görnüşde alynýan ýagdaýlar üçin hem köp başdaky operasiýalary saklaýan EHM standartly meýilnama aşagynyň kömegi bilen ýerine ýetirilýär, kök çykarmak logorifmirleme hereketlerini saklaýjy formulalar emele gelýärler. Bu hem her bir tötänleýin sany almaklyga maşynly wagtyň harajatlaryny gönümel ulaldýar.




Surat Dykyzlyk funksiýasynyň bölekleýin approksimasiýasy

Şonuň üçin hem ulgamlary modelirlemek tejribesinde köplenç tötänleýin sanlary özgertmegiň takmyny usullaryna ýüzlenýärler, ýagny olary indiki görnüşde klassifisirlemek mümkin

1. hemmetaraplaýyn usullar ýagny bu usullaryň kömeginde islendik görnüşli paýlanyş kanuny bilen tötänleýin sanlary almak mümkin

2. paýlanmaň takyk kanuny bilen tötänleýin sanlary almak üçin ýaramly hemmetaraplaýyn bolmadyk usullar

Dykyzlyk funksiýasynyň bölekleýin apporoksimaýasyna esaslanan , tötänleýin sanlary almagyň takymyny hemmetaraplaýyn usulyna seredeliň. Goý mümkin bolan ähmiýeti (a,b) interwalda ýatan , Fη(y) dykyzlyk funksiýaly $\{Y_i\}$ tötänleýin sanlaryň yzygiderligini almaklyk talap edilýän bolsun. Fη(y) bölekleýin mydamalyk fuksiýa görnüşinde goýýarys, ýagny (a,b) interwaly m interwallara suratda görkezilşi ýaly bölýäris , we fη(y) her interwalda mydamalyk hasaplaýarys. Onda tötänleýin usuly η, $\eta=a_R+\eta_{R*}$ görnüşinde bölmek mümkin ,
Bu ýerde
$A_R$ – R-nji interwalyň çep araçäginiň abssissasy ’;
$\eta_R$ – R-nji interwalyň içinde mümkin bolan ähmiýeti deňölçegli ýerleşdirýän , tötänleýin ululyk , ýagny $a_R$ / $a_{R+1}$her uçastokda ululyk $\eta_R$ deňölçegli paýlan hasaplanylýar. Fη(y) tejribe maksatlary üçin has amatly usul bilen apporoksimirlemek üçin (a,b) interwallara bölmek maksadasa laýykdyk, ýagny tötänleýin ululygyň η islendik interwalda ($a_R$, $a_{R+1}$ ) düşmek ähtimallygy mydamalyk bolar ýaly edip, ýagny R interwalyň belgisinden bagly bolmaz ýaly . Şeýlelik bilen , $a_R$ hasaplamak üçin indiki gatnaşyklardan peýdalanýarys:

$$\int_{a_R}^{a_{R+1}} f\eta(y)dy$$

Tötänleýin sanlary almagyň bu usulynyň maşynly amala aşyrylmagynyň algoritmi indiki hereketleriň yzygiderli ýerine ýetirilmeginden durýar:

1. (0,1) interwlda tötänleýin deňölçegli paýlanan san $X_i$ generirlenenýär.
2. Bu sanyň kömegi bilen tötänleýin ýagdaýda ($a_R$, $a_{R+1}$) interwal saýlanylýar;
3. $X_{i+1}$ san generirlenýär we ony ($a_R$, $a_{R+1}$) interwala getirmek maksady bilen masştaablaşdyrýar, ýagny ($a_R$, $a_{R+1}$) $X_{i+1}$ koeffisentine köpeldilýär;
4. paýlanmaň talap edýän kanuny bilen $y_i=a_R+(a_{r+1}-a_R)\,X_{i+1}$ tötänleýin san hasaplanylýar.

Tötänleýin sanyň $X_i$ kömegi bilen ($a_R$, $a_{R+1}$) interwaly saýlamagyň has giňişleýin prosessine seredeliň . Bu maksatlar üçin , sanlary (a,b) interwala getirmeklik üçin gatnaşykdan kesgitlenen , masştablaşdyrma koeffisiýentiniň ähmiýetini we R interwallaryň belgisini öňünden içinde ýerleşdirip , tablisaçäni gurmaklyk maksada laýykdyr. Generatordan tötänleýin sany $X_i$ almak bilen , bu tablisaçäniň kömeginde çep araçägiň $a_R$ absissini we masştablaşdyrma koeffisiýentini ($a_{R+1}$- $a_R$) dessine kesgitleýäris.

Tötänleýin sanlary özgertmäniň bu takmyny usulynyň gowy tarapy : EHM –da amala aşyrmada her bir tötänleýin sany almaklyk üçin operasiýalryň uly bolmadyk mukdary talap edilýär , sebäbi masştablaşdyrmak operasiýasy modelirlemeden öňürti diňe bir gezek ýerine ýetirilýär, we operasiýalaryň mukdary approksimasiýanyň takyklygyndan , ýagny m interwallaryň mukdaryndan bagly däldir.

Ähtimallyklar nazarýetiniň çäkli nazarýetiniň esasynda $\{y_i\}$ paýlanmagyň berilen kanuny bilen yzygiderligine deňölçegli paýlanan tötänleýin sanlaryň $\{X_i\}$ yzygiderliklerini özgertmegiň usullaryna seredeliň. Şeýle usullar paýlanmagyň takyk kanuny bilen sanlaryň yzygiderliklerini almaklyga takmynlaşdyrylandyr , ýagny hemmetaraplaýyn däldirler

## Matematiki statistikanyň elementleri.

## Matematiki statistika düşünjeleri.
## Saýlama usuly.

Matematiki statistika ähtimallyklar teoriýasy bilen bir-bada XII asyrda döreýär. Belli bolşy ýaly ähtimallyklar teoriýasy tötän wakalaryň matematiki modellerini öwrenmek bilen gyzyklanýar, a matematik statistika bolsa, statistik maglumatlary taýarlamagyň analiziniň usullaryny we düzgünlerini öwredýär.

Matematiki statistikanyň birinji meselesi statistiki maglumatlary ýygnamagyň we toparlaşdyrmagyň usulyny görkezýär. Ikinji meselesi bolsa, tejribäniň maksada görä geçirilýändigi barada statistiki maglumatlary derňemegiň usulyny oýlap tapmakdan ybaratdyr.

Goý obýektleri häsiýetlendirýän käbir hil we mukdar nyşanlara baglylykda birjynsly obýektleriň toplumyny öwrenmek talap edilýän bolsun. Meselem, eger detallar toplumy bar bolsa, onda hil nyşany bolup onuň hiliniň oňatlygy hyzmat edýär, mukdar nyşany bolup detalyň derňelýän ölçegi hyzmat edýär.

Tötän ýagdaýda saýlanyp alnan obýektleriň toplumyna ýöne saýlama toplum diýilýär.

Saýlama geçirilýän obýektleriň toplumyna baş toplum diýilýär.

Toplumyň obýektleriniň umumy sanyna (baş ýa-da saýlama) toplumyň göwrümi diýilýär. Meselem, eger 1000 detaldan derňemek üçin 100 detal saýlanyp alnan bolsa, onda **N=1000** baş toplumyň göwrümi **n=100** saýlama toplumyň göwrümi bolar.

Birmeňzeş obýektleriň jemlenmesini häsiýetlendirýän hil ýa-da mukdar nyşany öwrenilende, jemlenmedäki obýektleriň her birini ýekän-ýekän barlap çykmak köplenç mümkin bolmaýar, (obýektleriň sany örän köp, ýöne, mysal üçin, snarýadlaryň hilini barlamak üçin, olary ýarmaly bolýar).

Şonuň üçin saýlama usuly ulanylýar. Ol şeýle baş topardan tötän ýagdaýda n-sanysy alynyp (saýlama topar diýilýär) olar jikme-jik öwrenilýär we soňra ähli baş topar hakynda pikir ýöredilýär. Saýlama topardaky elementleriň garaşsyzlygyny talap edýäris.

## Saýlamanyň statistiki paýlanyşy.

Goý X – mukdar nyşany öwrenmek üçin baş toplumdan n – göwrümli $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ , … $x_k$ - saýlama bölünip alnan bolsun. Şonuň ýaly hem $x_1$ , $n_1$ – gezek, $x_2$ , $n_2$ – gezek, $x_k$ , $n_k$ – gezek gözegçilik edilýän bolsun.

Bu ýerde, gözegçilik edilýän $x_i$ ($x_1$ , $x_2$ , $x_3$ , … $x_k$ ) bahalara wariantlar diýilýär. Artýan tertipde ýerdeşdirilen wariantlaryň yzygiderligine – wariasion hatar diýilýär. Käbir wariantlaryň gabat gelmekleri hem mümkin .

ýygylygy $n_1,n_2,...,n_k$ bilen belleýäris, $n_1+n_2+n_3+...+n_k=n$ – saýlamanyň göwrümi Ýygylygyň göwrüme bolan gatnaşygyna, ýagny

$\frac{n_1}{n} = \mu_1, \frac{n_2}{n} = \mu_2, ..., \frac{n_k}{n} = \mu_k$ - sanlara otnositel ýygylyk diýilýär.

Bu ýerde $\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_k = \sum \mu_k = 1.$

Degişli ýygylyklary $n_i$ – bilen ýa-da otnositel ýygylyklary $\mu_i$ – bilen berilen wariantlaryň $x_i$ toplumyna saýlamanyň statistiki paýlanyşy ýa-da emperiki kanuny diýilýär. Ol tablisa görnüşde aşakdaky ýaly berilýär

| wariantlar | $X_1$ | $X_2$ | ... | $X_k$ |
|---|---|---|---|---|
| ýygylyk | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_k$ |
| otnositel ýygylyk | $\mu_1$ | $\mu_2$ | ... | $\mu_k$ |

Saýlama orta baha diýip

$$\overline{X}_c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j x_j$$

ulylyga aýdylýar.

## Empirik paýlanyş funksiýasy.

Goý X mukdar nyşanyň ýygylygynyň statistik paýlanyşy belli bolsun.
Bellik girizýäris:

$n_x$- x-dan kiçi wariantlaryň ýygylyklarynyň jemi;
n- saýlamanyň göwrümi.

Onda (X<x) walanyň otnositel ýygylygy $\frac{n_x}{n}$-e deň bolar. Eger x üýtgese otnositel ýygylyk hem üýtgär, ýagny $\frac{n_x}{n}$-otnositel ýygylyk x-a görä funksiýa bolar. Ol funksiýa tejribe üsti bilen tapylýar, şonuň üçin hem oňa empirik funksiýa diýilýär. Ol $F_B(x)$ bilen belgilenýär.

**<u>Kesgitleme</u>**: x-yň her bahasy üçin (X<x) wakanyň otnositel ýygylygyny kesgitleýän $F_B(x)$ funksiýa empirik paýlanyş funksiýa diýilýär.

Kesgitlemä görä

$$F_B(x)=\frac{n_x}{n}$$

bu ýerde $n_x$- x-dan kiçi wariantlaryň sany (ýygylygyň jemi), n- saýlamanyň göwrümi. Şeýlelikde, meselem $F_B(x)$-ni tapmak üçin $x_2$-den kiçi wariantlaryň sanyny, n göwrüme paýlamaly, ýagny

$$F_B(x)=\frac{n_x}{n}$$

Ozal belli bolşy ýaly, eger x hakyky üýtgeýän ulylyk bolsa, onda

F(x)=P{X<x}

{X<x}-wakanyň ähtimallygyna X tötän ulylygyň toplumynyň paýlanyş funksiýasy diýilýär. Oňa F(x) şonuň ýaly hem, teoretik paýlanyş funksiýasy hem diýilýär.

Empirik paýlanyş funksiýa $F_B(x)$ munuň özi F(x) teoretik paýlanyş funksiýanyň anyklamasy bolýar.

$F_B(x)$ funksiýanyň kesgitlemesinden şu aşakdaky häsiýetleri gelip çykýar:

1) empirik funksiýanyň bahalary [0;1] kesimde ýatýar, ýagny $F_B(x)\in[0;1]$.
2) $F_B(x)$ kemelmeýän funksiýadyr.
3) eger $x_1$-iň kiçi warianty bolsa, onda $x\le x_1$ bolanda $F_B(x_1)=0$, eger $x_k$-iň uly warianty bolsa, onda $x\ge x_k$ bolanda $F(x)=1$.

Empirik funksiýa baş toplumyň teoretik paýlanyş funksiýasyny bahalandyrmak üçin hyzmat edýär.

Mysal. Berlen saýlamanyň paýlanyşy boýunça empirik funksiýany gurmaly:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| wariant | $x_i$ | 2 | 6 | 10 |
| ýygylyk | $n_i$ | 12 | 18 | 30 |

Çözülişi. Saýlamanyň göwrümini tapýarys, ýagny $n_1+n_2+n_3=12+18+30+=60$.

Iň kiçi wariant $x_1=2$, diýmek

$F_B(x)=0$, eger $x\le2$.

($X<6$) baha, ýagny $x_1=2$ 12 gezek gözegçilik edildi, diýmek

$$F_B(x)=\frac{12}{60}=0,2 \qquad \text{eger } 2<x\le6$$

($X<10$) baha, $x_1=2$ we $x_2=6$ jemi 12+18=30 gezek gözegçilik edildi, diýmek

$$F_B(x)=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}=0,5 \text{ eger } 6<x\le6.$$

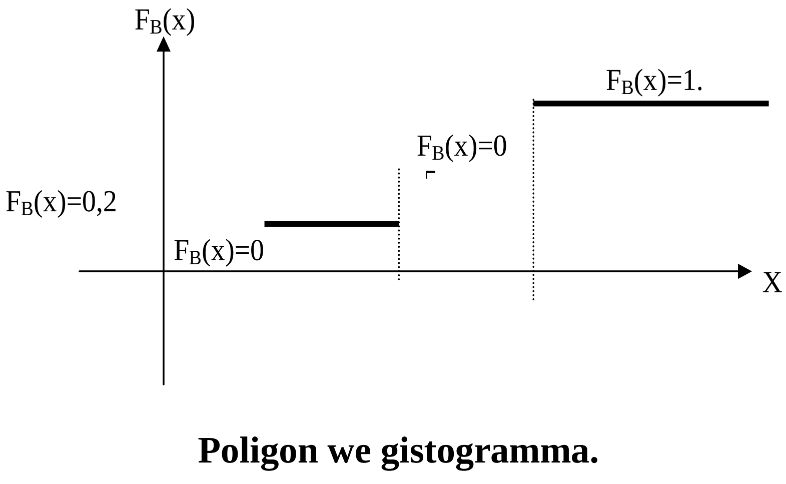
Bu ýerde x=10-iň uly wariant, onda

$$F_B(x)=1, \text{ eger } X>10.$$

Şeýlelikde, gözlenýän empirik funksiýa aşakdaky ýaly bolar.

$$F_B(x)=\begin{cases}0, & \text{eger } x\le2,\\ 0,2, & \text{eger } 2<x\le6,\\ 0,5, & \text{eger } 6<x\le10,\\ 1, & \text{eger } x>10.\end{cases}$$

Onuň grafigi




## Poligon we gistogramma.

Statistik paýlanyşy doly göz öňüne getirmek maksady bilen onuň dürli grafikleri gurulýar, olaryň içinde has köp duş *gelýänleri* poligon we *gistogrammadyr*.

$(x_1,n_1)$, $(x_2,n_2)$,..., $(x_k,n_k)$- nokatlary birleşdirýän kesimlerden emele gelen döwük çyzyga ýygylygyň poligony diýilýär. Ony gurmak üçin abssissalar okunda wariantlary ($x_i$), a ordinatalar okunda bolsa, oňa degişli ýygylyklar ($n_i$) ýerleşdirilýär. Soňra $(x_i,n_i)$- nokatlary göni çyzygyň kesimleri bilen birleşdirip ýygylygyň poligonyny alarys.

$(x_1,\mu_1)$, $(x_2, \mu_2)$,..., $(x_k, \mu_k)$- nokatlary birleşdirýän döwük çyzyga, otnositel ýygylygyň ($\mu_i$) poligony diýilýär. Ony gurmak üçin abssissalar okunda $x_i$ we ordinata okunda $\mu_i$ bahalary ýerleşdirýärler. ($x_i$,$\mu_i$)- nokatlary birleşdirip otnositel ýygylygyň poligony alynýar.

Eger nyşan üznüksiz bolsa, onda gistogramma gurulýar.

Esasynyň uzynlygy h-a deň bolan bölek aralyklardan beýikligi $\frac{n_i}{n}$ (ýygylygyň dykyzlygy) gatnaşyga deň bolan tekjeli şekile ýygylygyň *gistogrammasy* diýilýär.

Ony gurmak üçin, abssissalar okunda bölekleýin kesimleri ýerleşdirýäris, şolardan arasynyňuzaklygy $\frac{n_i}{n}$ bolan abssissa okuna parallel kesimleri ýerleşdirýäris. i-göniburçlugyň meýdany $h\cdot\frac{n_i}{n}=n_i$ bolar. Şeýlelikde, ýygylygyň gistogrammasynyň meýdany, hemme ýygylyklaryň jemine, ýagny saýlamanyň göwrümine deňdir.

Eger uzaklygy h, beýikligi $\mu_i$ bolsa, onda oňa otnositel ýygylygyň gistogrammasy diýilýär.

Otnositel ýygylygyň gistogrammasynyň meýdany, hemme otnositel ýygylyklaryň jemine, ýagny bire deňdir.

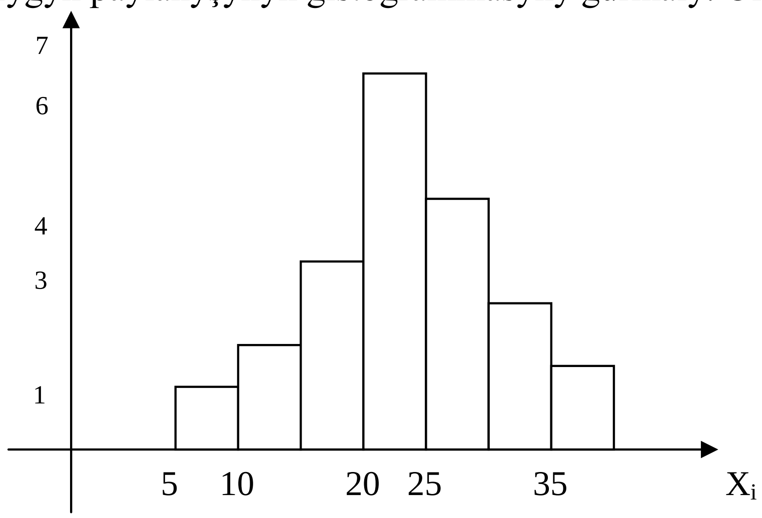
Sebäbi

$$\sum\mu_i = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n = 1.$$

Mysal 1. Göwrümi n=100 bolan ýygylygyň paýlanyş tablisasy berlen.

| h=5 interwalyň uzynlygy | $\sum n_i$ | $\frac{n_i}{n}$ -ýygylygyň dykyzlygy |
|---|---|---|
| 5-10 | 4 | 0.8 |
| 10-15 | 6 | 1.2 |
| 15-20 | 10 | 3.2 |
| 20-25 | 36 | 7.2 |
| 25-30 | 24 | 4.8 |
| 30-35 | 10 | 2.0 |
| 35-40 | 4 | 0.8 |

Ýygylygyň paýlanyşynyň gistogrammasyny gurmaly. Ol aşakdaky ýaly bolar



## Edebiýatlar


1. Türkmenistanyň Konstitusiýasy. Aşgabat, 2008.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom. Aşgabat, 2008.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. II tom. Aşgabat, 2009.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, 2007.
5. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, 2007.
6. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Ministrler Kabinetiniň göçme mejlisinde sözlän sözi. (2009-njy ýylyň 12-nji iýuny). Aşgabat, 2009.
7. Türkmenistanyň Prezidentiniň «Obalaryň, şäherleriň, etrapdaky şäherçeleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşaýyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin» Milli maksatnamasy. Aşgabat, 2007.
8. «Türkmenistany ykdysady, syýasy we medeni taýdan ösdürmegiň 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Baş ugry» Milli maksatnamasy. «Türkmenistan» gazeti, 2003-nji ýylyň, 27-nji awgusty.
9. «Türkmenistanyň nebitgaz senagatyny ösdürmegiň 2030-njy ýyla çenli döwür üçin Maksatnamasy». Aşgabat, 2006.
10. Основы кибернетики, под ред. К.А.Пупкова. М.: Высшая школа, 1974, 472 с.
11. Роберт Р. Столл. Множества, логики аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968, 268 с.
12. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980, 306 с.
13. Нечеткие множества в моделях управления искусственного интеллекта, под ред. Д.А.Поспелова, М.: Наука, 1986, 288 с.
14. Вентсель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1983. 432 с.

MAZMUNY